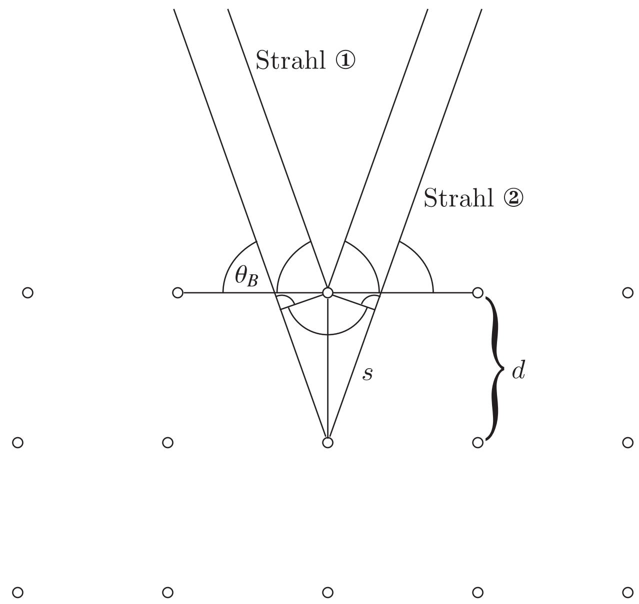
Handout zum Übungsblatt Nr.2

Aufgabe 1

Der Winkel für die Bragg-Reflexion (Glanzwinkel θ_B) ergibt sich aus der Bedingung der konstruktiven Interferenz für die Beugung von elektromagnetischer Strahlung der Wellenlänge λ an Netzebenen.



Der Gangunterschied zwischen den beiden an benachbarten Netzebenen (mit Abstand d_{hkl}) reflektierten Strahlen beträgt $\delta = 2s = 2d_{hkl}\sin\theta_B$. Damit konstruktive Interferenz stattfindet, muss dies ein ganzzahliges Vielfache der Wellenlänge sein:

$$\boxed{2d_{hkl}\sin\theta_B = n\lambda\,, \quad \sin\theta_B = \frac{n\lambda}{2d_{hkl}}\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,.} \tag{1}$$

Aufgabe 2

a)

Diese Anordnung aus einem gekreuzten E- und B-Feldern, die aufeinander senkrecht stehen, ist nichts anderes als ein Geschwindigkeitsfilter. Teilchen gelangen genau dann ohne Ablenkung durch diesen Filter, sofern sich elektrische Kraft und Lorentzkraft gegenseitig aufgeben:

$$F_e \stackrel{!}{=} F_L \Leftrightarrow eE = \frac{eU}{d} \stackrel{!}{=} evB \Rightarrow \frac{U}{dB} = \frac{8000\,\mathrm{V}}{4\cdot 10^{-3}\,\mathrm{k}\cdot 10\cdot 10^{-3}\,\mathrm{T}} = \boxed{2\cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.} \tag{2}$$

Dabei handelt es sich um 2/3 der Lichtgeschwindigkeit, also muss man relativistisch rechnen.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{3}{\sqrt{5}}\,. \tag{3}$$

b.)

Mittels des Satzes von Pythagoras

$$(r-a)^2 + L^2 = r^2\,, \tag{4}$$

ergibt sich der Radius des Kreises, welchen das Teilchen im Magnetfeld beschreibt, zu:

$$r = \frac{a^2 + L^2}{2a} = \frac{(4,5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m})^2 + (1,6\,\mathrm{m})^2}{2 \cdot 4,5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}} \approx 284,5\,\mathrm{m}\,. \tag{5}$$

Der Radius ist also sehr groß; das Teilchen wird nur schwach abgelenkt. Damit das Teilchen die Kreisbahn beschreibt, muss die (relativistische) Zentripetalkraft von der Lorentzkraft aufgebracht werden:

$$F_Z \stackrel{!}{=} F_L \Leftrightarrow \frac{\gamma m v^2}{r} \stackrel{!}{=} evB \Rightarrow \frac{e}{m} = \frac{\gamma v}{rB} = \frac{\frac{3}{\sqrt{5}} \cdot 2 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{284,5\,\mathrm{m} \cdot 10^{-2}\,\mathrm{T}} \approx \boxed{9,43 \cdot 10^7\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{kg}}\,.} \tag{6}$$

c)

