Handout zum Übungsblatt Nr.5

Aufgabe 1

Wurde schon auf dem letzten Blatt behandelt :-)

Aufgabe 2

a)

Das ist sinnvoll, weil die Wellenlänge vom Medium abhängt: $\lambda_{\text{med}} = \lambda_0/n$, wobei λ_0 die Wellenlänge im Vakuum und n die Brechzahl des Mediums ist.

b)

Die Frequenz hängt im Gegensatz zur Wellenlänge (sowie auch der Ausbreitungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen) nicht vom Medium ab. Beispielsweise gilt für den Übergang von einem Medium mit Brechungsindex n_1 in eines mit Brechungsindex n_2:

$$\nu = \frac{c_1}{\lambda_1} = \frac{c_2}{\lambda_2}\,, \quad c_1 = \frac{c_0}{n_1}\,, \quad c_2 = \frac{c_0}{n_2}\,, \quad \lambda_1 = \frac{\lambda_0}{n_1}\,, \quad \lambda_2 = \frac{\lambda_0}{n_2}\,, \tag{1}$$

wobei c_0 die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit ist.

c)

Die Wellenzahl k ist definiert über $k = 2\pi/\lambda$. Da λ vom Medium abhängt, gilt das auch für k:

$$k_{\text{med}} = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{med}}} = \frac{2\pi}{\lambda_0} n = k_0 n\,. \tag{2}$$

Aus $E = \hbar\omega$ und $\omega(k) = ck$ (für elektromagnetische Wellen) folgt der Zusammenhang $E = \hbar ck$.

Aufgabe 3

a)

Die Ionisierungsenergie entspricht $E_{\text{ion}} = E_\infty - E_1 = 15{,}6\,\text{eV}$.

b)

Aus den üblichen Beziehungen ergibt sich:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{2\pi c\hbar}{\Delta E} = \frac{ch}{E_3 - E_1} = \frac{3\cdot 10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 6{,}626\cdot 10^{-34}\,\text{Js}}{12{,}5\cdot 1{,}602\cdot 10^{-19}\,\text{C}} \approx 9{,}93\cdot 10^{-8}\,\text{m}\,. \tag{3}$$

c)

Um das Atom anzuregen, müsste das Elektron mindestens eine Energie von $E_2 - E_1 = 10{,}3\,\text{eV}$ haben. Da dies nicht der Fall ist, hat das Elektron auch nach dem Stoß noch die Energie von $6\,\text{eV}$.

d)

Das Elektron kann entweder das Atom auf den zweiten Zustand anregen und damit eine Energie von $10{,}3\,\text{eV}$ verlieren. Dann verbleiben dem Elektron $1{,}7\,\text{eV}$. Die andere Möglichkeit ist, dass das Elektron das Atom nicht anregt. Dann wird es einfach aufgrund der negative geladenen Elektronenhülle zurück gestreut und ihm verbleibt seine komplette kinetische Energie von $12\,\text{eV}$.

Aufgabe 4

Wir betrachten das Problem unter Berücksichtigung von Energie- und Impulserhaltung und ziehen verschiedene Grenzfälle in Betracht:

1) Nicht-relativistische Rechnung, Photonenergie soll vollständig in kinetische Energie des Atoms umgewandelt werden:

$$h\nu = \frac{1}{2}mv^2\,, \quad \frac{h}{\lambda} = \frac{h\nu}{c} = mv\,. \tag{4}$$

Einsetzen der zweiten Gleichung in die erste führt auf

$$h\nu = \frac{h^2\nu^2}{2c^2m} \Rightarrow \nu_1 = 0\,, \quad \nu_2 = \frac{2mc^2}{h}\,. \tag{5}$$

Der Prozess ist also nur möglich für ein Photon der Energie $h\nu_2$. Doch muss man beachten, dass mc^2 bereits im GeV-Bereich liegt, weshalb unsere nicht-relativistische Näherung eigentlich nicht mehr gerechtfertigt ist. Deshalb rechnen wir das Ganze gleich nochmal relativistisch.

