

Blatt 6

Aufgabe 20:

a) $g_j = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)} ; j = l + s$

$3 s_{1/2} : j = \frac{1}{2} ; l = 0 ; s = \frac{1}{2} \Rightarrow g = 2$

$3 p_{1/2} : j = \frac{1}{2} ; l = 1 ; s = \frac{1}{2} \Rightarrow g = \frac{2}{3}$

$3 p_{3/2} : j = \frac{3}{2} ; l = 1 ; s = \frac{1}{2} \Rightarrow g = \frac{4}{3}$

b) $3 p_{1/2} \rightarrow 3 s_{1/2} : \lambda_{p_{1/2}} = 5895,92 \text{ \AA} \Rightarrow \frac{1}{\lambda_{p_{1/2}}} = 16960,88 \text{ cm}^{-1}$

$3 p_{3/2} \rightarrow 3 s_{1/2} : \lambda_{p_{3/2}} = 5889,95 \text{ \AA} \Rightarrow \frac{1}{\lambda_{3/2}} = 16978,07 \text{ cm}^{-1}$

$$E_{Ze} = -\langle \mu_z \rangle B_z = + g_j m_j \mu_B B_z$$

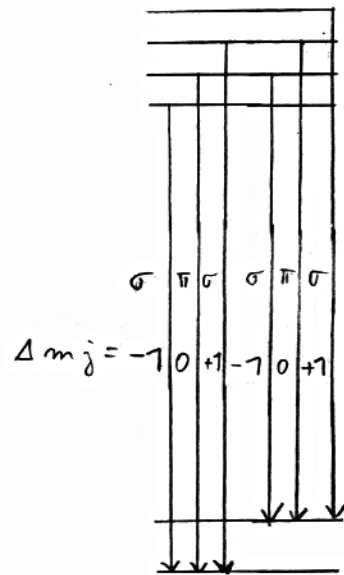
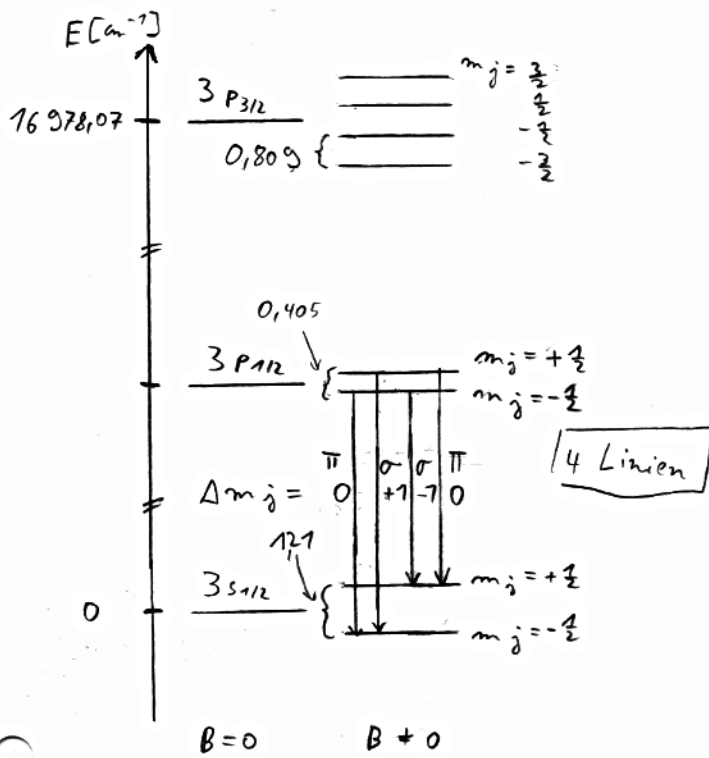
$$\Delta E_{Ze} = g_j \mu_B B_z ; (\Delta m_j = \pm 1)$$

in Wellenzahlen $\frac{\mu_B B_z}{hc} = 0,607$ für $B_z = 7,3 \text{ T}$ ergibt sich:

