Physik IV – Atome und Moleküle; Sommer 2009
Prof. Thomas Müller, Universität Karlsruhe
Dr. Frank Hartmann, Universität Karlsruhe

Aufgabenblatt 5; Übung am 02. bzw. 04. Juni (Dienstag/Donnerstag)

LÖSUNGEN Übung 5

1. Ist eines der beiden Elektronen entfernt, so benötigt man die Energie $Z^2 E_i$, wobei $E_I = 13.6eV$ die Ionisierungsenergie des H-Atoms ist. Für He (Z=2) ergibt dies 54.4eV. Die Differenz zu 79eV (24.6eV), ist dann die Ionisierungsenergie des ersten Elektrons.

2. De Broglie Wellenlänge $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \sqrt{\frac{h^2}{m^2 < v^2 >}} = \frac{h}{\sqrt{3mkT}}$
$< E >= 1/2m < v^2 >= 3/2kT$
$\Rightarrow m = \frac{3kT}{< v^2 >} = \frac{3 \times 1.38 \times -23 \times 320}{499^2} kg = 5.32 \times 10^{-26} kg \cong 31.9u$, d.h. das Gas ist O_2^{16}
$\lambda = \frac{h}{\sqrt{3mkT}} = \frac{6.6 \times 10^{-34}}{\sqrt{3 \times 1.38 \times 10^{-23} \times 320 5.32 \times 10^{-26}}} = 2.5^{-11} m = 0.25 \mathring{A}$

3. Welle-Teilchen-Dualismus

   (a) Damit Beugung auftritt, müssen beugende Öffnung und Wellenlänge vergleichbar groß sein. Der Wert ist hier $d \approx \lambda = h/(mv) = 1.66 \times 10^{-33} m$. Der Durchmesser des Atomkerns beiträgt ca. $10^{-15} m$, also 18 Größenordnungen über der berechneten Abmessung. Demnach kann es keinen Körper der Masse 4g geben, der an dieser Öffnung gebeugt wird.

   (b) Die Geschwindigkeit eines Neutrons der Energie 10MeV beträgt $v = \sqrt{2E_{kin}/m} = 4.37 \times 10^7 m/s$. Daraus folgt die De Broglie Wellenlänge zu $\lambda = h/(mv) = 9.05 \times 10^{-15} m$. Damit solch ein Neutron Beugung erfährt, muss die Abmessung des Objektes in der Größenordnung dieser Wellenlänge liegen; es kann beispielsweise ein Atomkern sein.

   (c) Ein Elektron mit 200 eV besitzt die Geschwindigkeit $v = \sqrt{2E/m} \rightarrow$ De Broglie Wellenlänge $\lambda = h/(mv) = h/\sqrt{2E/m} = 8.68 \times 10^{-11} m$, d.h. 0,1nm (Gitter).

4. $\phi = Nxe^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$ sei die Wellenfunktion eines Teilchens

   (a) Unter Verwendung von $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a^{3/2}}$ für $a > 0$ erhält man für die Normierung $N^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} dx = N^2 \sqrt{\pi} \sigma^3 = 1 \rightarrow N = \frac{1}{\pi^{1/4} \sigma^{3/2}}$

   (b) Die Wahrscheinlichkeitsdichte für den Ort x beträgt:
   $|\phi(x)|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sigma^3} x^2 e^{\frac{-x^2}{\sigma^2}}$

Die Extremwerte liegen bei $\frac{d}{dx}|\phi(x)|^2 = 0$. Das liefert ein Minimum bei x=0 und Maxima bei $x = \pm\sigma$. Der Mittelwert des Teilchenorts ist:
$< x >= \int_{-\infty}^{+\infty} x|\phi(x)|^2 dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma^3} \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{\frac{-x^2}{\sigma^2}} dx = 0$ (ungerade Funktion von $-\infty$ bis $+\infty$).

5. Heisenberg'sche Unschärferelation
   Orts-/Impulsunschärfe: $\Delta x \times \Delta p \sim \hbar$ mit $2 \times r_K = \Delta x$ und $\Delta E = c \times \Delta p$ folgt: $\Delta E \sim \frac{\hbar c}{2r_K} \rightarrow \Delta \sim \frac{10^{-34} \times 3 \times 10^8}{2 \times 1.3 \times 10^{-15} \sqrt[3]{A}} = \frac{72}{\sqrt[3]{A}} [MeV]$
   D.h. selbst für schwere Kerne ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Elektron mit derart hoher kinetischer Energie im Atomkern gebunden ist, unwahrscheinlich. (Im vgl. zu den üblichen 8MeV für Nukleonen.)