2) Relativistische Rechnung, Photonenergie soll vollständig in kinetische Energie des Atoms umgewandelt werden:

$$h\nu = (\gamma - 1)mc^2\,, \quad \frac{h\nu}{c} = \gamma mv\,. \tag{6}$$

Die zweite Gleichung führt auf

$$\frac{v}{c} = \pm\frac{h\nu}{\sqrt{(h\nu)^2 + (mc^2)^2}}\,, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\sqrt{(h\nu)^2 + (mc^2)^2}}{(mc^2)^2}\,. \tag{7}$$

Einsetzen in die erste Gleichung ergibt dann weiter

$$h\nu = (\gamma - 1)mc^2 = \left(\frac{\sqrt{(h\nu)^2 + (mc^2)^2} - mc^2}{mc^2}\right) \cdot mc^2 = \sqrt{(h\nu)^2 + (mc^2)^2} - mc^2\,. \tag{8}$$

Diese Gleichung ist nur zu erfüllen für $\nu = 0$. Damit ist gezeigt, dass der Prozess so nicht möglich ist.

3) Relativistische Rechnung, Photonenergie soll teilweise in kinetische Energie umgewandelt werden

Ein Elektron im Atom soll auf einen höheren Zustand der Energie $E' < h\nu$ angeregt werden. Dann gilt für Energie- und Impulserhaltung:

$$h\nu = (\gamma - 1)mc^2 + E'\,, \quad \frac{h\nu}{c} = \gamma mv\,. \tag{9}$$

Eine analoge Rechnung wie bei (2), die ihr selbst als Übung durchführen könnt ;-) führt dann auf:

$$h\nu = \frac{E'(E' - 2mc^2)}{2(E' - mc^2)} = E'\frac{1 - \frac{E'}{2mc^2}}{1 - \frac{E'}{mc^2}}\,. \tag{10}$$

Da Anregungsenergien E' im Bereich von eV und mc^2 im Bereich von GeV liegt, ist der Prozess also nur möglich für $h\nu \simeq E'$, wenn also die Photonenergie praktisch der Anregungsenergie entspricht. (Deshalb und auch wegen des Doppler-Effekts sind Spektrallinien ein bisschen verwaschen.) Die Absorption eines Photons, dessen Energie sehr stark von E' abweicht, ist nicht möglich und damit ist auch das Problem aus dem Tutorium gelöst :-)

Zusätzlich ist die sogenannte **Raman-Streuung** möglich. Damit wird die inelastische Streuung eines Photons and einem Atom/Molekül bezeichnet. Inelastisch heißt, dass die Energie des Photons $h\nu$ nicht genau der Differenz zweier Energieniveaus $E_{i+1} - E_i$ des Atoms entspricht. Dann kann es passieren, dass

- ein Photon bei der Streuung Energie verliert (Stokes-Raman-Streuung)

$$h\nu' = h\nu - (E_{i+1} - E_i)\,, \tag{11}$$

- oder dass das Photon Energie gewinnt (Stokes-Raman-Streuung):

$$h\nu' = h\nu + (E_{i+1} - E_i)\,. \tag{12}$$

Nur, damit die Begriffe mal gefallen sind ;-)

Aufgabe 5

Die Balmer-Serie wird gebildet aus Übergängen $E_{2\mapsto 3}$, $E_{2\mapsto 4}$, ..., $E_{2\mapsto\infty}$. Um diese Absorptionslinien zu erzeugen, sollten sich genügend Atome in einem Balmer-Zustand mit $n = 2$ befinden. Im thermodynamischen Gleichgewicht ist dieser Zustand nach dem Boltzmann-Gesetz jedoch exponentiell stark unterdrückt bei Zimmertemperatur ($k_BT \approx 0,025$ für $T = 293\,\mathrm{K}$):

$$N_{n=2} = N\exp\left(-\frac{E_2 - E_1}{k_BT}\right) = N\exp\left(-\frac{10\,\mathrm{eV}}{0,025\,\mathrm{eV}}\right) = N\exp(-400) \approx 1,9\cdot 10^{-174}N\,. \tag{13}$$