Durch das Beschleunigen im Zyklotron gewinnt das Teilchen kinetische Energie. Die relativistische Gesamtenergie lässt sich berechnen über $E_{\mathrm{rel}} = \gamma m c^2$. Davon ist die Ruheenergie des Teilchens $E_0 = mc^2$ abzuziehen und es ergibt sich die relativistische kinetische Energie:

$$E_{\mathrm{kin}} = (\gamma - 1) m c^2 = \left(\frac{3}{\sqrt{5}} - 1\right) \cdot 0,938\,\mathrm{GeV} \approx 0,320\,\mathrm{GeV}\,. \tag{7}$$

Man kann sich vergewissern, dann man mit dem relativistischen Pythagoras

$$E_{\mathrm{rel}} = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2}\,, \tag{8}$$

auf denselben Zahlenwert kommt. Damit können wir die Anzahl N der Umläufe angeben, wenn wir beachten, dass der Zuwachs an kinetischer Energie pro Umlauf bei $\widehat{E} = 40 \cdot 10^3\,\mathrm{eV}$ liegt:

$$N = \frac{E_{\mathrm{kin}}}{\widehat{E}} = \frac{0,320 \cdot 10^9\,\mathrm{eV}}{40 \cdot 10^3\,\mathrm{eV}} \approx \boxed{8011\,.} \tag{9}$$

d)

Erneut ergibt sich aus $F_Z = F_L$ der Radius der Kreisbahn:

$$r = \frac{\gamma m v}{Be}\,. \tag{10}$$

Aus der Umlaufzeit $T = 2\pi r/v$ folgt die Umlauffrequenz:

$$\omega(t) = \frac{2\pi}{T(t)} = \frac{v(t)}{r(t)} = \frac{Be}{\gamma(t) m}\,. \tag{11}$$

Die Zeitabhängigkeit von $\omega(t)$ kommt vom Lorentzfaktor $\gamma(t)$. Im nichtrelativistischen Grenzfall ist $\gamma = 1$ und deshalb kann dann ω als zeitunabhängig betrachtet werden. Wir drücken $\gamma(t)$ mittels des Zuwachses an kinetischer Energie pro Umlauf aus:

$$\gamma(t) = \frac{E_{\mathrm{kin}}(t) + mc^2}{mc^2} = 1 + \frac{1}{mc^2} \int_0^t \widehat{E} \omega(t')\,\mathrm{d}t' = \frac{\widehat{E}}{mc^2} \int_0^t \omega(t')\,\mathrm{d}t'\,. \tag{12}$$

Im Wesentlichen wurde der Energiezuwachs über das Integral mathematisch so behandelt, also folge er kontinuierlich über die ganze Bewegung des Teilchens und nicht nur abrupt durch die Bewegung im elektrischen Feld. Der Energiezuwachs $\widehat{E}$ rührt von der Potentialdifferenz (des elektrischen Feldes her) und hängt somit nicht von der Zeit ab. Damit kommen wir auf die Integralgleichung

$$\boxed{\omega(t) = \frac{Bec^2}{mc^2 + \frac{\widehat{E}}{\pi} \int_0^t \omega(t')\,\mathrm{d}t'}}\,. \tag{13}$$

Es ist geschickt, den Kehrwert zu bilden und nach der Zeit abzuleiten, um auf eine Differentialgleichung zu kommen:

$$\frac{1}{\omega(t)} = \frac{m}{Be} + \frac{\widehat{E}}{Bec^2\pi} \int_0^t \omega(t')\,\mathrm{d}t' \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\omega(t)}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m}{Be} + \frac{\widehat{E}}{Bec^2\pi} \int_0^t \omega(t')\,\mathrm{d}t'\right)\,, \tag{14}$$

also

$$\frac{-\dot{\omega}(t)}{\omega^2(t)} = \frac{\widehat{E}}{Bec^2\pi}\omega(t) \Rightarrow \boxed{-\frac{\dot{\omega}(t)}{\omega^3(t)} = \frac{\widehat{E}}{Bec^2\pi}\,.} \tag{15}$$