$$\Delta E_{p_{1/2}} = \frac{2}{3} \cdot 0,607 \text{ cm}^{-1} = 0,405 \text{ cm}^{-1}$$

$$\Delta E_{3/2} = \frac{4}{3} \cdot 0,607 \text{ cm}^{-1} = 0,809 \text{ cm}^{-1}$$

$$\Delta E_{s_{1/2}} = 2 \cdot 0,607 \text{ cm}^{-1} = 1,21 \text{ cm}^{-1}$$



6 Linien

Bezeichnung: $\Delta m_j = 0 \Rightarrow \pi$
 $\Delta m_j = \pm 1 \Rightarrow \sigma$

c) Übergang: $3P_{1/2} \rightarrow 3S_{1/2}$

$$\Delta E = \underbrace{E_{P_{1/2}} + \frac{2}{3} \mu_B B m_j}_{\text{obere Niveaus}} - \underbrace{(E_{S_{1/2}} + 2 \mu_B B m_j')}_{\text{untere Niveaus}} = m_s$$

$$= \underbrace{\Delta E_{P_{1/2}}}_{= 16960,88 \text{ cm}^{-1}} + \underbrace{0,409 \text{ cm}^{-1} m_j - 1,27 \text{ cm}^{-1} m_j'}_{\Delta E^*}$$

m_j	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$
m_j'	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$
$\Delta E [\text{cm}^{-1}]$	0,403	-0,808	+0,808	-0,403
Δm_j	0	-1	+1	0

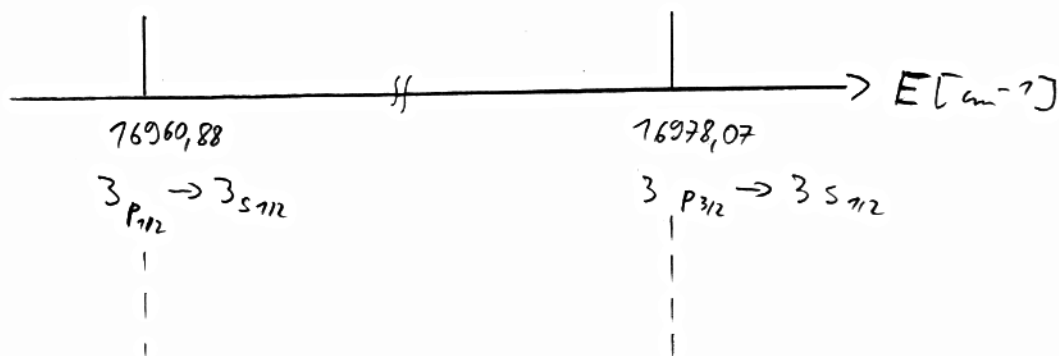
Übergänge $3P_{3/2} \rightarrow 3S_{1/2}$

$$\Delta E = E_{P_{3/2}} + \frac{4}{3} \mu_B B m_j - (E_{S_{1/2}} + 2 \mu_B B \underbrace{m_j}_{=m_s})$$

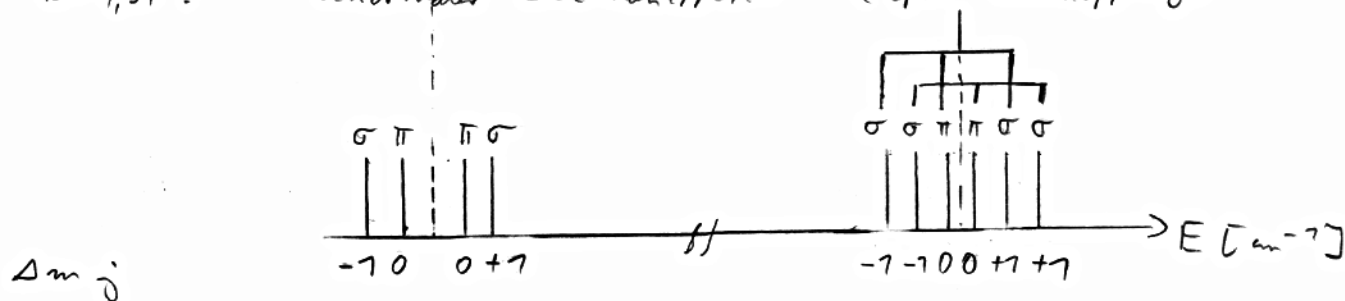
$$= \underbrace{\Delta E_{P_{3/2}}}_{16978,07 \text{ cm}^{-1}} + \underbrace{0,809 \text{ cm}^{-1} m_j - 1,27 \text{ cm}^{-1} m_j'}_{\Delta E^*}$$

