Handout zum Übungsblatt Nr.3

Aufgabe 1

a)

Nach der Energie-Massen-Äquivalenz von Einstein gilt:

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{Pt}{c^2} = \frac{100\,\mathrm{W} \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600\,\mathrm{s}}{\left(3 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2} \approx \boxed{3,5 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{kg}\,.} \tag{1}$$

b)

Die Energie breitet sich in alle Richtungen gleich (isotrop) aus. Damit ist die Energie pro Fläche in einer Entfernung r von der Glühlampe gegeben durch $E/(4\pi r^2)$. Damit das Auge das Licht noch wahrnehmen kann, muss die Energie, welche in die Pupille der Fläche $\pi(d/2)^2$ fällt, der Energie von fünf Photonen grünen Lichts entsprechen:

$$\frac{E}{4\pi r^2} \cdot \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 \stackrel{!}{=} 5\frac{hc}{\lambda}\,. \tag{2}$$

Dies führt auf

$$r = \frac{1}{4\sqrt{5}} d \sqrt{\frac{E\lambda}{ch}} = \frac{1}{4\sqrt{5}} \cdot 8 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} \cdot \sqrt{\frac{100\,\mathrm{J} \cdot 500 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}}{3 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 6,626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}}} \approx \boxed{1,42 \cdot 10^7\,\mathrm{m} = 14200\,\mathrm{km}\,.} \tag{3}$$

c)

Nach dem Wienschen Verschiebungsgesetz gilt folgender Zusammenhang:

$$\lambda_{\max} \cdot T = \text{const.} = 2897,8 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{K}\,. \tag{4}$$

Dies führt dann auf

$$T = \frac{2897,8 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{K}}{500 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}} \approx \boxed{5800\,\mathrm{K}\,.} \tag{5}$$

Aufgabe 2

Herleitung der Compton-Formel

- Energieerhaltung:

$$E_\gamma + E_\mathrm{e} = E'_\gamma + E'_\mathrm{e} \Rightarrow h\nu + mc^2 = h\nu' + \sqrt{(mc^2)^2 + p^2c^2}\,, \tag{6}$$

  und für $p \ll m$ (nicht-relativistischer Fall):

$$hc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) = \frac{p^2}{2m}\,. \tag{7}$$

- Impulserhaltung:

  Hier sei $\hbar\mathbf{k}$ der Impuls des einlaufenden Photons, $\hbar\mathbf{k}'$ der Impuls des gestreuten Photons und $\mathbf{p}$ der Impuls des Elektrons.

  - in x-Richtung:

$$\hbar k_x = \hbar k'_x + p_x \Rightarrow \hbar k = \hbar k' \cos\theta + p\cos\phi \Rightarrow h\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\cos\theta\right) = p\cos\phi\,. \tag{8}$$

– in y-Richtung:

$$\hbar k_y = \hbar k'_y + p_y \Rightarrow 0 = -\hbar k' \sin\theta + p \sin\phi \Rightarrow \frac{h}{\lambda'} \sin\theta = p \sin\phi\,. \tag{9}$$

Quadrieren und Addition der Gleichungen (8) und (9) führt auf

$$\frac{1}{\lambda^2} - \frac{2\cos\theta}{\lambda\lambda'} + \frac{1}{\lambda'^2}(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = \frac{p^2}{h^2}(\sin^2\phi + \cos^2\phi)\,, \tag{10a}$$

$$\frac{1}{\lambda^2} - \frac{2\cos\theta}{\lambda\lambda'} + \frac{1}{\lambda'^2} = \frac{p^2}{h^2}\,. \tag{10b}$$

Einsetzen von Gl. (10b) in Gl. (7) ergibt:

$$hc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) = \frac{h^2}{2m}\left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{2\cos\theta}{\lambda\lambda'} + \frac{1}{\lambda'^2}\right) \tag{11}$$

