Handout zum Übungsblatt Nr.6

Aufgabe 1

- Korrespondenzprinzip: Dieses besagt, dass für große Quantenzahlen sich quantenmechanische Systeme klassisch verhalten. Beispielsweise lässt gehorcht ein Elektron in einem Atom, das sich in einem stark angeregten Zustand mit $n \gg 1$ befindet (Rhydbergatom) mit sehr guter Näherung den klassischen Bewegungsgleichungen à la Newton.
- Ehrenfest-Theorem: Dieses besagt, dass die quantenmechanischen Erwartungswerte (unter gewissen Voraussetzungen) die klassischen Bewegungsgleichungen erfüllen. Beispielsweise erfüllen $\langle p \rangle$ und $\langle x \rangle$ die klassischen Bewegungsgleichungen, sofern es sich um ein System mit einem Potential $V(x)$ handelt, das höchstens quadratisch in x ist.

Aufgabe 2

Das Positronium kann zunächst im klassischen Sinne als Zweikörperproblem aufgefasst werden. Dabei wird die Bewegung in eine Bewegung bezüglich der Schwerpunktkoordinaten und eine bezüglich der Relativkoordinaten zerlegt. Im allgemeinen ist die Schwerpunktsbewegung charakterisiert durch die Koordinate des Schwerpunkts

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{M}, \tag{1}$$

mit der Schwerpunktsmasse $M = m_1 + m_2$. Der Schwerpunkt des Positroniums sei jedoch in Ruhe und somit findet die Dynamik in den Relativkoordinaten $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ mit der effektiven Masse

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \tag{2}$$

statt. Speziell für das Positronium gilt

$$\mu = \frac{m_\mathrm{e}^2}{2m_\mathrm{e}} = \frac{m_\mathrm{e}}{2}. \tag{3}$$

Betrachten wir nun das Problem im Zuge der „alten Quantenmechanik“, also nach dem Bohrschen Atommodell. In diesem ist der Drehimpuls quantisiert:

$$L_z = \frac{m}{2}\omega r^2 \stackrel{!}{=} n\hbar \Rightarrow r = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega} n}. \tag{4}$$

Aus dem Kräftegleichgewicht zwischen Coulomb-Kraft und Zentripetalkraft

$$F_C \stackrel{!}{=} F_Z \Leftrightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2} \stackrel{!}{=} \frac{m}{2}\omega^2 r, \tag{5}$$

lässt sich nun über Gl. (4) die Kreisfrequenz bestimmen:

$$\omega^2 = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{mr^3} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{m}\left(\frac{m}{2\hbar n}\right)^{\frac{3}{2}} \omega^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \sqrt{\omega} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{m}\left(\frac{m}{2\hbar n}\right)^{\frac{3}{2}}, \tag{6}$$

also

$$\omega = \frac{1}{4\pi^2\varepsilon_0^2}\frac{e^4}{m^2}\frac{m^3}{8\hbar^3 n^3} = \boxed{\frac{me^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^3}\frac{1}{n^3}.} \tag{7}$$

Setzen wir dies nun wieder in den Radius r von Gl. (4) ein, so führt das auf:

$$\boxed{r = \frac{8\pi\varepsilon_0\hbar^2}{e^2 m} n^2.} \tag{8}$$

Die gesamte Energie setzt sich zusammen aus der kinetischen und der potentiellen Energie im Coulomb-Feld. Damit gilt

$$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{1}{2}\mu\omega^2\frac{\hbar n}{\mu\omega} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{1}{2}\omega\hbar n - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2\hbar n}\cdot\frac{e^4 m}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^3 n^3}} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{e^4 m}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2 n^2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{e^2 m}{8\pi\varepsilon_0\hbar^2 n^2} = \boxed{-\frac{e^4 m}{64\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2}\frac{1}{n^2}\,.} \tag{9}$$

