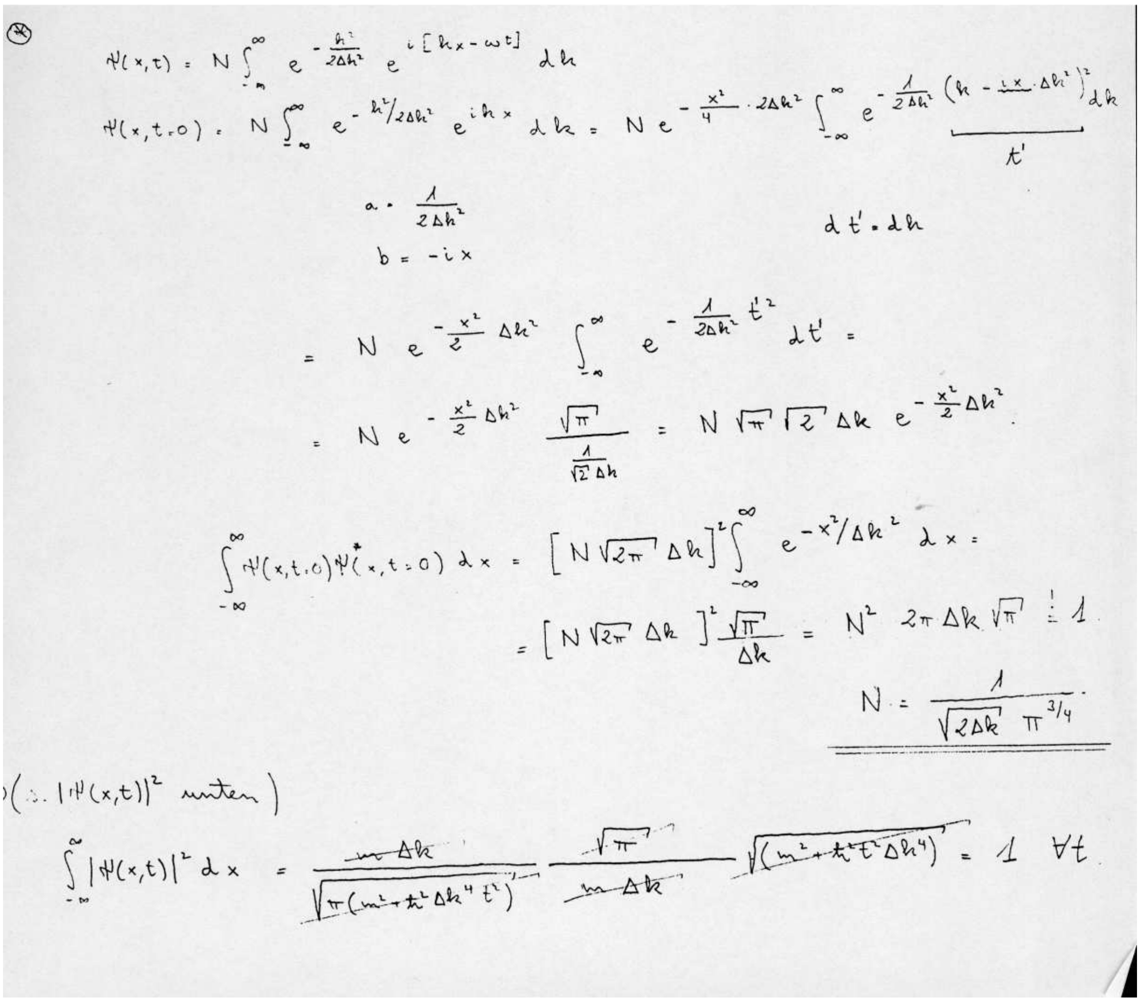
Physik IV – Atome und Moleküle; Sommer 2009
Prof. Thomas Müller, Universität Karlsruhe
Dr. Frank Hartmann, Universität Karlsruhe

Aufgabenblatt 6; Übung am 09. bzw. 11. Juni (Dienstag/Donnerstag)

LÖSUNGEN Übung 6

1. Lösung zur auseinanderfliessenden Welle



(*)

$$\Psi(x,t) = N \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{k^2}{2\Delta k^2}} e^{i[kx-\omega t]}\, dk$$

$$\Psi(x,t=0) = N \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2/2\Delta k^2} e^{ikx}\, dk = N e^{-\frac{x^2}{4}\cdot 2\Delta k^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\Delta k^2}\underbrace{(k - ix\cdot\Delta k^2)}_{t'}{}^2} dk$$

$$a = \frac{1}{2\Delta k^2} \qquad dt' = dk$$

$$b = -ix$$

$$= N e^{-\frac{x^2}{2}\Delta k^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\Delta k^2}t'^2}\, dt' =$$

