

# Physik IV – Atome und Moleküle; Sommer 2010

Prof. Wim de Boer & Dr. Frank Hartmann, KIT

## LÖSUNGEN Übung 7

### 1. Drehimpulsoperatoren

(a)  $[\hat{L}_z, \hat{L}^2] = 0$

$$\begin{aligned} [\hat{L}_z, \hat{L}^2] &= \\ &= [\hat{L}_z, \hat{L}_x^2] + [\hat{L}_z, \hat{L}_y^2] + [\hat{L}_z, \hat{L}_z^2] \\ &= [L_z, L_x]L_x + L_x[L_z, L_x] + [L_z, L_y]L_y + L_y[L_z, L_y] \\ &= i\hbar(L_yL_x + L_xL_y - L_xL_y - L_yL_x) = 0 \end{aligned}$$

(b) Warum Eigenwert  $l(l+1)$  und nicht  $l^2$

$$\begin{aligned} \hat{l}_- \hat{l}_+ F_{l,m} &= (\hat{l}_x - i\hat{l}_y)(\hat{l}_x + i\hat{l}_y)F_{l,m} \\ &= (\hat{l}_x^2 + \hat{l}_y^2 + i\hat{l}_x\hat{l}_y - i\hat{l}_y\hat{l}_x)F_{l,m} \\ &= (\hat{l}^2 - \hat{l}_z^2 - \hbar\hat{l}_z)F_{l,m} \\ &= (\omega^2\hbar^2 - m^2\hbar^2 - m\hbar^2)F_{l,m} \end{aligned}$$

Setze  $F_{l,m} = F_{l,m_{max}} = F_{l,l}$

dann gilt  $\hat{l}_+ F_{l,m_{max}} = 0$  oder damit  $\omega^2 = m_{max}^2 - m_{max} = 0$   
 $\omega^2 = m_{max}(m_{max} + 1) = l(l+1)$

2.  $L = \sqrt{l(l+1)}\hbar$  für  $l=3$  ist der Betrag daher  $2\sqrt{3}\hbar$ . Die QZ  $m$  läuft in ganzzahligen Schritten von -1 bis 1.  $\rightarrow m = -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3$ . Die 7 möglichen Vektoren sind in Abbildung 1 zu sehen. Jeder Vektor hat die Länge  $2\sqrt{3}\hbar$  und die z-Komponenten sind  $-3\hbar, -2\hbar, -1\hbar, 0, +1\hbar, +2\hbar, +3\hbar$ , die Winkel zur z-Achse sind  $150^\circ; 125,3^\circ; 106,8^\circ; 90^\circ; 73,2^\circ; 54,7^\circ; 30^\circ$

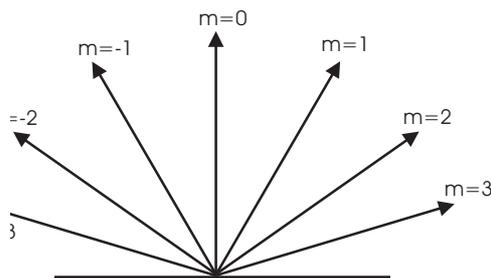


Abbildung 1: Vektordiagramm

3. QZ  $l$  läuft ganzzahlig von 0 bis  $n-1$ , somit kann  $l = -2, -1, 0, +1, +2$  sein. Für  $l = 0$  ist  $m = 0$ ; für  $l = 1$  ist  $m = -1, 0, +1$ ; für  $l = 2$  ist  $m = -2, -1, 0, +1, +2$ . Für jedes  $l$  gibt es genau  $2l + 1$   $m$  verschiedene Werte. Die Anzahl der unterschiedlichen Kombinationen von  $m$  und  $l$  ist daher  $[2 \cdot (0) + 1] + [2 \cdot (1) + 1] + [2 \cdot (2) + 1] = 9$ . Die Anzahl der zugehörigen Elektronenzustände ist somit wegen des Spins gleich 18 (für  $n = 3$ ).

Für  $n = 4$  Elektronenzustände  $2[[2 \cdot (0) + 1] + [2 \cdot (1) + 1] + [2 \cdot (2) + 1] + [2 \cdot (3) + 1]] = 32$ .

4. Drehimpuls:  $L = \Theta\omega = 3,49 \cdot 10^{-3} \text{kgm}^2/\text{s}$   
 Quantenzahl: Mit  $L = \sqrt{l(l+1)}\hbar$  erhalten wir  $l = 3,31 \cdot 10^{31}$
5. Schrödingergleichung

(a)  $\Psi(r) = ae^{-\frac{r}{r_1}}$

Radialteil der Schrödingergleichung:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}\right] R(r) = E \cdot R(r)$$

s-Zustand:  $l = 0$ :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}\right] ae^{-\frac{r}{r_1}} =$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}\right] ae^{-\frac{r}{r_1}} =$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left[-\frac{2}{r} \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1^2}\right] - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}\right] ae^{-\frac{r}{r_1}} = E \cdot ae^{-\frac{r}{r_1}}$$

$$\left(\frac{\hbar^2}{m} \frac{1}{r_1} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right) + \left(\frac{\hbar^2}{2emr_1^2} - E\right)r = 0$$

$$E = -\frac{\hbar^2}{2mr_1^2} = \frac{me^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2\hbar^2} \text{ mit } r_1 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{e^2m}$$