Einsetzen der Zahlenwerte liefert dann noch

$$E = \frac{(1,602\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C})^4\cdot 9,11\cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}}{64\pi^2\left(8,854\cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}\right)^2\cdot\left(\frac{6,626\cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}}{2\pi}\right)^2}\frac{\mathrm{eV}}{1,602\cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}}\frac{1}{n^2} \approx -\frac{6,80}{n^2}\,\mathrm{eV}\,, \tag{10}$$

und

$$r = 1,06\cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}\,,\quad \omega = 2,07\cdot 10^{16}\,\frac{1}{\mathrm{s}}\,. \tag{11}$$

Aufgabe 3

a)

Eine analoge Rechnung wie zuvor mit der effektiven Masse

$$\mu = \frac{207 m_\mathrm{e} m_\mathrm{p}}{207 m_\mathrm{e} + m_\mathrm{p}} \approx \frac{207\cdot 9,11\cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}\cdot 1,637\cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}}{207\cdot 9,11\cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg} + 1,637\cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}} \approx 1,69\cdot 10^{-28}\,\mathrm{kg}\,, \tag{12}$$

führt auf die Energie des Myoniums:

$$\boxed{E = -\frac{\mu e^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2}\frac{1}{n^2}\,,} \tag{13}$$

mit dem Zahlenwert

$$E = -\frac{1,69\cdot 10^{-28}\,\mathrm{kg}\cdot(1,602\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C})^4}{32\pi^2\cdot\left(8,854\cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}\right)^2\cdot\left(\frac{6,626\cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}}{2\pi}\right)^2}\cdot\frac{\mathrm{eV}}{1,602\cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}}\frac{1}{n^2} \approx -\frac{2525}{n^2}\,\mathrm{eV}\,. \tag{14}$$

b)

Für den Radius der Bohrschen Bahn mit $n = 1$ gilt (analog zur Aufgabe 3):

$$r = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{e^2\mu}n^2 = \frac{4\cdot\left(\frac{6,626\cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}}{2\pi}\right)^2\pi\cdot 8,854\cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}}{(1,602\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C})^2\cdot 1,69\cdot 10^{-28}\,\mathrm{kg}} \approx 2,85\cdot 10^{-13}\,\mathrm{m}\,. \tag{15}$$

c)

Die Energie des Photons entspricht der Differenz der Energieniveaus

$$\Delta E = E(n=2) - E(n=1) = \boxed{\frac{3\mu e^4}{128\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2}\,,} \tag{16}$$

mit den Zahlenwert

$$\Delta E = \frac{3\cdot 1,69\cdot 10^{-28}\,\mathrm{kg}\cdot(1,602\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C})^4}{128\pi^2\cdot\left(8,854\cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}\right)^2\cdot\left(\frac{6,626\cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}}{2\pi}\right)^2}\frac{\mathrm{eV}}{1,602\cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}} \approx 1893\,\mathrm{eV}\,. \tag{17}$$

Aufgabe 4

a)

Ein Minimum im Anodenstromverlauf deutet auf eine Anregung der Gasatome durch die Elektronen hin. Bei einer Spannung $U_B = 4\,\mathrm{V}$ ist mit $\Delta U_\mathrm{B} = 2,104$ ist eine einzige Anregung möglich. Die Wellenlänge des Lichts, das dann emittiert wird, entspricht der Energie dieser Anregung. Damit gilt

$$\lambda = \frac{hc}{e\Delta U_B} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js} \cdot 3 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{1,602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \cdot 2,104\,\mathrm{V}} \frac{\mathrm{eV}}{1,602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}} \approx 5,90 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m} = 5,90\,\mathrm{nm}\,. \tag{18}$$

Dies entspricht gelbem Licht. Bei $U_B = 5\,\mathrm{V}$ können zwei Atome nacheinander angeregt werden, die dann aber ebenfalls gelbes Licht abstrahlen.

b)

Natriumdampf oder das Edelgas ^{86}Krypton leuchten im gelben Spektralbereich; damit kann es sich um eines der beiden Gase handeln.

c)

Damit eine Anregung stattfinden kann, muss die kinetische Energie der Elektronen der Anregungenergie $e\Delta U_B$ entsprechen. Dies führt auf

$$v = \sqrt{\frac{2e\Delta U_\mathrm{B}}{m}} \approx 8,60 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,. \tag{19}$$

Wegen $v \ll c$ ist eine nicht-relativistische Rechnung gerechtfertigt.

