

Physik IV – Atome und Moleküle

Sommer 2002, Prof. Wim de Boer, Universität Karlsruhe

Übungsleiter: Frank Hartmann, Forschungszentrum Karlsruhe,
Tel.: 07247 82 6330; Email: Frank.Hartmann@cern.ch LÖSUNGEN Übung 9

1. Landé g-Faktor

- (a) z.B. $\mu_l = -g_l \mu_B \frac{\vec{l}}{\hbar}$, d.h. g-Faktoren sind immer Verhältnisse von magnetischem Moment und Drehimpuls.
- (b) $g_j = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)}$

- Eine Art der Herleitung ist im Haken-Wolf S217ff Kapitel 13.3.5; zum besseren Verständnis sollte jedoch auf $(\vec{\mu}_j)_j$ ein Lot in die Spitze $\vec{\mu}_l - \frac{1}{2}\vec{\mu}_s$ gefällt werden, dann erkennt man 3 rechtwinkelige Dreiecke, wobei 2 gleich sind, daher kommt der Faktor 2 im $|\mu_s|$ Term. Anstatt $|(\vec{\mu}_j)_j| = |\vec{\mu}_l| \cos(l, j) + |\vec{\mu}_s| \cos(s, j) = \dots$ sollte man schreiben: $|(\vec{\mu}_j)_j| = |\vec{\mu}_l| \cos(l, j) + 2 \times \frac{1}{2} |\vec{\mu}_s| \cos(s, j) = \dots$, der Cosinussatz wird dann im oberen Dreieck genutzt
- Herleitung zum aufgeführten Bild:
Hier ist das Zusammenspiel von Spin \vec{s} und Bahndrehimpuls \vec{l} zum Gesamtdrehimpuls $\vec{j} = \vec{s} + \vec{l}$ als Vektorgerüst im \vec{B} Feld gezeigt. Der Bahndrehimpuls des Elektrons \vec{l} koppelt mit seinem Spin \vec{s} über die entsprechenden magnetischen Momente zum Gesamtdrehimpuls $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$. $\vec{\mu}_l$ bzw. $\vec{\mu}_s$ sind wegen der negativen Ladung des Elektrons \vec{l} und \vec{s} entgegengesetzt. \vec{l} und \vec{s} präzedieren gemeinsam mit ω_{ls} um \vec{j} . $\vec{\mu}_j = \vec{\mu}_l + \vec{\mu}_s$ weist nicht entgegengesetzt zu \vec{j} , sondern bildet einen Winkel mit der \vec{j} -Achse. $\vec{\mu}_j$ kreiselt daher mit der gleichen Frequenz um \vec{j} wie \vec{l} und \vec{s} . Ein angelegtes B-Feld (erheblich schwächer als das innere Feld (Erhaltung der Spin-Bahnkopplung)) $\rightarrow \vec{j}$ präzediert um die Feldrichtung mit der viel kleineren Larmor-Frequenz ω_j . Vom Gesamtmagnetischen Moment $\vec{\mu}_j$ wird bei der Wechselwirkung mit \vec{B} nur die auf \vec{j} projizierte Komponente $(\vec{\mu}_j)_j$ wirksam. Die Komponente $(\vec{\mu}_j)_{\text{senkrecht}}$ zu \vec{j} mittelt sich durch die schnelle Präzession heraus. Das äussere Magnetfeld ist im Prinzip noch so lange als schwach anzusehen, wie die Kopplung von \vec{l} und \vec{s} zu \vec{j} erhalten bleibt.

