

Blatt 2

Aufgabe 5:

a) Lorentz Kraft: $\vec{F}_L = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$
Kreisbahn: $|\vec{F}_L| = |\vec{F}_Z|$

$$\Rightarrow q v B = m \frac{v^2}{r}$$

$$q = \frac{m v}{B r} \quad (1)$$

Weiter gilt: $\lambda = \frac{h}{m v} \Leftrightarrow m v = \frac{h}{\lambda} \quad (2)$

$$(2) \text{ in } (1): q = \frac{h}{\lambda B r} \approx 3,2 \cdot 10^{-19} \text{ C} \approx 2e$$
$$\Rightarrow n = 2$$

b) Ablenkung der α -Teilchen im $\vec{B}$ -Feld (analog a))
z. Beispiel: Blasen- oder Nebelkammer.

c) α -Teilchen: 4 H_2 -Kern

$$m_\alpha = 4 \frac{g}{\text{mol}} / (6,022 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}}) = 6,64 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{2 E_{\text{kin}}}{m}}$$

$$\frac{v}{c} = \sqrt{\frac{2 E_{\text{kin}}}{m c^2}} = 0,057$$

$\Rightarrow v \ll c$; klassische Rechnung gerechtfertigt

[relativistische Alternative: $E_{\text{kin}} = E - E_0 = m c^2 - m_0 c^2$
 $= m_0 c^2 \gamma - m_0 c^2 = m_0 c^2 (\gamma - 1)$

mit $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$; Einsetzen der Zahlenwerte $\Rightarrow (\gamma - 1) = 1,6 \cdot 10^{-3}$
 $\Rightarrow$ klassische Rechnung erlaubt!]

d) Nach Vorlesung: minimal möglicher Abstand bei Rückstreuung nach zentralen Stoß.

$$E_{kin} = E_{pot} = E_{Coulomb} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 \cdot e \cdot Z \cdot e}{r_{min}} \quad \leftarrow \text{Protonen}$$

$$\Rightarrow r_{min} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{E_{kin}}$$

$$r_{min} (1 \text{ MeV}) = 0,114 \text{ pm}$$

$$r_{min} (7,2 \text{ MeV}) = 0,015 \text{ pm}$$

$$r_{min} (20 \text{ MeV}) = 0,0057 \text{ pm}.$$

Aufgabe 6)

Rutherford - Streuformel (s. Vorlesung):

$$\dot{Z}(\vartheta) = \frac{n_0 \cdot \frac{N}{V} d (Ze^2)^2}{(8\pi\epsilon_0)^2 E_{kin}^2 r_D^2 \sin^4(\frac{\vartheta}{2})} \Delta A_D$$

Strahlintensität $n_0 = 10^6 \frac{\text{Teilchen}}{\text{s}}$

Zierrückdicke $d = 20 \mu\text{m}$

Protonenzahl $Z = 29$ (Kupfer)

$E_{kin} = 5 \text{ MeV}$

Detektorabstand: $r_D = 0,5 \text{ m}$

Detektorfläche: $\Delta A_D = 0,0025 \text{ m}^2$

$$\frac{N}{V} = \frac{\rho}{A_{mN}} = \frac{9 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}{(29 \cdot \underbrace{1,6726}_{\text{Proton}} + 34 \cdot \underbrace{1,6748}_{\text{Neutron}}) \cdot 10^{-27} \text{ kg}} = 8,53 \cdot 10^{28} \frac{1}{\text{m}^3}$$

$$\dot{Z}(\vartheta) = 0,297 \frac{1}{\text{s}} \frac{1}{\sin^4(\frac{\vartheta}{2})}$$

$$\Delta t = \frac{1000}{\dot{Z}(\vartheta)} = 56 \text{ min} \sin^4(\frac{\vartheta}{2})$$

ϑ	Δt
10°	$0,19 \text{ s}$
45°	$1,2 \text{ min}$
90°	14 min
180°	56 min

Aufgabe 7

a) $v = \text{const.}$

$\Rightarrow$ keine Beschleunigung: $F_G = F_A + F_R$
 $\swarrow$ Stoke'sche Reibung

$$F_G = m \cdot g = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_{\text{öl}} \cdot g$$

$$F_A = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_{\text{Luft}} \cdot g$$

$$F_R = 6\pi \eta r v$$

$$\Rightarrow \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_{\text{öl}} \cdot g = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_{\text{Luft}} \cdot g + 6\pi \eta r v$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{\frac{g \eta v}{2g(\rho_{\text{öl}} - \rho_{\text{Luft}})}} = 1,6 \mu\text{m}$$

also: $m = g \frac{4}{3} \pi r^3 = 1,37 \cdot 10^{-14} \text{ kg}$

b) mit $\vec{E} = F_{\text{el}}/d$:

Kräftebilanz: $F_{\text{el}} + F_A = F_G + F_R$

$$\Rightarrow E \cdot q + V \rho_{\text{Luft}} \cdot g = mg + 6\pi \eta r v$$

$$q = \frac{(m - V \cdot \rho_{\text{Luft}}) \cdot g}{E} + \frac{6\pi \eta r v}{E}$$