m_j	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
m_j'	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\Delta E^* [\text{cm}^{-1}]$	0,609	-0,207	-1,07	+1,07	+0,207	-0,609
Δm_j	+1	0	-1	+1	0	-1

$B=0$: Aufspaltung aufgrund Spin-Bahn-Kopplung



$B=1,3 \text{ T}$: anomaler Zeemaneffekt (Spin-Bahnkopplung)



d) starkes äußeres Magnetfeld: Paschen - Back - Effekt

$\Rightarrow$ l-s-Kopplung aufgehoben, da:

$$\underbrace{2 \langle \vec{l} \cdot \vec{s} \rangle}_{= E_{LS}} \ll \underbrace{\mu_B (\langle l_z \rangle + 2 \langle s_z \rangle) B}_{= E_{LS}^0 + E_{LB}}$$

$\Rightarrow$ Spinmagnetismus ($g=2$) und Bahnmagnetismus können getrennt berechnet werden. Auswahlregeln für optische Übergänge: $\Delta m_l = 0, \pm 1$; $\Delta m_s = 0$

$$E_{Ze} = -\langle \mu_B \rangle \cdot B_z$$

$$E_{P.B.} = 1 \cdot \mu_B B \frac{\langle l_z \rangle}{\hbar} + 2 \cdot \mu_B B \frac{\langle s_z \rangle}{\hbar} = \mu_B B (m_l + 2 m_s)$$

Keine Kopplung zu einem Gesamtdrehimpuls j ; also gilt $3p \rightarrow 3s$

3p: $l=1$, $s=\frac{1}{2}$

m_l	0	0	1	1	-1	-1
m_s	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{E_{P.B.}}{\mu_B}$	1	-1	2	0	0	-2

fallen zusammen; s. Termchema (Entartung)