Compton leitete die nach ihm benannte Formel im Grenzfalle her, dass die Änderung der Wellenlänge sehr klein ist: $\lambda' - \lambda \equiv \Delta\lambda \ll \lambda$. Dazu sind die folgenden Entwicklungen hilfreich:

$$\frac{1}{\lambda\lambda'} = \frac{1}{\lambda(\lambda + \Delta\lambda)} = \frac{1}{\lambda^2\left(1 + \frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{\Delta\lambda}{\lambda^3} + \mathcal{O}\left(\frac{\Delta\lambda^2}{\lambda^4}\right)\,, \tag{12a}$$

$$\frac{1}{\lambda'^2} = \frac{1}{(\lambda + \Delta\lambda)^2} = \left(\frac{1}{\lambda\left(1 + \frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)}\right)^2 = \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} + \mathcal{O}\left(\frac{\Delta\lambda^2}{\lambda^3}\right)\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{2\Delta\lambda}{\lambda^3} + \mathcal{O}\left(\frac{\Delta\lambda^2}{\lambda^4}\right)\,. \tag{12b}$$

Damit ergibt sich weiter:

$$hc\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} = \frac{h^2}{2m}\left(\frac{2}{\lambda^2} - \frac{2\cos\theta}{\lambda^2}\right) = \frac{h^2}{m}\frac{1}{\lambda^2}(1 - \cos\theta)\,, \tag{13}$$

also schlussendlich

$$\boxed{\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)\,.} \tag{14}$$

a)

Die kinetische Energie E_{kin} des Elektrons ergibt sich direkt aus der Herleitung und zwar aus Gl. (13). Die Größe auf der rechten Seite nämlich E_{kin}:

$$E_{\text{kin}} = \frac{h^2}{m}\frac{1}{\lambda^2}(1 - \cos\theta)\,. \tag{15}$$

Die kinetische Energie wird maximal für einen Streuwinkel θ des Photons von $\theta = \pi$. Dann gilt

$$\boxed{E_{\text{kin}} = \frac{2h^2}{m}\frac{1}{\lambda^2}\,.} \tag{16}$$

Der Streuwinkel ϕ des Elektrons ergibt sich aus Gl. (9) zu $\phi = n\pi$ mit $n \in \mathbb{Z}$. Es muss jedoch auch noch Gl. (8) berücksichtigt werden. Unter der Näherung, dass $\Delta\lambda \ll \lambda$ ergibt sich

$$\frac{h}{\lambda}(1 - \cos\theta) = \frac{\sqrt{2}h}{\lambda}\sqrt{1 - \cos\theta}\cos\phi\,, \tag{17}$$

was für $\boxed{\theta = \pi}$ schließlich auf den Winkel $\boxed{\phi = 0}$ führt.

b)

Prinzipiell könnten wir Gl. (16) verwenden. Genauer ist jedoch folgende Abschätzung, die sich mittels der Photonenergien E_γ und E'_γ ergibt:

$$E_{\text{kin}} = E_\gamma - E'_\gamma = hc\frac{\Delta\lambda}{\lambda\lambda'} = hc \cdot \frac{h}{mc}(1-\cos\theta) \cdot \frac{E_\gamma E'_\gamma}{(hc)^2} = \frac{E_\gamma E'_\gamma}{mc^2}(1-\cos\theta)\,, \tag{18}$$

also

$$E'_\gamma = \frac{E_\gamma}{1 + \frac{E_\gamma}{mc^2}(1-\cos\theta)}\,. \tag{19}$$

Die kinetische Energie ergibt sich dann zu

$$E_{\text{kin}} = E_\gamma - E'_\gamma = \frac{E_\gamma E'_\gamma}{mc^2}(1-\cos\theta) = \frac{E_\gamma}{1 + \frac{mc^2}{E_\gamma(1-\cos\theta)}}\,. \tag{20}$$

Einsetzen der Zahlenwerte in Gl. (16) führt auf

$$E_{\text{kin}} = \frac{2 \cdot (6,626 \cdot 10^{-34}\,\text{J})^2}{9,11 \cdot 10^{-31}\,\text{kg} \cdot (400 \cdot 10^{-9}\,\text{m})^2} \cdot \frac{1}{1,602 \cdot 10^{-19}}\frac{\text{eV}}{J} \approx \boxed{4,2 \cdot 10^{-5}\,\text{eV}\,.} \tag{21}$$

Gl. (20) führt auf den Zahlenwert $\boxed{E_{\text{kin}} \approx 3,8 \cdot 10^{-5}\,\text{eV}}$.