$t [\text{s}]$	$q [\text{C}]$	über geringste Differenz gestellte Anzahl e	$e [10^{-19} \text{C}]$
36,1	$9,756 \cdot 10^{-19}$	6	1,626
11,5	$1,623 \cdot 10^{-18}$	10	1,623
17,4	$1,301 \cdot 10^{-18}$	8	1,626
7,55	$2,115 \cdot 10^{-18}$	13	1,627
23,9	$1,137 \cdot 10^{-18}$	7	1,616
			$\Rightarrow 1,624 \cdot 10^{-19} \text{C}$

Aufgabe 8:

a) Balmer : $n=2$ (sichtbar $\Rightarrow$ zuerst entdeckt)

Brackett : $n=4$

Lyman : $n=1$

Paschen : $n=3$

Pfund : $n=5$

Wasserstoff : $E_{\text{Bindung}} = 13,6 \text{ eV}$ ($n=1$)

b) Bohr'sches Atommodell: $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{m e^2}{r} = (m v)^2 \quad (*)$

und: $m v r = \frac{n h}{2\pi} \quad (L = n h) \quad (**)$

$\Leftrightarrow (m v)^2 (2\pi)^2 r^2 = (n h)^2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{m e^2}{r} (2\pi)^2 r^2 = (n h)^2$
 $\uparrow$
 $(*)$

$\Rightarrow r_n = \frac{n^2 h^2 4\pi\epsilon_0}{(2\pi)^2 m e^2} = n^2 h^2 \frac{4\pi\epsilon_0}{m e^2}$

$r_n = n^2 \cdot 0,53 \text{ \AA} = n^2 a_0$; mit $a_0 = \frac{h^2 4\pi\epsilon_0}{m e^2} \quad (***)$

$E_n = E_{\text{Pot}} + E_{\text{kin}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n} + \frac{1}{2} m v_n^2$

$v_n \underset{(**)}{=} \frac{n h}{m r_n} = \frac{h}{m n a_0}$

$E_n = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{n^2 a_0} + \frac{1}{2} \frac{h^2}{m n^2 a_0^2}$ aus $(***)$: $\frac{m a_0}{h^2} = \frac{4\pi\epsilon_0}{e^2}$

$= -\frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0} \right) \frac{1}{n^2} = -2,18 \cdot 10^{-18} \text{ J} \cdot \frac{1}{n^2} = -13,6 \text{ eV} \frac{1}{n^2}$

n	r_n	E_n
1	$0,53 \text{ \AA}$	$-13,6 \text{ eV}$
2	$2,12 \text{ \AA}$	$-3,4 \text{ eV}$
3	$4,77 \text{ \AA}$	$-1,5 \text{ eV}$

$$c) \quad m_{\mu} = 207 m_e = \frac{1}{9} m_p \quad ; \quad m_p = 1836 m_e$$

→ Mitbewegung des Kerns berücksichtigen;

→ reduzierte Masse

$$m^* = \frac{207 m_e \cdot m_p}{207 m_e + m_p} = 186 m_e$$

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{e^2 m_e} n^2 = a_0 n^2 \quad (\text{aus b)})$$

$$r_n^{\mu} = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{e^2 m^*} n^2 = a_0 \frac{m_e}{m^*} n^2 = a_0 \frac{n^2}{186}$$

$$r_1^{\mu} = 2,84 \cdot 10^{-3} \text{ \AA}$$

$$r_2^{\mu} = 1,14 \cdot 10^{-2} \text{ \AA}$$

$$E_n^{\mu} = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \frac{a_0}{186}} \frac{1}{n^2}$$

$$E_m^{\mu} - E_n^{\mu} = -13,6 \text{ eV} \cdot 186 \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

$$\Rightarrow E_2^{\mu} - E_1^{\mu} = -13,6 \text{ eV} \cdot 186 \left(\frac{1}{4} - 1 \right) = 7,90 \text{ keV}$$

$$d) \quad e^+ \rightarrow Z e^+$$

$$m_e \rightarrow m^* = \frac{207 m_e \cdot \overset{A(Ni)}{59} \cdot 1836 m_e}{207 m_e + 59 \cdot 1836 m_e} \approx m_{\mu}$$

$$\Rightarrow r_1^{\mu} = \hbar^2 \frac{4\pi\epsilon_0}{m_{\mu} Z e^2} = a_0 \frac{1}{Z \frac{m_{\mu}}{m_e}} = a_0 \frac{1}{28 \cdot 207} = 9,14 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

$$E_1^{\mu} = -13,6 \text{ eV} \cdot Z^2 \frac{m_{\mu}}{m_e} = -2,2 \text{ MeV}$$

$$(\text{Aus b)}) : E_n = -\frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0} \right) \frac{1}{n^2}$$

$$\rightarrow E_n^{\mu} = -\frac{1}{2} \left(\frac{Z^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0 \left(\frac{m_e}{m_{\mu} Z} \right)} \right) \frac{1}{n^2}$$