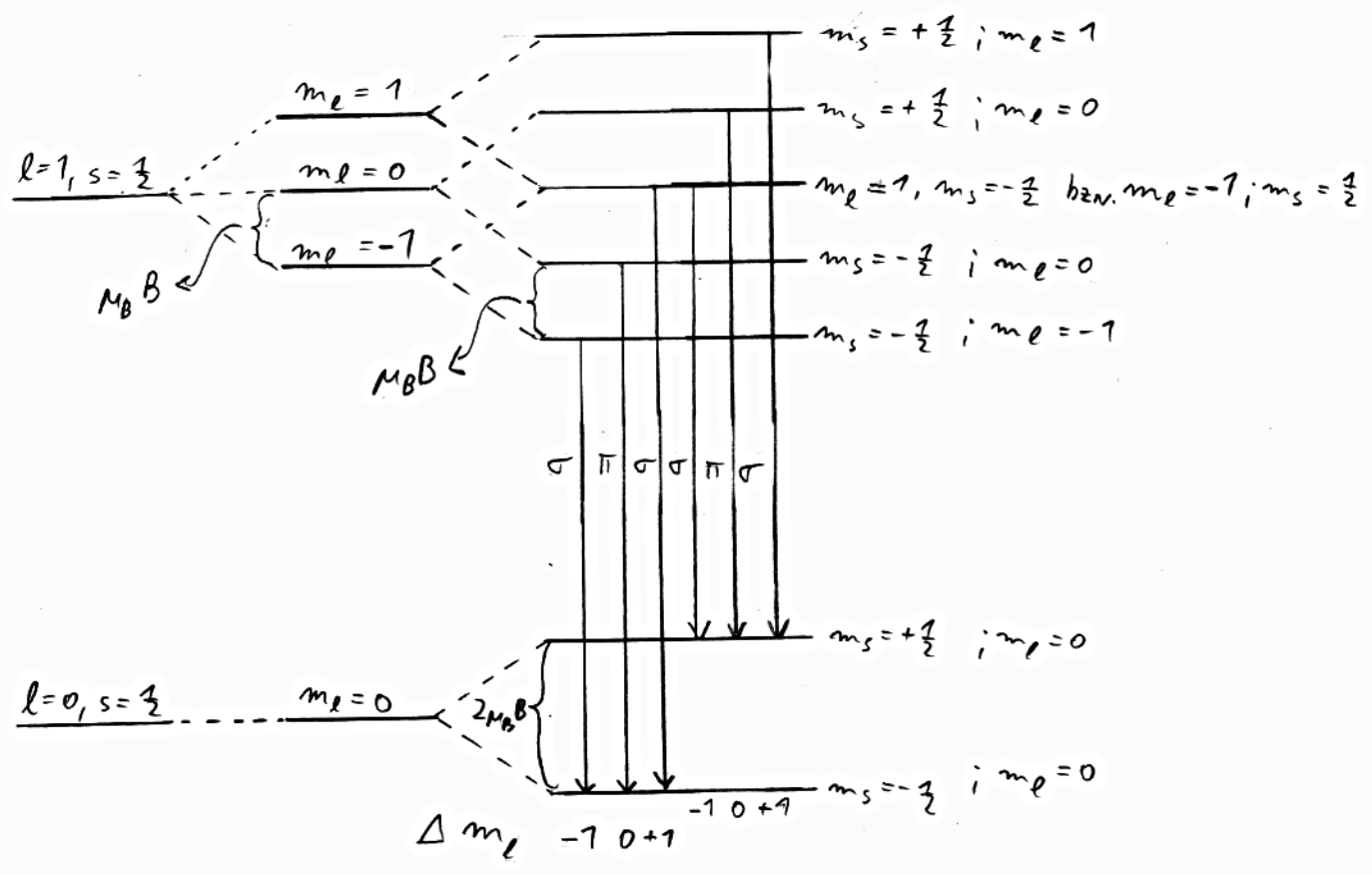
3s: $l=0$; $s=\frac{1}{2}$

m_l	0	0
m_s	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{E_{P.B.}}{\mu_B}$	1	-1

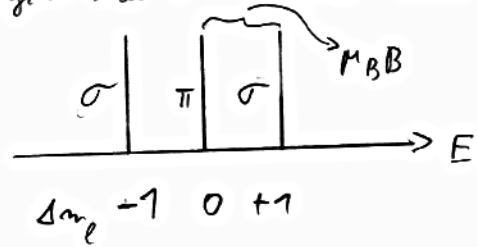
⌈ Beachte:

Auswahlregeln für optische Übergänge: $\Delta m_s = 0$

$\Delta m_l = 0, \pm 1$



Daraus ergibt sich: Paschen-Bach-Effekt: nur noch 3 Linien!



Aus $E_{LS} \ll E_{SB} \Rightarrow E_{LS} \ll \mu_B B$

$$E_{LS} = E_{P_{3/2}} - E_{P_{1/2}} = 16978,07 \text{ cm}^{-1} - 16960,88 \text{ cm}^{-1} = 17,19 \text{ cm}^{-1}$$

$$\mu_B B = 0,4665 \text{ cm}^{-1} \text{ T}^{-1} \cdot B \gg 17,19 \text{ cm}^{-1} = E_{LS}$$

$$\Rightarrow B \gg 36,7 \text{ T}$$

Aufgabe 21:

a) Kern-System: $I = \frac{3}{2}$

Elektron-System: $J = S = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow F = 0, 1$$