Selbst, wenn wir Teilchenzahlen N im Molbereich betrachten, ist $N_{n=2}$ praktisch gleich null. Man kann die exponentielle Boltzmann-Unterdrückung jedoch mildern, indem man zu höheren Temperaturen übergeht. Beispielsweise würde auf der Sonnenoberfläche mit $T_S = 5800\,\mathrm{K}$ gelten (mit $k_BT \approx 0,500$ für $T_S = 5800\,\mathrm{K}$):

$$N_{n=2} = N\exp\left(-\frac{10\,\mathrm{eV}}{0,500\,\mathrm{eV}}\right) = N\exp(-20) \approx 2,1\cdot 10^{-9}N\,. \tag{14}$$

Dieser Wert ist nun nicht mehr unerheblich klein im Gegensatz zu vorher. Deshalb kann man Balmer-Übergänge in Sternen vermuten.

Aufgabe 6

Die zeitabhängige Schrödingergleichung ist gegeben durch

$$\widehat{H}|\psi(x,t) = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)\,. \tag{15}$$

Mittels des Separationsansatzes

$$\psi(x,t) = \psi(x)\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Et\right)\,, \tag{16}$$

folgt

$$\widehat{H}\psi(x)\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Et\right) = E\psi(x)\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Et\right)\,, \tag{17}$$

und wenn man die Exponentialfunktion herausdividiert die Eigenwertgleichung für die Energie, also die stationäre Schrödingergleichung:

$$\boxed{\widehat{H}\psi(x) = E\psi(x)\,.} \tag{18}$$

Man kann das Problem noch allgemeiner angehen. Macht man einen Separationsansatz der Form

$$\psi(x,t) = \phi(x)\chi(t)\,, \tag{19}$$

so folgt durch Einsetzen in die zeitabhängige Schrödingergleichung:

$$\widehat{H}\phi(x)\chi(t) = \mathrm{i}\hbar\phi(x)\frac{\partial\chi(t)}{\partial t}\,. \tag{20}$$

bzw. durch Division durch $\chi(t) \neq 0$:

$$\widehat{H}\phi(x) = \mathrm{i}\hbar\phi(x)\frac{1}{\chi(t)}\frac{\partial\chi(t)}{\partial t}\,. \tag{21}$$

Die linke Seite der Gleichung hängt nur von x ab, womit auch die rechte Seite nur von x abhängen darf. Da der Ausdruck

$$\mathrm{i}\hbar\frac{1}{\chi(t)}\frac{\partial\chi(t)}{\partial t}\,, \tag{22}$$

nicht von x abhängt und nicht von t abhängen darf, muss er konstant sein. Diese Konstante ist die Energie E:

$$\mathrm{i}\hbar\frac{1}{\chi(t)}\frac{\partial\chi(t)}{\partial t} = E\,. \tag{23}$$

Damit folgt die zeitunabhängige Schrödingergleichung (18). Betrachtet man außerdem noch die Differentialgleichung (23) für $\chi(t)$, so erkennt man die Lösung

$$\chi(t) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Et\right) , \tag{24}$$

in Einklang mit (17) und außerdem $\chi(t) \neq 0$, was wir bei der Division durch $\chi(t)$ benötigt haben.

Aufgabe 7

a)

Wir unterteilen die x-Achse in zwei Gebiete, nämlich $I_1 = (0, a)$ und $I_2 = (-\infty, 0] \cup [a, +\infty)$. Da das Potential für $x \in I_2$ unendlich hoch ist, handelt es sich bei I_2 sogar um einen quantenmechanisch verbotenen Bereich, in dem die Aufenthaltswahrscheinlichkeit, also $|\psi(x)|^2$ (und damit auch die Wellenfunktion $\psi(x)$) eines Teilchens verschwindet. Für $x \in I_1$ müssen wir die Schrödinger-Gleichung lösen, die für diesen potentialfreien Bereich wie folgt lautet:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2} = E\psi(x) . \tag{25}$$

