

Physik IV – Atome und Moleküle; Sommer 2010

Prof. Wim de Boer & Dr. Frank Hartmann, KIT

LÖSUNGEN Übung 6

1. Korrespondenzprinzip; Ehrenfests Theorem

Klassische Mechanik entsteht als der 'klassische Limes' der Quantenmechanik. Klassische Mechanik ist eine ausreichend gute Beschreibung der Natur wenn die von der Quantenmechanik vorhergesagten statistischen Verteilungen der physikalischen Variablen vernachlässigt werden können.

Bsp.: Unendlicher Potentialtopf;

Im Übergang mit der klassischen Vorstellung sind die Bereiche ausserhalb des unendlichen Topfes für die Teilchen absolut tabu.

Im Gegensatz zur klassischen Vorstellung gilt aber zweierlei:

- Das Teilchen kann im gebundenen Zustand nicht beliebige Energiebeiträge aufnehmen, es sind gemäß $n = 1, 2, 3, \dots$ nur bestimmte Energiewerte erlaubt.
- Es existiert eine Nullpunktsenergie bei $n = 1$, die nicht unterschritten werden kann, d.h. das Teilchen hat diese Energie auch bei absolutem Nullpunkt der Temperature ($T=0K$) und kann (in Übereinstimmung mit Heisenberg) damit niemals in Ruhe sein.

Der Abstand zwischen den erlaubten Energieniveaus E_n ist um so kleiner,

- je größer die Masse m und
- je größer der dem Teilchen zugestandene Raum, d.h. je größer die Topflänge ist

D.h. bei makroskopischen Körpern und/oder bei makroskopischen Potentialtöpfen die Energieniveaus so dicht aneinanderrücken, dass das quantenmechanische Ergebnis in das scheinbare Energiekontinuum der klassischen Mechanik übergeht.

Ehrenfests Theorem:

Die statistischen Mittel der Quantenvariablen erfüllen die gleichen Bewegungsgleichungen wie die korrespondierenden klassischen Variablen. Beispiele: Wellenpaket ($\langle x \rangle, \langle p \rangle$); Kugel im harmonischen Oszillator (WP in harmon. Osz.); Laserlicht. Warnung: Klassische Zustände sind immer Überlagerungen von vielen Eigenzuständen.

2. Positronium \rightarrow H-ähnliches Atom

Unten wird recht ausführlich gerechnet, im Prinzip können die Bohr-Sommerfeldschen Formeln für das H-Atom benutzt werden unter Berücksichtigung der effektiven Masse:

(0) effektive Masse: $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_e m_e}{2m_e} = \frac{m_e}{2}$

(1) Bohr-Modell: $E = \frac{1}{2} \mu v^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$; [$E = E_{pot} + E_{kin}$]

(2) Kräftegleichgewicht: $\frac{\mu v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

(3) Quantisierung des Drehimpulses $\mu v r = n \hbar$

(2) $\mu \omega^2 r = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

(3) $\mu \omega r^2 = n \hbar \rightarrow r = \sqrt{\frac{n \hbar}{\mu \omega}}$ (4)

$$\text{in (2): } \mu\omega^2\left(\frac{n\hbar}{\mu\omega}\right)^{3/2} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \rightarrow \sqrt{\omega} = \frac{e^2\mu^{1/2}}{4\pi\epsilon_0(n\hbar)^{3/2}} \rightarrow \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\mu e^4}{32\pi^3\epsilon_0^2\hbar^3} \frac{1}{n^3}$$

$$\text{Im Grundzustand } n=1: \mu = \frac{m_e}{2} \rightarrow \frac{\omega}{2\pi} = \frac{m_e e^4}{64\pi^3\epsilon_0^2\hbar^3} = 3.288 \times 10^{15} \frac{1}{s}$$

$$\text{in (4): } r = \left(\frac{n\hbar}{\mu}\right)^{1/2} \sqrt{\frac{16\pi^2\epsilon_0^2\hbar^3}{\mu e^4} n^3} = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{\mu e^2} n^2 = (\text{mit } n=1 \text{ und } \mu = m_e/2) \frac{8\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} = 1.059 \times 10^{-10} m.$$

$$\text{in (1): } E = \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\mu e^4}{16\pi^2\epsilon_0^2\hbar^3} \frac{1}{n^2}\right)^2 \times \left(\frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{\mu e^2} n^2\right)^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mu e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar^2} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{32} \frac{\mu e^4}{\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2} \frac{1}{n^2} = -\frac{1}{64} \frac{m_e e^4}{\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2} = -6.80 eV$$

