

Aufgabenblatt 8; Lösungen (23.06 Dienstag/ 25.06. Donnerstag)

1.  $L = \sqrt{l(l+1)}\hbar$  für  $l=3$  ist der Betrag daher  $2\sqrt{3}\hbar$ . Die QZ  $m$  läuft in ganzzahligen Schritten von -1 bis 1.  $\rightarrow m = -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3$ . Die 7 möglichen Vektoren sind in Abbildung 1 zu sehen. Jeder Vektor hat die Länge  $2\sqrt{3}\hbar$  und die z-Komponenten sind  $-3\hbar, -2\hbar, -1\hbar, 0, +1\hbar, +2\hbar, +3\hbar$ , die Winkel zur z-Achse sind  $150^\circ; 125,3^\circ; 106,8^\circ; 90^\circ; 73,2^\circ; 54,7^\circ; 30^\circ$

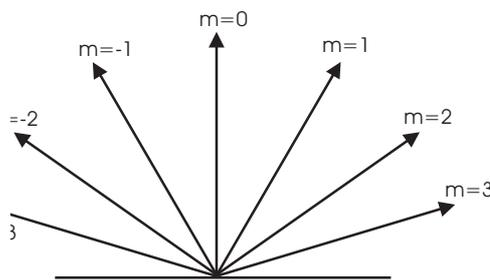


Abbildung 1: Vektordiagramm

2. QZ  $l$  läuft ganzzahlig von 0 bis  $n-1$ , somit kann  $l = -2, -1, 0, +1, +2$  sein. Für  $l = 0$  ist  $m = 0$ ; für  $l = 1$  ist  $m = -1, 0, +1$ ; für  $l = 2$  ist  $m = -2, -1, 0, +1, +2$ . Für jedes  $l$  gibt es genau  $2l + 1$   $m$  verschiedene Werte. Die Anzahl der unterschiedlichen Kombinationen von  $m$  und  $l$  ist daher  $[2 \cdot (0) + 1] + [2 \cdot (1) + 1] + [2 \cdot (2) + 1] = 9$ . Die Anzahl der zugehörigen Elektronenzustände ist somit wegen des Spins gleich 18 (für  $n = 3$ ).  
 Für  $n = 4$  Elektronenzustände  $2[[2 \cdot (0) + 1] + [2 \cdot (1) + 1] + [2 \cdot (2) + 1] + [2 \cdot (3) + 1]] = 32$ .
3. Drehimpuls:  $L = \Theta\omega = 3.49 \cdot 10^{-3} \text{kgm}^2/\text{s}$   
 Quantenzahl: Mit  $L = \sqrt{l(l+1)}\hbar$  erhalten wir  $l = 3.31 \cdot 10^{31}$
4. Einstein-de-Haas

- (a) magnetisches Moment des vom Elektron bedingten Kreisstroms:  $\vec{\mu} = I\vec{A}$   
 mit  $I = \frac{-e}{T} = \frac{-e\omega}{2\pi}$  und  $A = \pi r^2$  folgt:  $\vec{\mu} = -\frac{1}{2}e\omega r^2 \hat{l}_z$  mit  $\vec{l} = m\omega r^2 \hat{l}_z$   
 folgt:  $\vec{\mu} = -\frac{e}{2m}\vec{l}$
- (b) Ausrichtung der atomaren magnetischen Momente im Eisen  $\mu_{Fe}$  bedingt eine Änderung der atomaren Drehimpulse  $\vec{L}_{Atom} \rightarrow$  Zylinder dreht sich wegen Drehimpulserhaltung, also  $\vec{L}_{makro}$  entgegengesetzt

zu  $\vec{L}_{Atom} : \vec{L}_{makro} || - \vec{L}_{Atom}$

Da  $\vec{L}_{Atom} || - \vec{\mu}_{Fe}$  und  $\vec{\mu}_{Fe} || B$  folgt  $\vec{L}_{makro} || \vec{B}$  oder  $\vec{\omega} || \vec{B}$

Aus  $\vec{L} = \Theta_{Fe} \vec{\omega}$  folgt  $\vec{\omega} = \frac{2n_{Fe} \vec{L}_{makro}}{\Theta_{Fe}}$  (I) (2 wegen Umklappen) mit  $n_{Fe}$ : Anzahl der Eisenatome =  $\frac{M_{Fe}}{m_{Fe}} N_A$  und  $m_{Fe}$ : atomare Masse von Eisen

$$\rightarrow \omega = \frac{2N_A M_{Fe} L_{Atom}}{\Theta_{Fe} m_{Fe}} \quad (\text{II})$$

$$(c) \quad \gamma = \frac{|\vec{\mu}|}{|\vec{L}_{Atom}|} = \frac{|n_{Fe} \vec{\mu}|}{|n_{Fe} \vec{L}_{Atom}|} = \frac{|\vec{M}_{Fe}|}{|n_{Fe} \vec{L}_{Atom}|} = (\text{mit I}) = \frac{|\vec{M}_{Fe}|}{\Theta_{Fe} |\omega|}$$

mit  $\vec{M}$ : magnetisches Moment des Zylinders

(Achtung M: Masse;  $\vec{M}$ : magn. Moment)

$$(d) \quad \text{aus (II) folgt mit Annahme } L_{Atom} = \hbar \text{ und } \rho = \frac{M_{Fe}}{\pi r^2 L_{Zyl}} = \frac{M_{Fe}^2}{2\pi \Theta_{Fe} L_{Zyl}};$$