Dabei handelt es sich um eine homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung bezüglich $\psi(x)$ (analog zum harmonischen Oszillator aus der klassischen Mechanik). Wir kennen deren Lösungen und zwar lassen sich diese entweder als Linearkombination von komplexen Exponentialfunktionen $\{\exp(\mathrm{i}kx), \exp(-\mathrm{i}kx)\}$ oder von trigonometrischen Funktionen $\{\cos(kx), \sin(kx)\}$ schreiben. Wir wählen die zweite Variante mit trigonometrischen Funktionen aus Gründen, die ein paar Zeilen später klar werden ;-) Also machen wir den Ansatz $\psi(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$ mit noch zu bestimmenden Konstanten A, B und k.
Aufgrund der Forderung nach Stetigkeit der Wellenfunktion muss diese an den Rändern $x_1 = 0$ und $x_2 = a$ auf null abfallen, also sind die Randbedingungen $\psi(x_1 = 0) = 0$ und $\psi(x_2 = a) = 0$ zu erfüllen. Aus der ersten Bedingung folgt sofort $A = 0$ und aus der zweiten lässt sich k bestimmen:

$$B\sin(ka) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow ka = n\pi \Rightarrow k = \frac{n\pi}{a} , \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} . \tag{26}$$

Wir schließen $n = 0$ von vorn herein aus, da dies zu $\psi(x) = 0$ führt, was einem leeren (und damit auch physikalisch uninteressantem Potentialtopf) entspricht. Wir bezeichnen die Wellenfunktion ab sofort mit dem Index n, also als $\psi_n(x)$. Unbestimmt ist jetzt nur noch die Konstante B. Diese ergibt sich durch Normierung der Wellenfunktion:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n(x)|^2 \,\mathrm{d}x = B^2 \int_0^a \sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \mathrm{d}x . \tag{27}$$

Das Integral bestimmt man am Geschicktesten durch Umformung trigonometrischer Funktionen:

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos^2(x) + \sin^2(x) - 2\sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x) \Rightarrow \sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) . \tag{28}$$

Damit folgt

$$\frac{B^2}{2}\int_0^a \left\{1 - \cos\left(\frac{2n\pi}{a}x\right)\right\} \mathrm{d}x = \frac{B^2}{2}\left[x - \frac{a}{4\pi n}\sin\left(\frac{2n\pi}{a}x\right)\right]_0^a = \frac{B^2}{2}a \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow |B| = \sqrt{\frac{2}{a}} . \tag{29}$$

Damit gilt also

$$\boxed{\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) .} \tag{30}$$

Einsetzen in die Schrödingergleichung liefert dann noch die Energieniveaus des Potentialtopfes:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \left\{\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\right\} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \psi(x) \stackrel{!}{=} E\psi(x) . \tag{31}$$

Damit lässt sich E direkt ablesen:

$$\boxed{E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 .} \tag{32}$$

Zeichnen könnt ihr die Wellenfunktionen selber ;-) (oder in die Musterlösung schauen)

b)

Wir interessieren uns für den Erwartungswert des Ortsoperators $\widehat{x}$ für alle n. In der Ortsdarstellung gilt $\widehat{x}=x$ und damit:

$$\langle\widehat{x}\rangle_n=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi_n^*(x)\widehat{x}\psi_n(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x|\psi_n(x)|^2\,\mathrm{d}x=\frac{2}{a}\int\limits_0^a x\sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\,\mathrm{d}x\overset{\frac{n\pi}{a}x=y}{=}$$

$$=\frac{2}{a}\cdot\left(\frac{a}{n\pi}\right)^2\int\limits_0^{n\pi}y\sin^2(y)\,\mathrm{d}y\,. \tag{33}$$

Zur Berechnung des Integrals verwenden wir die Formel aus (a) und anschließende partielle Integration:

$$\int y\sin^2(y)\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int(y-y\cos(2y))\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}y\sin(2y)+\frac{1}{2}\int\sin(2y)\,\mathrm{d}y\right\}=$$

$$=\frac{1}{4}\left\{y^2-y\sin(2y)-\frac{1}{2}\cos(2y)\right\}\,. \tag{34}$$

Damit gilt also

$$\int\limits_0^{n\pi}y\sin^2(y)\,\mathrm{d}y=\frac{1}{4}\left\{(n\pi)^2-\frac{1}{2}\right\}+\frac{1}{8}=\frac{(n\pi)^2}{4}\,, \tag{35}$$

und somit

$$\langle x\rangle_n=\frac{2a}{(n\pi)^2}\cdot\frac{(n\pi)^2}{4}=\boxed{\frac{a}{2}\,.} \tag{36}$$