$\Rightarrow 2 \text{ Niveaus.}$

$$\begin{aligned} b) \quad W_{HF} &= A \langle \vec{J} \cdot \vec{I} \rangle = \frac{1}{2} A \langle \vec{F}^2 - \vec{J}^2 - \vec{I}^2 \rangle \\ &\quad \vec{F} = \vec{J} + \vec{I} \\ &\quad (\text{analog } \vec{L} \cdot \vec{S} \text{ bei Aufgabe 18 b}) \\ &= \frac{A}{2} \hbar^2 (F(F+1) - J(J+1) - I(I+1)) \end{aligned}$$

$$F=0: \quad W_{HF} = -\frac{3}{4} A \hbar^2$$

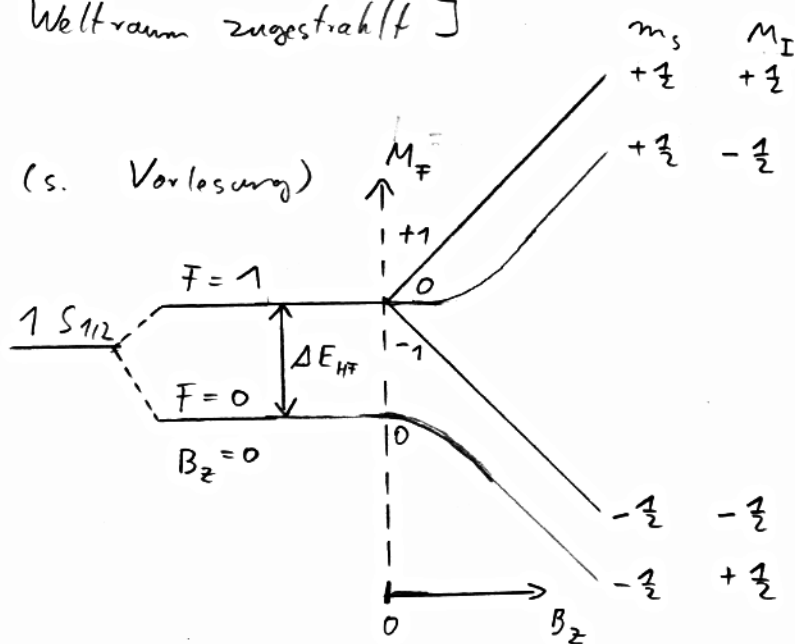
$$F=1: \quad W_{HF} = \frac{1}{4} A \hbar^2$$

$$\frac{\Delta E_{HF}}{\hbar} = \nu = \frac{A \hbar^2}{\hbar} = 1420,4 \text{ MHz}$$

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1420,4 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}} = 21 \text{ cm}$$

[Diese Wellenlänge wird der Erde vom atomaren ^1H aus dem Weltraum zugestrahlt]

c) (s. Vorlesung)



quadratische Zeeman-Effekt der Niveaus mit $M_F = 0$

$$d) \quad \langle H_{Ze} \rangle = \langle - \vec{\mu}_F \vec{B} \rangle \quad ; \quad \text{mit } \langle \mu_{F,z} \rangle = (-\frac{1}{2} g_s \mu_B + \frac{1}{2} g_I \mu_N) M_F$$

$$\Rightarrow \quad \langle H_{Ze} \rangle = \frac{1}{2} (g_s \mu_B - g_I \mu_N) M_F B$$

$$g_s = 2,00232$$

$$\mu_N = \frac{1}{1836} \mu_B$$

$$g_I = 2 \cdot 2,7927$$

$$\langle H_{Ze} \rangle = 0,99964 \mu_B M_F B \quad ; \quad M_F = (0), \pm 1 \quad ; \quad B = 4 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

$$\Delta \nu = \frac{\langle H_{Ze} \rangle}{h}$$

$$\Delta \nu = 559,66 \text{ kHz}$$