Die Wechselwirkung lautet demnach:

$E = -(\vec{\mu}_j)_j \vec{B}$, $(\vec{\mu}_j)_j =$ Komponenten von $\vec{\mu}_j$ in \vec{j} -Richtung
 $(\vec{\mu}_j)_j$ setzt sich aus den entsprechenden Komponenten von $\vec{\mu}_l$ und $\vec{\mu}_s$ zusammen

$$(\vec{\mu}_j)_j = \frac{\vec{\mu}_l \cdot \vec{j}}{|\vec{j}|} + \frac{\vec{\mu}_s \cdot \vec{j}}{|\vec{j}|},$$

$$(\vec{\mu}_j)_j |\vec{j}|^2 = (\vec{\mu}_s \cdot \vec{j}) \vec{j} + (\vec{\mu}_l \cdot \vec{j}) \vec{j} = -\frac{\mu_B}{\hbar} (\vec{l} \cdot \vec{j} + 2\vec{s} \cdot \vec{j}) \vec{j}.$$

Mit $\vec{\mu}_l = -\frac{e}{2M_e} \vec{l}$ und $\vec{\mu}_s = -\frac{e}{2M_e} \vec{s}$

$$\vec{\mu}_l = -\frac{\beta}{\hbar} \vec{l}, \vec{\mu}_s = -g_s \frac{\beta}{\hbar} \vec{s} \text{ mit } g_s = 2$$

Wegen $2\vec{l} \cdot \vec{j} = \vec{j}^2 + \vec{l}^2 - \vec{s}^2$ und $2\vec{s} \cdot \vec{j} = \vec{j}^2 + \vec{s}^2 - \vec{l}^2$

$$\text{können wir schreiben } (\vec{\mu}_j)_j |\vec{j}|^2 = -\frac{\beta}{\hbar} \frac{1}{2} (3\vec{j}^2 - \vec{l}^2 + \vec{s}^2) \vec{j}$$

Legen wir für die Verknüpfungen von $(\vec{\mu}_j)_j$ mit \vec{j} den gleichen Zusammenhang wie bei Bahndrehimpuls und Spin zugrunde

$$(\vec{\mu}_j)_j = -g_j \frac{\beta}{\hbar} \vec{j} \text{ mit } g_j \text{ g-Faktor des Gesamtdrehimpulses, dann ist}$$

$$-g_j \frac{\beta}{\hbar} \vec{j} |\vec{j}|^2 = -\frac{\beta}{\hbar} (3\vec{j}^2 - \vec{l}^2 - \vec{s}^2) \vec{j}$$

Quantisierung: $j^2 \rightarrow j(j+1)\hbar^2$, $\vec{l}^2 \rightarrow l(l+1)\hbar^2$, $\vec{s}^2 \rightarrow s(s+1)\hbar^2$.

Daher ist der g-Faktor:

$$g_j = \frac{3j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)}{2j(j+1)} = 1 + \frac{j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)}{2j(j+1)}$$

(c) $p_{1/2} : l=1, j=1/2; s=1/2 \rightarrow g_j^I = 2/3 \rightarrow \Delta E_{m_j, m_{j-1}}^I = \frac{2\mu_B}{3} |\vec{B}|$

$s_{1/2} : l=0, j=1/2; s=1/2 \rightarrow g_j^{II} = 2 \rightarrow \Delta E_{m_j, m_{j-1}}^{II} = 2\mu_B |\vec{B}|$

Aufspaltung der Zeemann Komponente

Ein bekanntes in der Vorlesung vorgestelltes Beispiel ist die Na D-Linie!

Übergänge $2p_{1/2} \rightarrow 2s_{1/2} : 4; 2p_{3/2} \rightarrow 2s_{1/2} : 6$

2. Spin-Bahn Kopplung

(a) Eigenwerte: $|\vec{j}| = \sqrt{j(j+1)}\hbar$

$$|\vec{s}| = \sqrt{s(s+1)}\hbar$$

$$|\vec{l}| = \sqrt{l(l+1)}\hbar$$

aus $j^2 = l^2 + 2ls + s^2$ folgt:

$$E_{ls} = \frac{\langle j^2 \rangle - \langle l^2 \rangle - \langle s^2 \rangle}{n^3 l(l+\frac{1}{2})(l+1)} \sim \frac{j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}}{n^3 l(l+\frac{1}{2})(l+1)}$$