Dies ist nun eine gewöhnliche Differentialgleichung, die sich durch Trennung der Veränderlichen und anschließende Integration lösen lässt:

$$-\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega^3} = \frac{\widehat{E}}{Bec^2\pi}\,\mathrm{d}t \Rightarrow -\int\limits_{\omega_0}^{\omega} \frac{\mathrm{d}\omega}{\omega^3} = \int\limits_{0}^{t} \frac{\widehat{E}}{Bec^2\pi}\,\mathrm{d}t'\,, \tag{16}$$

also

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega_0^2}\right) = \frac{\widehat{E}}{Bec^2\pi}t \Rightarrow \frac{1}{\omega^2} = \frac{2\widehat{E}}{Bec^2\pi}t + \frac{1}{\omega_0^2}\,. \tag{17}$$

Das Endergebnis lautet:

$$\boxed{\omega(t) = \frac{\omega_0}{\sqrt{\frac{2\widehat{E}\omega_0^2}{Bec^2\pi}t + 1}}\,.} \tag{18}$$

Aufgabe 3

a)

Das Proton der kinetischen Energie E_{kin} hat dann seinen kleinsten Abstand $r_{\min}$ zum Kern erreicht, wenn die gesamte kinetische Energie in potentielle Energie umgewandelt wurde, also

$$E_{\mathrm{kin}} \stackrel{!}{=} E_{\mathrm{pot}} = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_{\min}} \Rightarrow r_{\min} = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 E_{\mathrm{kin}}}\,. \tag{19}$$

Dann gilt

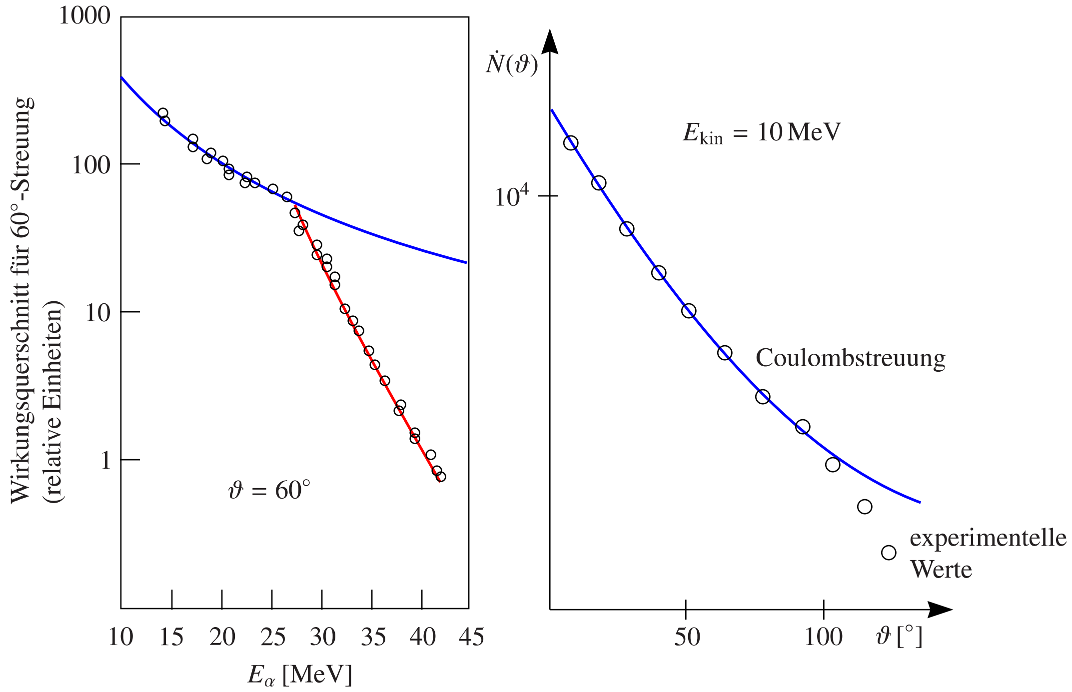
Energie	1 MeV	10 MeV
$r_{\min}$	$1,14 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{m}$	$1,14 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m}$