c)

Damit die Energie des Photons komplett auf das Elektron übertragen wird, muss $h/\lambda' = 0$ sein. Aus Gl. (8) folgt dann $\phi = n\pi$ mit $n \in \mathbb{Z}$ und aus Gl. (9) ergibt sich $h/\lambda = p$. Eingesetzt in (6) liefert dies

$$h\nu + mc^2 = \sqrt{(mc^2)^2 + (h\nu)^2}\,. \tag{22}$$

Quadrieren führt auf

$$(h\nu)^2 + (mc^2)^2 = (mc^2)^2 + 2h\nu(mc^2) + (h\nu)^2\,, \tag{23}$$

was nur für $\nu = 0$ zu erfüllen ist.

d.)

Aus $E'_\gamma = E_\gamma - E_{\text{kin}}$ ergibt sich die Wellenlänge des gestreuten Photons:

$$\lambda' = \frac{hc}{E_\gamma - E_{\text{kin}}} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{(500 \cdot 10^3 - 0,1 \cdot 10^6) \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}\,\text{J}} \approx 3,10 \cdot 10^{-12}\,\text{m}\,. \tag{24}$$

Die Wellenlänge des einlaufenden Photons beträgt $\lambda \approx 2,48 \cdot 10^{-12}\,\text{m}$. Aus der Compton-Formel ergibt sich der Streuwinkel des Photons:

$$\theta = \arccos\left(1 - \frac{mc\Delta\lambda}{h}\right) = \arccos\left(1 - \frac{9,11 \cdot 10^{-31}\,\text{k} \cdot 3 \cdot 10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 6,20 \cdot 10^{-13}\,\text{m}}{6,626 \cdot 10^{-34}\,\text{Js}}\right) \approx \boxed{41,9^\circ\,.} \tag{25}$$

Aufgabe 3

a.)

Im Folgenden sei V_{tr} das Volumen und m_{tr} die Masse eines Tröpfchens. Ein Tröpfchen werde als kugelförmig mit Radius r angenommen. Dann gilt $V_{\text{tr}} = 4/3\pi r^3$ und $m_{\text{tr}} = V_{\text{tr}}\varrho_{\text{Öl}}$. Prinzipiell sind folgende Kräfte bei der Bewegung der Tröpfchen zu berücksichtigen:

- Gewichtskraft der Tröpfchen: $\mathbf{F}_g = m\mathbf{g}$
- Auftriebskraft der Tröpfchen in der Luft: Nach dem Archimedes'schen Prinzip ist die Auftriebskraft so groß wie die Gewichtskraft der verdrängten Luft, also $F_{\text{auf}} = V_{\text{tr}}\varrho_{\text{Luft}} = 4/3\pi r^3\varrho_{\text{Luft}}$.

- Reibungskraft der Tröpfchen: Diese lässt sich mittels der Stokesschen Reibung

$$F_{\text{stokes}} = 6\pi\eta'_{\text{Luft}} r v\,, \quad \eta'_{\text{Luft}} = \frac{\eta_{\text{Luft}}}{1+\mathcal{C}\frac{\lambda}{r}}\,, \tag{26}$$

mit der Cunningham-Korrektur $\mathcal{C}$. Der angegebene Zahlenwert $\mathcal{C} = 0,83$ wird erst am Ende eingesetzt.

- Elektrostatische Kraft auf das geladene Tröpfchen: $\mathbf{F}_{\text{el}} = q\mathbf{E}$ mit Ladung q und elektrischem Feld $\mathbf{E}$ mit Betrag $E = U/d$

b.)

