

Physik IV – Atome und Moleküle

Sommer 2002, Prof. Wim de Boer, Universität Karlsruhe

Übungsleiter: Frank Hartmann, Forschungszentrum Karlsruhe,
Tel.: 07247 82 6330; Email: Frank.Hartmann@cern.ch

LÖSUNGEN Übung 7

1. Drehimpulsoperatoren

(a) $[\hat{L}_z, \hat{L}^2] = 0$

$$\begin{aligned} [\hat{L}_z, \hat{L}^2] &= \\ &= [\hat{L}_z, \hat{L}_x^2] + [\hat{L}_z, \hat{L}_y^2] + [\hat{L}_z, \hat{L}_z^2] \\ &= [L_z, L_x]L_x + L_x[L_z, L_x] + [L_z, L_y]L_y + L_y[L_z, L_y] \\ &= i\hbar(L_yL_x + L_xL_y - L_xL_y - L_yL_x) = 0 \end{aligned}$$

(b) Warum Eigenwert $l(l+1)$ und nicht l^2

$$\begin{aligned} \hat{l}_- \hat{l}_+ F_{l,m} &= (\hat{l}_x - i\hat{l}_y)(\hat{l}_x + i\hat{l}_y)F_{l,m} \\ &= (\hat{l}_x^2 + \hat{l}_y^2 + i\hat{l}_x\hat{l}_y - i\hat{l}_y\hat{l}_x)F_{l,m} \\ &= (\hat{l}^2 - \hat{l}_z^2 - \hbar\hat{l}_z)F_{l,m} \\ &= (\omega^2\hbar^2 - m^2\hbar^2 - m\hbar^2)F_{l,m} \end{aligned}$$

Setze $F_{l,m} = F_{l,m_{max}} = F_{l,l}$

dann gilt $\hat{l}_+ F_{l,m_{max}} = 0$ oder damit $\omega^2 = m_{max}^2 - m_{max} = 0$
 $\omega^2 = m_{max}(m_{max} + 1) = l(l+1)$

2. $L = \sqrt{l(l+1)}\hbar$ für $l=3$ ist der Betrag daher $2\sqrt{3}\hbar$. Die QZ m läuft in ganzzahligen Schritten von -1 bis 1. $\rightarrow m = -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3$. Die 7 möglichen Vektoren sind in Abbildung 1 zu sehen. Jeder Vektor hat die Länge $2\sqrt{3}\hbar$ und die z-Komponenten sind $-3\hbar, -2\hbar, -1\hbar, 0, +1\hbar, +2\hbar, +3\hbar$, die Winkel zur z-Achse sind $150^\circ; 125,3^\circ; 106,8^\circ; 90^\circ; 73,2^\circ; 54,7^\circ; 30^\circ$

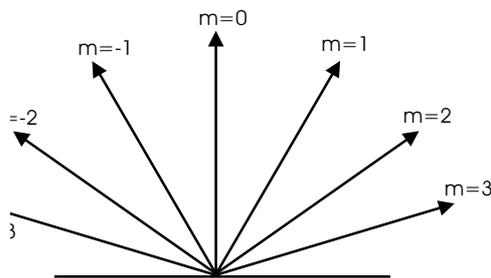


Abbildung 1: Vektordiagramm

3. QZ l läuft ganzzahlig von 0 bis $n-1$, somit kann $l = -2, -1, 0, +1, +2$ sein. Für $l = 0$ ist $m = 0$; für $l = 1$ ist $m = -1, 0, +1$; für $l = 2$ ist $m = -2, -1, 0, +1, +2$. Für jedes l gibt es genau $2l + 1$ m verschiedene Werte. Die

Anzahl der unterschiedlichen Kombinationen von m und l ist daher $[2 \cdot (0) + 1] + [2 \cdot (1) + 1] + [2 \cdot (2) + 1] = 9$. Die Anzahl der zugehörigen Elektronenzustände ist somit wegen des Spins gleich 18 (für $n = 3$).

Für $n = 4$ Elektronenzustände $2[[2 \cdot (0) + 1] + [2 \cdot (1) + 1] + [2 \cdot (2) + 1] + [2 \cdot (3) + 1]] = 32$.

4. Drehimpuls: $L = \Theta\omega = 3,49 \cdot 10^{-3} \text{kgm}^2/s$
 Quantenzahl: Mit $L = \sqrt{l(l+1)}\hbar$ erhalten wir $l = 3,31 \cdot 10^{31}$

5. Schrödingergleichung

(a) $\Psi(r) = ae^{-\frac{r}{r_1}}$

Radialteil der Schrödingergleichung:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}\right]R(r) = E \cdot R(r)$$

s-Zustand: $l = 0$:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}\right]ae^{-\frac{r}{r_1}} =$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{-1}{r_1}\right) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}\right]ae^{-\frac{r}{r_1}} =$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left[-\frac{2}{r} \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1^2}\right] - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}\right]ae^{-\frac{r}{r_1}} = E \cdot ae^{-\frac{r}{r_1}}$$

$$\left(\frac{\hbar^2}{m} \frac{1}{r_1} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right) + \left(\frac{\hbar^2}{2emr_1^2} - E\right)r = 0$$

$$E = -\frac{\hbar^2}{2mr_1^2} = \frac{me^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2\hbar^2} \text{ mit } r_1 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{e^2m}$$

- (b) $W(1)dr = |\Psi|^2 4\pi r^2 dr$ mit $4\pi r^2 =$ Fläche der Kugelschale mit Radius r

$$W(1)dr = 4\pi r^2 a^2 e^{-\frac{2r}{r_1}} dr$$

$$W(1) = 4\pi r^2 a^2 e^{-\frac{2r}{r_1}}$$

- (c) $\frac{dW(r)}{dr} = 0 \Rightarrow 2r - r^2 \frac{2}{r_1} = 0 \Rightarrow r = r_1$

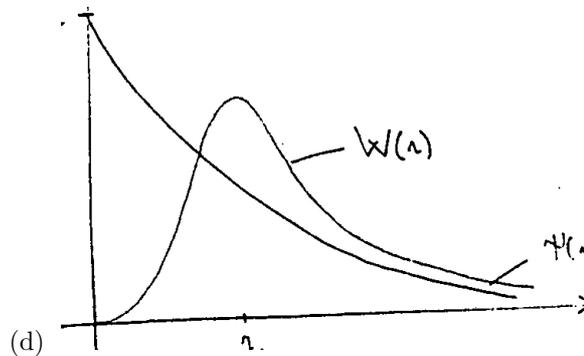


Abbildung 2: Funktionen