Berechnen wir den Radius eines Goldkerns über $R = 1,3A^{\frac{1}{3}}$ fm (wobei A die Anzahl der Nukleonen, also die Summe von Ordnungszahl (Protonenzahl) N und Neutronenzahl N ist), so erhält man $R_{\mathrm{Au}} \approx 7,6\,\mathrm{fm}$ wegen $A = 197$. Dann ergibt sich

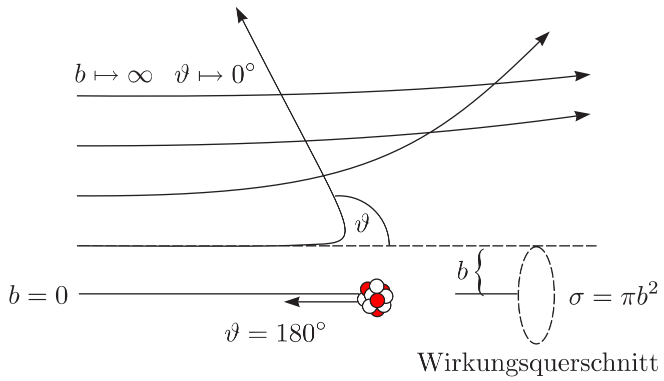
$$E = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_{\mathrm{Au}}} \approx \boxed{1,50 \cdot 10^7\,\mathrm{eV}\,.} \tag{20}$$

b)

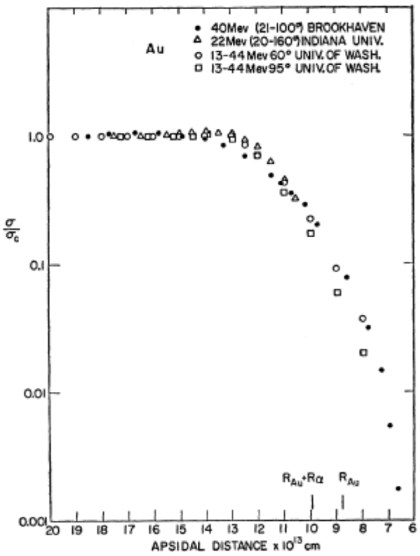
Als anomale Rutherfordstreuung bezeichnet man die Abweichung des gemessenen Wirkungsquerschnitts (bzw. der damit zusammenhängenden Größen wie die Anzahl der gestreuten Teilchen) vom theoretischen Rutherford-Wirkungsquerschnitt.



Eine solche Abweichung tritt bei entweder bei festem Streuwinkel ab einer bestimmten Energie des streuenden α-Teilchens (links) bzw. ab einem bestimmten Winkel bei fester Energie des α-Teilchens (rechts) auf. Der Wirkungsquerschnitt genügt ab einem bestimmten Punkt nicht mehr der Rutherford-Formel, sondern fällt exponentiell ab. Dieses Verhalten lässt sich dadurch erklären, dass bei hoher Energie bzw. großen Streuwinkel das α-Teilchen dem Atomkern sehr nahe gekommen sein muss.



