

Lösung 9; Übungen (30.06 Dienstag/ 02.07. Donnerstag)

1. Spin-Bahn Kopplung

(a) Eigenwerte: $|\vec{j}| = \sqrt{j(j+1)}\hbar$

$|\vec{s}| = \sqrt{s(s+1)}\hbar$

$|\vec{l}| = \sqrt{l(l+1)}\hbar$

aus $j^2 = l^2 + 2ls + s^2$ folgt:

$E_{ls} = \frac{\langle \vec{j}^2 \rangle - \langle \vec{l}^2 \rangle - \langle \vec{s}^2 \rangle}{n^3 l(l+\frac{1}{2})(l+1)} \sim \frac{j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}}{n^3 l(l+\frac{1}{2})(l+1)}$

Für $j = l + \frac{1}{2}$: $E_{ls}^I = \frac{\alpha^2 mc^2}{4} \frac{l^2 + 2l + \frac{3}{4} - l^2 - l - \frac{3}{4}}{n^3 l(l+\frac{1}{2})(l+1)} = -\frac{\alpha^2 mc^2}{4} \frac{1}{n^3 l(l+\frac{1}{2})(l+1)}$

Für $j = l - \frac{1}{2}$: $E_{ls}^{II} = \frac{\alpha^2 mc^2}{4} \frac{l^2 - \frac{1}{4} - l^2 - l - \frac{3}{4}}{n^3 l(l+\frac{1}{2})(l+1)} = -\frac{\alpha^2 mc^2}{4} \frac{1}{n^3 l(l+\frac{1}{2})(l+1)}$

(b) Mit $\alpha = \frac{1}{137}$, $mc^2 = 0.5 MeV$, $\frac{1}{\lambda} = \frac{E}{ch} = \frac{1[in eV]}{1234 \times 10^{-9} \times 100 cm}$
 $\rightarrow \frac{\alpha^4 mc^2}{4} = 3.55 \times 10^{-4} eV = 2.88 \frac{1}{cm}$

n	1,2,3	2	3	3
l	0	1	1	2
E_{ls}^I	-	$1.5 \times 10^{-5} eV = 0.12 \frac{1}{cm}$	$4.4 \times 10^{-6} eV = 0.04 \frac{1}{cm}$	$1.8 \times 10^{-6} eV = 0.01 \frac{1}{cm}$
E_{ls}^{II}	-	$-3.0 \times 10^{-5} eV = 0.24 \frac{1}{cm}$	$-8.8 \times 10^{-6} eV = 0.07 \frac{1}{cm}$	$-2.6 \times 10^{-6} eV = -0.02 \frac{1}{cm}$

Beobachtung mit konventionell spektroskopischen Mitteln bei Wellenzahlen $< \frac{1}{cm}$ scheitern an der Dopplerverbreiterung. Nur Alkaliatome, nicht Erdalkaliatome haben ein Elektron in der nicht-abgeschlossenen äusseren Schale. Wegen $E_{ls} \sim Z^4$ ist selbst bei Lithium die Aufspaltung ca. ein Faktor ≈ 100 (3^4) grösser, und ist deshalb mit konv. Methoden messbar.

(c) Für $l=0$ misst man nur den Spinnmagnetismus $\rightarrow$ keine Spin-Bahn Kopplung.

$E_n = -\frac{13.6 eV}{n^2}$; keine l-Entartung; keine j-Entartung

2. Feinstruktur

(a) Geschwindigkeitsabhängige Massen, E-Feldkorrekturen

(b) Aufspaltungen

n	1	2	2	2	3	3	3	3	3
l	0	0	1	1	0	1	1	2	2
j	1/2	1/2	3/2	1/2	1/2	3/2	1/2	3/2	5/2
ΔE_{nj} [eV]	-1.8 $\times 10^{-4}$	-5.7 $\times 10^{-5}$	-1.1 $\times 10^{-5}$	-5.7 $\times 10^{-5}$	-2.0 $\times 10^{-5}$	-6.7 $\times 10^{-5}$	-2.0 $\times 10^{-5}$	-6.7 $\times 10^{-6}$	-2.2 $\times 10^{-6}$

- Feinstruktur senkt **alle** Niveaus (auch s-Niveau)
- j-Entartung

3. Hyperfeinstruktur

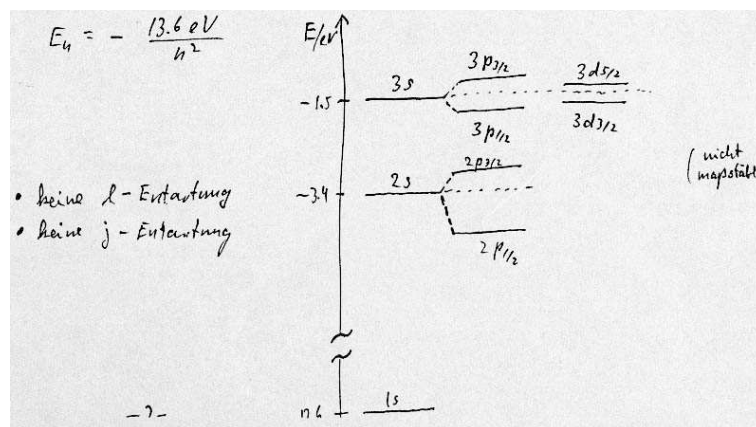


Abbildung 1: Termschema.

- (a) Verantwortlich für Feinstruktur: Elektronspin
Verantwortlich für Hyperfeinstruktur: Kernspin
- (b) Entweder $2I+1$ oder $2j+1$, je nachdem ob I kleiner oder grösser j ist.
→ 2,2,3,2 Komponenten
- (c) $I=1/2; j=1/2 \rightarrow F=0,1$, d.h. 2 Niveaus
 $\langle \vec{I}, \vec{j} \rangle = \frac{\hbar^2}{2} (F(F+1) - I(I+1) - j(j+1))$

$$F=0: E_{Hyp.}^I = \frac{a}{2} \left(-\frac{3}{4} - \frac{3}{4} \right) = -\frac{3a}{4} = -4.4 \times 10^{-6} \text{ eV} = 0.0354 (\text{cm})^{-1} = -1.07 \text{ GHz}$$

$$F=1: E_{Hyp.}^{II} = \frac{a}{2} \left(2 - \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \right) = -\frac{a}{4} = 1.5 \times 10^{-6} \text{ eV} = 0.0118 (\text{cm})^{-1} = 0.36 \text{ GHz}$$

$$a = \frac{2 \times 1.26 \times 10^{-6} \times 2.002 \times 9.27 \times 10^{-24} \times 5.585 \times 5.051 \times 10^{-27}}{3\pi (0.53 \times 10^{-10})^3 \times 1.6 \times 10^{-19}} \text{ eV} = 5.88 \times 10^{-6} \text{ eV} = 0.0473 (\text{cm})^{-1} = 1.426 \text{ GHz}$$

$$\text{Übergang } F=0 \rightarrow F=1: \Delta f(0.36 - (-1.07)) \text{ GHz} = 1.42 \text{ GHz} = 2.1 \text{ cm}$$

$$\text{Linie aus } (\lambda = \frac{c}{f})$$

$$\text{Intervallregel: } \Delta F_{F+1} - \Delta E_F = a(F+1) = a = 1.42 \text{ GHz}$$

Übungsleiter: Frank Hartmann, Forschungszentrum Karlsruhe,
Tel.: +41 (76) 487 4362; Email: Frank.Hartmann@cern.ch

www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/~hartmann/atom09