$$= N e^{-\frac{x^2}{2}\Delta k^2} \frac{\sqrt{\pi}}{\frac{1}{\sqrt{2}\Delta k}} = N\sqrt{\pi}\sqrt{2}\,\Delta k\, e^{-\frac{x^2}{2}\Delta k^2}.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x,t=0)\Psi^*(x,t=0)\, dx = \left[N\sqrt{2\pi}\,\Delta k\right]^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/\Delta k^2}\, dx =$$

$$= \left[N\sqrt{2\pi}\,\Delta k\right]^2 \frac{\sqrt{\pi}}{\Delta k} = N^2\, 2\pi\,\Delta k\,\sqrt{\pi} \overset{!}{=} 1.$$

$$\boxed{N = \frac{1}{\sqrt{2\Delta k}\,\pi^{3/4}}}$$

(s. $|\Psi(x,t)|^2$ unten)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,t)|^2\, dx = \frac{\cancel{m\Delta k}}{\cancel{\sqrt{\pi(m^2+\hbar^2\Delta k^4 t^2)}}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{\pi}}}{\cancel{m\Delta k}} \cancel{\sqrt{(m^2+\hbar^2 t^2\Delta k^4)}} = 1 \quad \forall t$$

Abbildung 1: *Teil 1*

(*)

$$\psi(x,t) = N\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{k^2}{2\Delta k^2}}\, e^{i\left[kx - \frac{\hbar}{2m}k^2 t\right]}\, dk =$$

freies Teilchen: $E = \hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$

$\omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m}$.

$$= N\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{1}{2\Delta k^2} + i\frac{\hbar}{2m}t\right)k^2 + ikx}\, dk =$$

$a = \frac{1}{2\Delta k^2} + i\frac{\hbar}{2m}t$

$b = -ix$

$$= N e^{-\frac{x^2}{4}\frac{1}{\frac{1}{2\Delta k^2} + i\frac{\hbar}{2m}t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{1}{2\Delta k^2} + i\frac{\hbar}{2m}t\right)\left(\underbrace{k - \frac{ix}{2}\frac{1}{\frac{1}{2\Delta k^2} + i\frac{\hbar}{2m}t}}_{\xi}\right)^2} dk$$

$d\xi = dk$

$$= N e^{-\frac{x^2}{4}\frac{1}{\frac{1}{2\Delta k^2} + i\frac{\hbar}{2m}t}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\frac{1}{2\Delta k^2} + \frac{\hbar}{2m}t}} .$$

$$\frac{1}{2\Delta k^2} + i\frac{\hbar}{2m}t = \frac{2m + i\hbar\, 2\Delta k^2 t}{4m\Delta k^2} = \frac{m + i\hbar\Delta k^2 t}{2m\Delta k^2}$$

$$= \sqrt{\frac{\cancel{2}m\Delta k^{\cancel{2}}\pi}{m + i\hbar\Delta k^2 t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\cancel{2}\cancel{\Delta k}}\,\pi^{3/4}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4}\frac{2m\Delta k^2}{m + i\hbar\Delta k^2 t}}$$

$$\psi(x,t) = \sqrt{\frac{m\Delta k}{\sqrt{\pi}(m + i\hbar\Delta k^2 t)}} \cdot e^{-\frac{x^2 m\Delta k^2}{2(m + i\hbar\Delta k^2 t)}} .$$

$$|\psi(x,t)|^2 = \psi(x,t)\psi^*(x,t) = \frac{m\Delta k}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{1}{m^2 + \hbar^2\Delta k^4 t^2}} \cdot e^{-\frac{x^2 m\Delta k^2}{2}} \cdot e^{-\frac{x^2 m\Delta k^2}{2}\left[\frac{m - i\hbar\Delta k^2 t}{m^2 + \hbar^2\Delta k^4 t^2} + \frac{m + i\hbar\Delta k^2 t}{m^2 + \hbar^2\Delta k^4 t^2}\right]}$$

$(e^z)^* = e^{z^*}$

$$|\psi(x,t)|^2 = \frac{m\Delta k}{\sqrt{\pi(m^2 + \hbar^2\Delta k^4 t^2)}} \cdot e^{\frac{-x^2 m^2\Delta k^2}{m^2 + \hbar^2 t^2\Delta k^4}} .$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte ist zu jeder Zeit eine Gaußfunktion mit der Breite:

$$\Delta x(t) = \frac{\sqrt{m^2 + \hbar^2\Delta k^4 t^2}}{m\Delta k} .$$

↪ Wellenpaket wird breiter mit der Zeit

(*) Faktor $e^{-k^2/2(\Delta k)^2}$:
- Gauß-Funktion
- Gewichtung für ebene Welle $e^{i(kx - \omega(k)t)}$

Abbildung 2: *Teil 2*