Elmar Dormann / David Saez de Jauregui / Jens Schnelzer
Ausgabe am 15.05.07, Übung am 22.05.07

Aufgabe 13

a) Geben Sie alle l und m Quantenzahlen für das Wasserstoffatom in den Zuständen mit den Hauptquantenzahlen n = 5 und 6 an.

b) Berechnen Sie die Nullstellen der radialen Wellenfunktion $R_{n,l}(r)$ des Wasserstoffatoms für n = 1 und 2, und skizzieren Sie $R_{n,l}(r)$.

c) Welche Bedeutung hat das Integral $\int_r^{r+\Delta r} r'^2 R_{n,l}^2(r')dr'$? Berechnen Sie für n = 1 $\int_0^\infty r^2 R_{n,l}^2(r)dr$.

d) Berechnen Sie die Extrema von $r^2 R_{n,l}^2(r)$ für n = 1 und 2, und skizzieren Sie $r^2 R_{n,l}^2(r)$. Stellen Sie einen Vergleich mit dem Bohrschen Atommodell an.

e) Wie groß ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines 1s, 2s und 3s Elektrons innerhalb des Atomkerns des Titans? Rechnen Sie mit der Kernladungszahl Z = 22, vernachlässigen Sie Abschirmeffekte und verwenden Sie $r_K = 4{,}7\cdot10^{-15}$ m als Kernradius.Zeigen Sie, dass Sie für $r \le r_K$ die Variation des Radialanteils vernachlässigen können, d.h. nehmen Sie an: $R_{n,0}(r) = const. = R_{n,0}(0)$ für $r \le r_K$. Ferner sei $r_K \cdot Z/a_0 = 2\cdot10^{-3}$.

f) Skizzieren Sie für l = 2 in Polarkoordinaten die Winkelabhängigkeit der Wellenfunktionen des Wasserstoffatoms $\Psi_{n,l,m} = R_{n,l}(r)Y_{l,m}(\vartheta,\varphi)$ für $\varphi = 0$.

g) Bestimmen Sie mittels der Drehimpulsoperatoren L und L_Z die Quantenzahlen l und m der Wellenfunktion $\Psi = Ar^2 e^{\frac{-r}{3a_0}} \sin\vartheta \cos\vartheta e^{i\varphi}$. Welchen Wert hat die Hauptquantenzahl?

h) Berechnen Sie für den 1s Zustand von Wasserstoff die Erwartungswerte von $\langle \vec{r} \rangle$, $\langle r \rangle$ und $\langle r^2 \rangle$ in Einheiten von a_0.

Hinweise:

In Kugelkoordinaten gilt: $\vec{L}^2 = -\hbar^2 \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\Theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial}{\partial\Theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right)$

$$\int x^2 e^{ax} dx = e^{ax} \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right)$$

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx$$

Ein schönes Programm zur Visualisierung des Wasserstoffatoms finden Sie unter http://www.hydrogenlab.de/.