$L_{Zyl}$ : Länge des Zylinders.  $\Theta_{Fe} = \Theta_{Zyl} = \rho V \frac{r^2}{2}$

$$\rightarrow \omega = \frac{2N_A M_{Fe} \hbar}{\frac{M_{Fe}^2}{2\pi \Theta_{Fe} L_{Zyl}} \Theta_{Fe} m_{Fe}} = \frac{4\pi N_A \hbar \rho L_{Zyl}}{M_{Fe} m_{Fe}}$$

$$\rightarrow \omega = \frac{4\pi \times 6 \times 10^{23} \times 1.05 \times 10^{-34} \times 7.87 \times 10^3 \times 10^{-2}}{10^{-3} \times 55.8} = 1.1 \times 10^{-6} \frac{1}{s}$$

## 5. Stern-Gerlach

(a) inhomogenes Magnetfeld übt Kraft auf magnetische Momente aus. Klassisch würde man eine isotrope Verteilung der magnetischen Momente im Silberstrahl, also ein Kontinuum möglicher Ablenkungen erwarten.

Gemessen werden jedoch zwei Linien: (siehe auch Haken-Wolf):

→ Richtungsquantelung: Atome haben nur diskrete Mögl. zur Einstellung der magn. Momente relativ zum Magnetfeld: parallel und antiparallel.

→ beim Bahndrehimpuls der abgeschlossenen inneren Schalen (man misst denselben Wert der Ablenkung für alle Atome, die ein äusseres s-Elektron haben)

→ s-Elektron hat  $l=0$ , man misst nur Spinmagnetismus

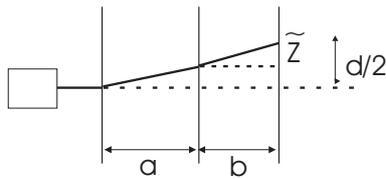


Abbildung 2: Stern-Gerlach-Versuch

(b)

$$\bullet E_{kin} = \frac{M_{Ag} v_x^2}{2} = \frac{3}{2} kT \rightarrow v_x^2 = \sqrt{\frac{3kT}{M_{Ag}}} \quad (1)$$

$$\bullet t_a = \frac{a}{v_x} = a \sqrt{\frac{3kT}{M_{Ag}}} \quad (2)$$

- $t_b = \frac{b}{v_x} = b\sqrt{\frac{3kT}{M_{Ag}}} \quad (3)$
  - Kraft:  $F_z = \mu_{Ag} \frac{\partial B}{\partial z}$  wobei  $\mu_{Ag} = \mu_s = -g_s \frac{e}{2m_e} m_s \hbar = \pm \frac{e\hbar}{2m_e} \frac{\partial B}{\partial z}$   
(4), mit  $m_s = \pm \frac{1}{2}$  und  $g_s = 2$   
Aus (4) folgt:  $M_{Ag} \ddot{z} = \pm \frac{e\hbar}{2m_e} \frac{\partial B}{\partial z} \quad (5)$
  - Beim Austritt aus dem Magnetfeld gilt:  
 $V_z = \dot{z}t_a = (\text{mit } 5) \pm \frac{e\hbar ab}{2m_e M_{Ag}} \frac{\partial B}{\partial z} t_a = (\text{mit } 2) \pm \frac{e\hbar a}{2m_e \sqrt{3kT M_{Ag}}} \frac{\partial B}{\partial z}$   
Von da an ist die Geschwindigkeit konstant:  
 $\tilde{z} = V_z t_b = (\text{mit } 3) \frac{e\hbar ab}{6m_e kT} \frac{\partial B}{\partial z} \quad (6)$
  - Der Weg (in z-Richtung) im Magnetfeld beträgt:  
 $\frac{d}{2} - \tilde{z} = \frac{1}{2} \dot{z}t_a^2 = (\text{mit } 5) \frac{e\hbar}{4m_e M_{Ag}} \frac{\partial B}{\partial z} t_a^2 = \frac{e\hbar}{4m_e M_{Ag}} \frac{\partial B}{\partial z} \frac{a^2 M_{Ag}}{3kT} \Rightarrow d =$   
 $2 \times \left( \frac{e\hbar a^2}{12m_e kT} \frac{\partial B}{\partial z} - \frac{e\hbar ab}{6m_e kT} \frac{\partial B}{\partial z} \right) = \frac{e\hbar a}{3m_e kT} \frac{\partial B}{\partial z} \left( \frac{a}{2} + b \right) \quad (7)$
- (c) (7) ist unabhängig von der Masse der Silberatome  $\rightarrow$  selbes Ergebnis für verschiedene Isotope, und auch für andere Elemente, solange ihr magnetisches Moment von einem einzigen Elektron erzeugt wird.
- (d) Im Ofen erhalten die Atome thermische Geschwindigkeiten, die am besten durch eine Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung beschrieben wird.  
 $\rightarrow$  Die gemessenen Linien sind nicht scharf, sondern gemäss der Verteilung der Geschwindigkeiten *verwaschen*.

Übungsleiter: Frank Hartmann, Forschungszentrum Karlsruhe,  
Tel.: +41 (76) 487 4362; Email: Frank.Hartmann@cern.ch

[www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/~hartmann/atom09](http://www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/~hartmann/atom09)