3. Myon-Atom

(a) (siehe letzte Aufgabe, gleiche Rechnung)

$$\mu = \frac{m_\mu m_e}{m_\mu + m_e} = \frac{207m_e m_e}{207m_e + m_e} = 1.625 \times 10^{-28} kg$$

$$E_n = -\frac{1}{32} \frac{Z^2 \mu e^4}{\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} = -2531 \frac{Z^2}{n^2} eV \quad (\text{Achtung im Haken-Wolf wurde statt } \mu \text{ nur } m_\mu \text{ eingesetzt, deswegen das abweichende Ergebnis})$$

$$(b) r_n = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{Z\mu e^2} n^2 = 2.84 \times 10^{-3} \frac{n^2}{Z} \text{ \AA}$$

$$(c) h\nu = E_{n=2} - E_{n=1} = -\frac{1}{32} \frac{Z^2 \mu e^4}{\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} (1/4 - 1) = 1898 Z^2 eV$$

4. Beim Franck-Hertz-Versuch entspricht der Abstand der Minima (bzw. Maxima) ΔU_B in der Strom-Spannungs-Kennlinie einer charakteristischen Energie eines Übergangs eines Elektrons in den Atomen bzw. Molekülen des Füllgases.

(a) Die Spannung $U_B = 4V$ liegt zwischen dem ersten und zweiten Minimum. Die Wellenlänge dieses charakteristischen Übergangs ist $\lambda = \frac{hc}{e\Delta U_B} = 589 nm$. Das Füllgas leuchtet also im gelben Spektralbereich. Für $U_B = 5V$ leuchtet es ebenfalls gelb.

(b) Bsp.: Natriumdampf und $^{86}\text{Krypton}$ leuchtet im gelben Spektralbereich. Es könnte sich also um Natriumdampf oder $^{86}\text{Krypton}$ handeln.

(c) Die kinetische Energie der Elektronen E_{kin} muss mindestens so groß sein, wie die Energie des charakteristischen Übergangs, d. h. $E_{kin} \geq e\Delta U_B$. Da $E_{kin} = \frac{m}{2}v^2$, muss $v \geq \sqrt{2e\Delta U_B/m} = 8.6 \times 10^5 m/s$ sein.

5. Ist eines der beiden Elektronen entfernt, so benötigt man die Energie $Z^2 E_i$, wobei $E_I = 13.6 eV$ die Ionisierungsenergie des H-Atoms ist. Für He ($Z=2$) ergibt dies $54.4 eV$. Die Differenz zu $79 eV$ ($24.6 eV$), ist dann die Ionisierungsenergie des ersten Elektrons.

6. Der Rückstoßimpuls p_H des Atoms ist gleich dem Impuls $h\nu/c$ des Photons. Die Übergangsenergie E ist $E = h\nu + p_H^2/(2M_H)$. Aus diesen beiden Gleichungen erhält man mit Hilfe einer einfachen Näherung ($h\nu \ll 2M_H c^2$) die Rückstoßenergie $T_R \approx E^2/(2M_H c^2)$. Mit $E_n = -\frac{Rhc}{n^2}$; $E_1 = -13.6 eV$ und $E_2 = \frac{E_1}{2} = -3.4 eV \Rightarrow n = 2 \rightarrow n = 1$ $E_{2 \rightarrow 1} = 10.2 eV$ (auch aus Diagramm Haken-Wolf S 104 oder ähnlichem Termschema). Mit $E=10.2 eV$ ergibt sich $T_R = 5.5 \times 10^{-8} eV$. Die natürliche Linienbreite beträgt $\Delta E = \hbar/\Delta t = e \times 10^{-7} eV$. Wegen $\Delta E > 2T_R$ ist Resonanzabsorption möglich.