$$\text{Für } j = l + \frac{1}{2} : E_{ls}^I = \frac{\alpha^2 mc^2}{4} \frac{l^2 + 2l + \frac{3}{4} - l^2 - l - \frac{3}{4}}{n^3 l(l+\frac{1}{2})(l+1)} = -\frac{\alpha^2 mc^2}{4} \frac{1}{n^3 (l+\frac{1}{2})(l+1)}$$

$$\text{Für } j = l - \frac{1}{2} : E_{ls}^{II} = \frac{\alpha^2 mc^2}{4} \frac{l^2 - \frac{1}{4} - l^2 - l - \frac{3}{4}}{n^3 l(l+\frac{1}{2})(l+1)} = -\frac{\alpha^2 mc^2}{4} \frac{1}{n^3 l(l+\frac{1}{2})}$$

(b) Mit $\alpha = \frac{1}{137}$, $mc^2 = 0.5 MeV$, $\frac{1}{\lambda} = \frac{E}{ch} = \frac{1[in eV]}{1234 \times 10^{-9} \times 100 cm}$
 $\rightarrow \frac{\alpha^4 mc^2}{4} = 3.55 \times 10^{-4} eV = 2.88 \frac{1}{cm}$

| n | 1,2,3 | 2 | 3 | 3 |
|---------------|-------|--|--|---|
| l | 0 | 1 | 1 | 2 |
| E_{ls}^I | - | $1.5 \times 10^{-5} eV = 0.12 \frac{1}{cm}$ | $4.4 \times 10^{-6} eV = 0.04 \frac{1}{cm}$ | $1.8 \times 10^{-6} eV = 0.01 \frac{1}{cm}$ |
| E_{ls}^{II} | - | $-3.0 \times 10^{-5} eV = 0.24 \frac{1}{cm}$ | $-8.8 \times 10^{-6} eV = 0.07 \frac{1}{cm}$ | $-2.6 \times 10^{-6} eV = -0.02 \frac{1}{cm}$ |

Beobachtung mit konventionell spektroskopischen Mitteln bei Wellenzahlen $< \frac{1}{cm}$ scheitern an der Dopplerverbreiterung. Nur Alkaliatome, nicht Erdalkaliatome haben ein Elektron in der nicht-abgeschlossenen äusseren Schale. Wegen $E_{ls} \sim Z^4$ ist selbst bei Lithium die Aufspaltung ca. ein Faktor ≈ 100 (3^4) grösser, und ist deshalb mit konv. Methoden messbar.

(c) Für $l=0$ misst man nur den Spinnmagnetismus \rightarrow keine Spin-Bahn Kopplung.

$$E_n = -\frac{13.6 eV}{n^2}; \text{ keine l-Entartung; keine j-Entartung}$$

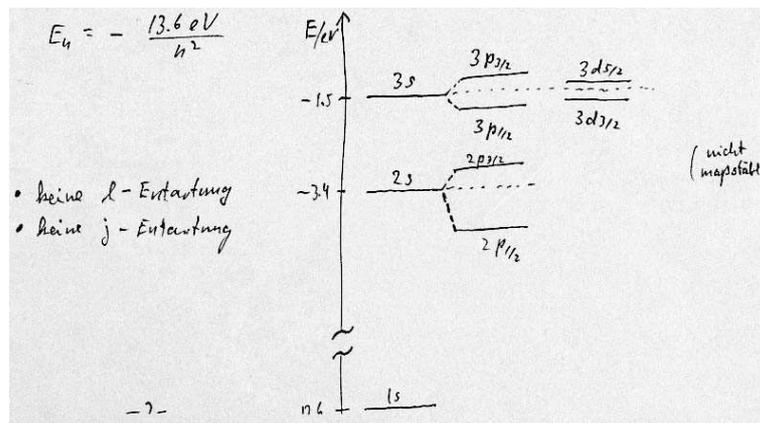


Abbildung 1: Termschema.