Also werden viele Ortsmessungen des Elektrons im Potentialtopf ergeben, dass sich dieses im Mittel in der Mitte des Topfes, also bei $x=a/2$ aufhält und das vollkommen unabhängig davon, in welchem Zustand (in Abhängigkeit von n) sich das Elektron befindet.

c)

Die Energieniveaus des Potentialtopfes haben wir bereits in (a) berechnet. Der Grundzustand sei der mit $n=1$ und der erste angeregte Zustand der mit $n=2$, also:

$$\Delta E=E_2-E_1=\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{a^2}\left(2^2-1^2\right)=\frac{3\pi^2}{2}\frac{\hbar^2}{ma^2}=$$

$$=\frac{3\pi^2}{2}\frac{\left(\frac{6{,}626\cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}}{2\pi}\right)^2}{9,11\cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}\cdot(10^{-10}\,\mathrm{m})^2}\frac{\mathrm{eV}}{1,602\cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}}\approx 112,8\,\mathrm{eV}\,. \tag{37}$$

Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit, müssen wir über die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\psi_1(x)|^2$ des Grundzustands integrieren und zwar für das Intervall $[x_1,x_2]$ mit $x_1=0,49\cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$ und $x_2=0,51\cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$. Außerdem sollen wir die Näherung verwenden, dass wir die variable Wellenfunktion $\psi(x)$ durch ihren Wert in der Mitte des Intervalls, also $\psi(x_0=0,5\cdot 10^{-10}\,\mathrm{m})$ ersetzen. Dies ist für den Grundzustand und im Bereich der Mitte des Topfes sicher eine gerechtfertigte Näherung, da hier die Wellenfunktion wenig von x abhängt. Dies liefert dann:

$$P=\int\limits_{x_1}^{x_2}|\psi_1(x)|^2\,\mathrm{d}x\simeq\int\limits_{x_1}^{x_2}|\psi_1(x_0)|^2\,\mathrm{d}x=|\psi_1(x_0)|^2(x_2-x_1)=\left|\psi_1\left(\frac{a}{2}\right)\right|^2(x_2-x_1)=$$

$$=\frac{2}{a}\sin^2\left(\frac{\pi}{a}\cdot\frac{a}{2}\right)(x_2-x_1)=\frac{2(x_2-x_1)}{a}=\frac{2\cdot(0,51-0,49)\cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}}{10^{-10}\,\mathrm{m}}=0,04\,. \tag{38}$$

Aufgabe 8

Wir verwenden die folgende Formel für das allgemeine Gaußsche Integral (folgt durch quadratische Ergänzung, Nachrechnen als Übung ;-)

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp(-ax^2+bx+c)\,\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\left(\frac{b^2}{4a}+c\right)\,, \tag{39}$$

welche sich aus dem Hinweis (quadratische Ergänzung plus anschließende Substitution) ergibt. Für $t = 0$ ist zuerst die Wellenfunktion zu normieren.

$$\begin{aligned}\psi(x,t=0) &= N\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{k^2}{2(\Delta k)^2}\right)\exp(\mathrm{i}kx)\,\mathrm{d}k = N\sqrt{2\pi\Delta k^2}\exp\left(-\frac{x^2}{4\cdot\frac{1}{2(\Delta k)^2}}\right) = \\ &= N\sqrt{2\pi}\Delta k\exp\left(-\frac{x^2}{2(\Delta k)^2}\right)\,. \end{aligned} \tag{40}$$

Das ist genau das Zwischenergebnis. Nun zur Normierung:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\psi(x,t=0)|^2\,\mathrm{d}x = 2\pi N^2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{(\Delta k)^2}\right)\,\mathrm{d}x = 2\pi N^2\sqrt{\pi(\Delta k)^2} = 2\pi^{3/2}N^2(\Delta k) \overset{!}{=} 1 \tag{41}$$