Die Rutherford-Streuformel berücksichtigt nur das elektromagnetische Coulomb-Potential des Kerns, vernachlässigt jedoch quantenmechanische Effekte, wie beispielsweise solche der Kernphysik. Diese werden wichtig, wenn das α-Teilchen dem Kern sehr nahe kommt, was auch aus folgendem Bild klar wird:



Hier wurden experimentell gemessene Wirkungsquerschnitte σ für die Streuung eines α-Teilchens an Goldatomen aus verschiedenen Experimenten mit dem erwarteten Rutherford-Wirkungsquerschnitt σ_0 verglichen und zwar durch Bildung des Quotienten (aus H. E. Wegner, R. M. Eisberg und G. Igo: „Elastic Scattering of 40-Mev Alpha Particles from Heavy Elements“, Phys. Rev. **99**, 825 - 833 (1955)). Aufgetragen sind diese über dem kleinsten Abstand der klassischen Flugbahn bei gegebener Energie und gegebenem Streuwinkel. Die Abweichung von der Rutherford-Formel tritt ein bei einem Abstand, welcher der Summe auf dem Radius des α-Teilchens, dem Goldatom und zusätzlichen 1 - 2 fm entspricht. Dies bedeutet, dass die gemessenen Werte dann abweichen, wenn das α-Teilchen den Kern fast berührt, weil dann quantenmechanische/kernphysikalische Effekte wie die starke Wechselwirkung wichtig werden. Der zusätzliche Unterschied von 1 - 2 fm entspricht der kurzen Reichweite der starken Kraft.

c)

Der Streuwinkel der Rutherford-Streuung ist gegeben durch

$$\vartheta = \pi - 2 \arctan \left(\frac{4\pi\varepsilon_0}{Ze^2} \cdot b \cdot E_{\text{kin}} \right) , \tag{21}$$

mit dem Stoßparameter b. Einsetzen der Werte $b = 2,6 \cdot 10^{-13}$ m und $E_{\text{kin}} = 4 \cdot 10^6$ eV führt auf $\vartheta \approx 0,22$ (im Bogenmaß) bzw. $\vartheta \approx 12,5°$.

Aufgabe 4

a)

Zur Zeit als das Experiment des Photoeffekts zum ersten mal durchgeführt wurde, war bekannt, dass Licht eine elektromagnetische Welle ist, eine Welle, die aus elektrischen und magnetischen Feldern besteht. Diese Felder induzieren sich gegenseitig, womit sich die Welle durch das Vakuum bewegen kann ohne einen Träger, wie dieser bei mechanischen Wellen erforderlich ist. Die schon bekannten Maxwellschen Gleichungen lieferten die mathematische Beschreibung von elektromagnetischen Wellen. Hieraus folgt auch, dass die Lichtintensität I proportional zum Betragsquadrat der elektrischen Feldstärke ist, also $I \sim |\mathbf{E}|^2$. Wollte man das Herauslösen der Elektronen aus dem Metall mit Hilfe der Maxwellschen Gleichungen beschreiben, so müsste man annehmen, dass die Elektronen durch das elektromagnetische Feld Lichtwelle selbst zu Schwingungen angeregt werden. Dies würde so lange passieren, bis sie aus dem Metall herausgerissen werden. Dann müsste jedoch die Energie der Elektronen von der Feldstärke und somit auch der Intensität des Lichts abhängen, was jedoch eben nicht der Fall ist. Außerdem kann man auch nicht erklären, warum das Licht eine minimale Frequenz haben muss, damit Elektronen ausgelöst werden. Nach den Maxwellschen Gleichungen sollte ja eine einfache Erhöhung der Lichtintensität ausreichen, um Elektronen zu befreien. Somit konnten mit Hilfe der klassischen Wellentheorie des Lichts die Ergebnisse des Experiments nicht erklärt werden und eine neue Theorie war notwendig.
Die Erklärung wurde erst von Einstein geliefert, wofür er den Nobelpreis für Physik erhielt. Er nahm an, dass die Energie einer Lichtwelle in kleine Portionen eingeteilt, also gequantelt ist. Diese Energiequanten wurden Photonen genannt. Die Energie eines solchen Photons hängt von der Frequenz ν (bzw. Wellenlänge λ) des Lichtes ab und ist gegeben durch:

$$E = h \cdot \nu = \frac{h \cdot c}{\lambda} , \tag{22}$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit und h eine Proportionalitätskonstante (das Plancksche Wirkungsquantum) ist. Mit dieser Annahme war es möglich, den Photoeffekt zu erklären. Ein Elektron kann demnach aus dem Metall herausgelöst werden, wenn es ein Photon aufnimmt, das genügend Energie besitzt. (Zum Herauslösen eines Elektrons wird eine bestimmte Ablöseenergie W_a benötigt, die vom Metall abhängt.) Der Rest, also die Energie $h \cdot \nu - W_a$ steht dem Elektron als kinetische Energie