(b)  $W(r)dr = |\Psi|^2 4\pi r^2 dr$  mit  $4\pi r^2 =$  Fläche der Kugelschale mit Radius  $r$

$$W(r)dr = 4\pi r^2 a^2 e^{-\frac{2r}{r_1}} dr$$

$$W(r) = 4\pi r^2 a^2 e^{-\frac{2r}{r_1}}$$

(c)  $\frac{dW(r)}{dr} = 0 \Rightarrow 2r - r^2 \frac{2}{r_1} = 0 \Rightarrow r = r_1$

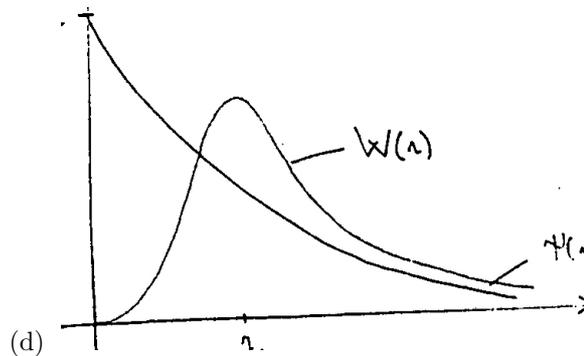


Abbildung 2: Funktionen

6. (a) Das Element hat 14 Elektronen  $\Rightarrow$  Silizium.  
 (b) Das Element hat 20 Elektronen  $\Rightarrow$  Kalzium.

7. Einstein-de-Haas

- (a) magnetisches Moment des vom Elektron bedingten Kreisstroms:  $\vec{\mu} = I\vec{A}$   
 mit  $I = \frac{-e}{T} = \frac{-e\omega}{2\pi}$  und  $A = \pi r^2$  folgt:  $\vec{\mu} = -\frac{1}{2}e\omega r^2 \hat{l}_z$  mit  $\vec{l} = m\omega r^2 \hat{l}_z$   
 folgt:  $\vec{\mu} = -\frac{e}{2m}\vec{l}$
- (b) Ausrichtung der atomaren magnetischen Momente im Eisen  $\mu_{Fe}$  bedingt  
 eine Änderung der atomaren Drehimpulse  $\vec{L}_{Atom} \rightarrow$  Zylinder dreht sich  
 wegen Drehimpulserhaltung, also  $\vec{L}_{makro}$  entgegengesetzt zu  $\vec{L}_{Atom}$  :  
 $\vec{L}_{makro} || -\vec{L}_{Atom}$   
 Da  $\vec{L}_{Atom} || -\vec{\mu}_{Fe}$  und  $\vec{\mu}_{Fe} || B$  folgt  $\vec{L}_{makro} || \vec{B}$  oder  $\vec{\omega} || \vec{B}$   
 Aus  $\vec{L} = \Theta_{Fe}\vec{\omega}$  folgt  $\vec{\omega} = \frac{2n_{Fe}\vec{L}_{makro}}{\Theta_{Fe}}$  (I) (2 wegen Umklappen) mit  $n_{Fe}$ :  
 Anzahl der Eisenatome =  $\frac{M_{Fe}}{m_{Fe}}N_A$  und  $m_{Fe}$  : atomare Masse von Eisen  
 $\rightarrow \omega = \frac{2N_A M_{Fe} L_{Atom}}{\Theta_{Fe} m_{Fe}}$  (II)
- (c)  $\gamma = \frac{|\vec{\mu}|}{|\vec{L}_{Atom}|} = \frac{|n_{Fe}\vec{\mu}|}{|n_{Fe}\vec{L}_{Atom}|} = \frac{|\vec{M}_{Fe}|}{|n_{Fe}\vec{L}_{Atom}|} = (mit I) = \frac{|\vec{M}_{Fe}|}{\Theta_{Fe}|\omega|}$   
 mit  $\vec{M}$ : magnetisches Moment des Zylinders  
 (Achtung M: Masse;  $\vec{M}$ : magn. Moment)
- (d) aus (II) folgt mit Annahme  $L_{Atom} = \hbar$  und  $\rho = \frac{M_{Fe}}{\pi r^2 L_{Zyl}} = \frac{M_{Fe}^2}{2\pi\Theta_{Fe}L_{Zyl}}$ ;  
 $L_{Zyl}$ : Länge des Zylinders.  $\Theta_{Fe} = \Theta_{Zyl} = \rho V \frac{r^2}{2}$   
 $\rightarrow \omega = \frac{2N_A M_{Fe} \hbar}{\frac{M_{Fe}^2}{2\pi\Theta_{Fe}L_{Zyl}} \Theta_{Fe} m_{Fe}} = \frac{4\pi N_A \hbar \rho L_{Zyl}}{M_{Fe} m_{Fe}}$   
 $\rightarrow \omega = \frac{4\pi \times 6 \times 10^{23} \times 1.05 \times 10^{-34} \times 7.87 \times 10^3 \times 10^{-2}}{10^{-3} \times 55.8} = 1.1 \times 10^{-6} \frac{1}{s}$