Daraus folgt dann

$$\boxed{|N| = \frac{1}{\sqrt{2\Delta k}\pi^{3/4}}\,.} \tag{42}$$

Um für $t > 0$ die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte $|\psi(x,t)|^2$ zu bestimmen, müssen wir zunächst $\psi(x,t)$ berechnen. Dies funktioniert wie zuvor, ist jetzt aber ein bisschen aufwendiger. Betrachtet werden freie Teilchen der Masse m; diese besitzen die Dispersionsrelation (Materiewellen)

$$E = \frac{\hbar^2k^2}{2m}\,, \tag{43}$$

die sich direkt aus der freien Schrödinger-Gleichung ergibt. Nun ist

$$\begin{aligned}\psi(x,t) &= N\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{k^2}{2(\Delta k)^2}\right)\exp\left\{\mathrm{i}\left(kx-\frac{\hbar k^2}{2m}t\right)\right\}\,\mathrm{d}k = \\ &= N\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-k^2\left(\frac{1}{2(\Delta k)^2}+\frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}t\right)+\mathrm{i}kx\right\}\,\mathrm{d}k = \\ &= N\sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{2(\Delta k)^2}+\frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}t}}\exp\left\{-\frac{x^2}{4\left(\frac{1}{2(\Delta k)^2}+\frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}t\right)}\right\} = \\ &= N\sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{2(\Delta k)^2}+\frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}t}}\exp\left\{-\frac{x^2}{4\left(\frac{1}{4(\Delta k)^4}+\frac{\hbar^2}{4m^2}t^2\right)}\left(\frac{1}{2(\Delta k)^2}-\frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}t\right)\right\} = \\ &= N\Delta k\sqrt{\frac{2\pi m}{m+\mathrm{i}\hbar(\Delta k)^2t}}\exp\left\{-\left(\frac{1}{2(\Delta k)^2}-\frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}t\right)\frac{m^2(\Delta k)^4x^2}{m^2+\hbar^2(\Delta k)^4t^2}\right\}\,. \end{aligned} \tag{44}$$

Prinzipiell könnte man diesen Ausdruck nun noch stark vereinfachen. Da wir aber nur an der Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte $|\psi(x,t)|^2$ interessiert sind, können wir damit weiter rechnen:

$$|\psi(x,t)|^2 = N^2(\Delta k)^2\frac{2\pi m}{\sqrt{m^2+\hbar^2(\Delta k)^4t^2}}\exp\left(-\frac{m^2(\Delta k)^2}{m^2+\hbar^2(\Delta k)^4t^2}x^2\right)\,. \tag{45}$$

Mit dem zuvor bestimmten Normierungsfaktor gilt dann:

$$\boxed{|\psi(x,t)|^2 = \frac{m\Delta k}{\sqrt{\pi(m^2+\hbar^2(\Delta k)^4t^2)}}\exp\left(-\frac{m^2(\Delta k)^2}{m^2+\hbar^2(\Delta k)^4t^2}x^2\right)\,.} \tag{46}$$

- Dabei handelt es sich um eine Gaußfunktion mit zweiabhängiger Breite:

$$\boxed{(\Delta x)(t) = 2\frac{\sqrt{m^2+\hbar^2(\Delta k)^4t^2}}{m\Delta k}\,.} \tag{47}$$

Dies bedeutet, dass das Wellenpaket im Ortsraum mit der Zeit zerfließt. Dies geschieht für Dispersionsrelationen, die von quadratischer oder höherer Ordnung sind. Man kann außerdem nachrechnen, dass die Breite des Wellenpakets im Impulsraum zeitlich konstant ist. Die Zeitabhängigkeit kommt erst durch die Fourier-Transformation in den Ortsraum zustande.

- Die Fläche unter dem Wellenpaket hängt nicht von der Zeit ab:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x,t)|^2 \, \mathrm{d}x = \frac{m\Delta k}{\sqrt{\pi(m^2 + \hbar^2(\Delta k)^4 t^2)}} \sqrt{\frac{\pi}{\frac{m^2(\Delta k)^2}{m^2+\hbar^2(\Delta k)^4 t^2}}} = 1 \,. \tag{48}$$

  Darin steckt gerade die Erhaltung der Wahrscheinlichkeit (Unitarität).