Aufgabe 5

Schon das Heliumatom ist mit seinen zwei Elektronen quantenmechanisch (und auch klassisch) nicht exakt lösbar. Der angegebene Wert der gesamten Ionisierungsenergie $E_i = 79\,\mathrm{eV}$ wurde entweder durch Näherungsmethoden bestimmt oder ist ein experimenteller Wert. Ist dieser jedoch bekannt, kann die Energie zum Ablösen des ersten bzw. zweiten Elektrons leicht bestimmt werden. Zum Ablösen des ersten Elektrons brauche man eine Energie $E_{i,1}$, die wir zunächst nicht kennen. Danach handelt es sich bei dem Heliumatom um ein Wasserstoff-ähnliches Atom mit der Kernladungszahl $Z = 2$ und dessen Ionisierungsenergie $E_{i,2}$ ist bekannt (siehe Wasserstoffatom und auch Aufgabe 3):

$$E_{i,2} = \frac{Z^2 e^4 m}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^2} \approx 54,4\,\mathrm{eV}\,. \tag{20}$$

Daraus folgt dann sofort $E_{i,1}$, denn die Summe aus $E_{i,1}$ und $E_{i,2}$ muss der gesamten Ionisierungsenergie E_i entsprechen. Damit ist $E_{i,1} = E_i - E_{i,2} \approx 24,6\,\mathrm{eV}$.

Aufgabe 6

Das Atom befinde sich anfangs im Zustand mit $n = 2$ und nach der Emission im Zustand mit $n = 1$. Die Energieerhaltung liefert

$$E(n=2) = E(n=1) + h\nu + T_R\,, \quad T_R = \frac{p^2}{2m}\,, \tag{21}$$

wobei $h\nu$ die Energie des emittierten Photons und T_R die Rückstoßenergie des Atoms ist. Der Rückstoßimpuls p ergibt sich aus der Impulserhaltung und entspricht dem Impuls des Photons:

$$p = \frac{h\nu}{c}\,. \tag{22}$$

Löst man nun Gl. 21 nach ν auf, so ergibt sich mit $\Delta E = E(n=2) - E(n=1)$:

$$\nu = \frac{c}{h}\left(\sqrt{(mc)^2 + 2m\Delta E} - mc\right) = \frac{mc^2}{h}\left(\sqrt{1 + \frac{2\Delta E}{mc^2}} - 1\right)\,. \tag{23}$$

Wegen $\Delta E \ll mc^2$ und $\sqrt{1+x} = 1 + x/2 + \mathcal{O}(x^2)$ geht dies über in

$$\nu \approx \frac{mc^2}{h} \cdot \frac{\Delta E}{mc^2} = \frac{\Delta E}{h} \,. \tag{24}$$

Damit können wir nun die Rückstoßenergie berechnen:

$$T_R = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2m} \left(\frac{h\nu}{c} \right)^2 \approx \boxed{\frac{\Delta E^2}{2mc^2} \,.} \tag{25}$$

Nun zu den Zahlenwerten:

$$\Delta E = E(n=2) - E(n=1) = -\frac{e^4 m}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^2} \left(\frac{1}{4} - 1 \right) \approx 10,2\,\mathrm{eV} \,. \tag{26}$$

Damit ergibt sich dann

$$T_R = 5,53 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{eV} \,, \tag{27}$$

also eine (sogar in der Einheit eV) sehr kleine Energie, die man gewöhnlicherweise vernachlässigen kann.
Nach der Energie-Zeit-Unbestimmtheitsrelation erhalten wir mittels der angegebenen Lebensdauer eine Energieunschärfe $\Delta E = \hbar/(2\Delta t) \approx 1,65 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{eV}$. Diese Unschärfe entspricht einer Linienbreite des Übergangs. Damit die Resonanzabsorption stattfinden kann, muss die Frequenz des Photons eine Unschärfe besitzen (diese entspricht der halben Linienbreite), so dass diese dazu dienen kann, um die nötige Rückstoßenergie für den Kern zu liefern, also $\Delta E \geq 2T_R$. Dies ist hier erfüllt, also ist Resonanzabsorption möglich.