- Steigendes Tröpfchen: $|F_g| + |F_{\text{stokes}}| - |F_{\text{auf}}| - |F_{\text{el}}| = 0$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_{\text{Öl}} + 6\pi\eta'_{\text{Luft}} r v_1 - \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_{\text{Luft}} - q\frac{U}{d} = 0 \Rightarrow 6\pi\eta'_{\text{Luft}} r v_1 + \frac{4}{3}\pi r^3(\varrho_{\text{Öl}} - \varrho_{\text{Luft}}) = q\frac{U}{d}\,. \tag{27}$$

- Sinkendes Tröpfchen: $|F_g| - |F_{\text{stokes}}| - |F_{\text{auf}}| + |F_{\text{el}}| = 0$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_{\text{Öl}} - 6\pi\eta'_{\text{Luft}} r v_2 - \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_{\text{Luft}} + q\frac{U}{d} = 0 \Rightarrow -6\pi\eta'_{\text{Luft}} r v_2 + \frac{4}{3}\pi r^3(\varrho_{\text{Öl}} - \varrho_{\text{Luft}}) = -q\frac{U}{d}\,. \tag{28}$$

Zunächst müssen wir den unbekannten Radius r des Tröpfchens eliminieren. Dazu ist es sinnvoll, die Gleichungen (27) und (28) zu addieren:

$$6\pi\frac{\eta_{\text{Luft}}}{1+\mathcal{C}\frac{\lambda}{r}}(v_1 - v_2) + \frac{4}{3}\pi r^2 \Delta\varrho g = 0 \Rightarrow 6\pi\eta_{\text{Luft}}(v_1 - v_2) + \frac{4}{3}\pi\Delta\varrho g r^2 + \frac{4}{3}\pi\mathcal{C}\lambda\Delta\varrho g r = 0\,. \tag{29}$$

Dies führt auf folgende quadratische Gleichung

$$r^2 + \mathcal{C}\lambda r + \frac{9}{2}\frac{\eta_{\text{Luft}}(v_1 - v_2)}{\Delta\varrho g} = 0\,, \tag{30}$$

mit der Lösung

$$r_{1/2} = \frac{-\mathcal{C}\lambda \pm \sqrt{(\mathcal{C}\lambda)^2 - \frac{9\eta_{\text{Luft}}(v_1-v_2)}{\Delta\varrho g}}}{2} = -\frac{\mathcal{C}\lambda}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mathcal{C}\lambda}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\frac{\eta_{\text{Luft}}(v_1 - v_2)}{\Delta\varrho g}}\,. \tag{31}$$

Nur die erste Lösung ist physikalisch sinnvoll, denn die zweite ist negativ. Subtraktion der Gl. (27) und (28) führt auf:

$$6\pi\frac{\eta_{\text{Luft}}}{1+\mathcal{C}\frac{\lambda}{r}} r(v_1 + v_2) - 2q\frac{U}{d} = 0\,, \tag{32}$$

was sich nach q auflösen lässt:

$$\begin{aligned} q &= 3\pi\frac{\eta_{\text{Luft}}}{1+\mathcal{C}\frac{\lambda}{r}} r(v_1 + v_2)\frac{d}{U} = \\ &= \boxed{3\pi r^2\frac{\eta_{\text{Luft}}}{r+\mathcal{C}\lambda}(v_1 + v_2)\frac{d}{U}\,, \quad r = -\frac{\mathcal{C}\lambda}{2} + \sqrt{\left(\frac{\mathcal{C}\lambda}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\frac{\eta_{\text{Luft}}(v_1 - v_2)}{\Delta\varrho g}}\,,} \end{aligned} \tag{33}$$

mit dem Zahlenwert $\mathcal{C} = 0,83$ für die Cunningham-Korrektur.
Nun gibt es auch konkrete Zahlenwerte ;-)

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
Radius ($\mathcal{C} = 0$) [10^{-7} m]	3,14	4.52	2,86	3.93	5.08	4.01	3.03
Ladung ($\mathcal{C} = 0$) [10^{-19} C]	1,86	5,30	2.34	3.90	7.01	3.51	2.09
Radius ($\mathcal{C} = 0,83$) [10^{-7} m]	2,75	4,13	2.48	3.54	4,69	3,62	2.65
Ladung ($\mathcal{C} = 0,83$) [10^{-19} C]	1,26	4,03	1,52	2,84	5.49	2.57	1.39

Einteilung der Ladungen in Gruppen und Bildung der Mittelwerte führt auf $e = 1,87 \cdot 10^{-19}$ C (mit $\mathcal{C} = 0$) und $e = 1,36 \cdot 10^{-19}$ C (mit $\mathcal{C} = 0,83$). Die Fehlerrechnung schenke ich mir jetzt hier ;-)