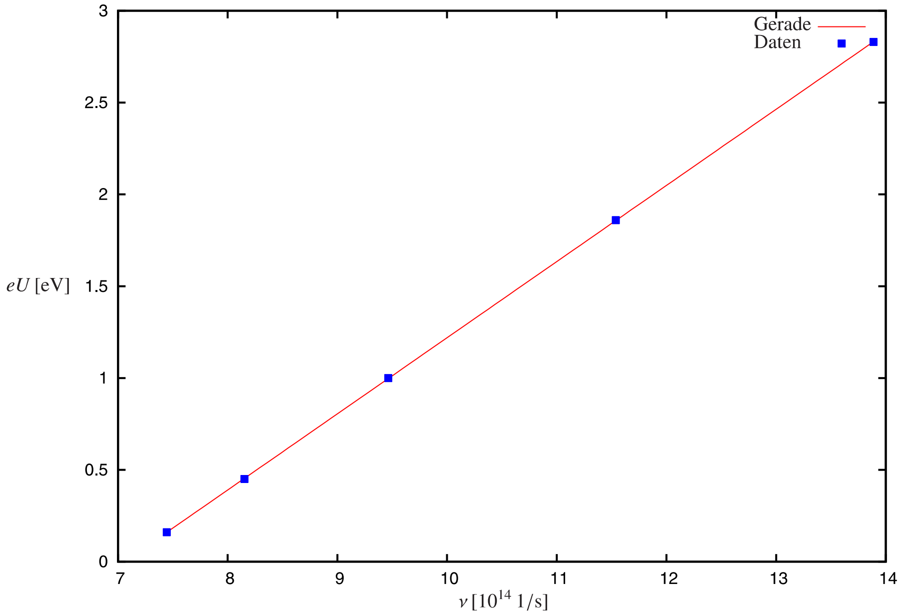
$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 , \tag{23}$$

zur Verfügung. Damit ist klar, dass die Energie der Elektronen von der Frequenz des Lichts abhängt, nicht aber von dessen Intensität. Ändert man die Intensität des Lichts, ändert sich auch die Anzahl der Photonen und damit auch die Zahl der Elektronen, die aus dem Metall herausgelöst werden. Dies führt zu einem Anstieg oder Abfall des gemessenen elektrischen Stroms.
Die Erklärung des Photoeffekts führte zu den Anfängen der Quantenmechanik.

b)

$\nu\,[10^{14}\,1/\mathrm{s}]$	13,8889	11,5385	9,46372	8,15217	7,44417
eU [eV]	2,83	1,86	1,00	0,45	0,16

Theoretisch liegen die Werte auf einer Geraden $eU = h\nu - W_A$, wobei h das Plancksche Wirkungsquantum und W_A die Austrittarbeit der Elektronen ist. Mittels `GnuPlot` lässt sich eine Ausgleichgerade an die Daten legen.



Man erhält dann

$$h = (4,14645 \cdot 10^{-15} \pm 5,994 \cdot 10^{-18})\,\mathrm{eV} \cdot \mathrm{s}\,, \quad W_A = (2,92687 \pm 0,006215)\,\mathrm{eV}\,. \tag{24}$$

Hieraus ergibt sich der bekanntere Wert

$$\boxed{h = (6,6261 \cdot 10^{-34} \pm 9,60239 \cdot 10^{-37})\,\mathrm{Js}\,.} \tag{25}$$