Physik IV – Atome und Moleküle SS11

Prof. Thomas Müller, Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Dr. Frank Hartmann, Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Aufgabenblatt 2; Übung am 02. Mai (Montag)
Übungsleiter: Frank Hartmann, Forschungszentrum Karlsruhe,
Tel.: +41 (76) 487 4362; Email: Frank.Hartmann@cern.ch

LÖSUNGEN Übung 2

1. Elementarteilchen, Kräfte, Proton
   Elemtarteilchen siehe Figur 1.

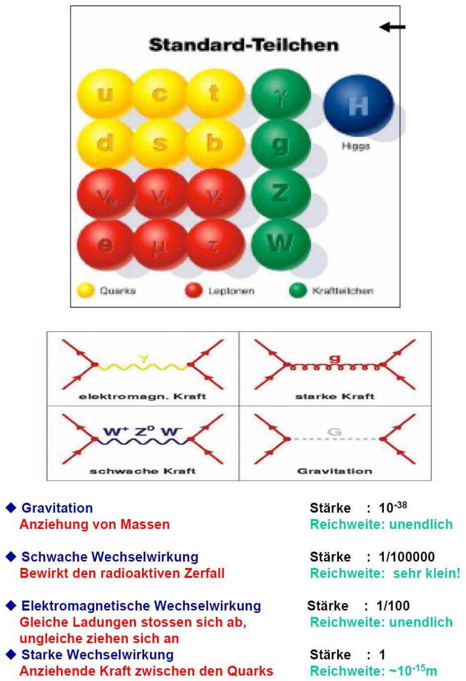

Abbildung 1: *Die 12 Elementarteilchen und die 4 fundamentalen Kräfte*

Die "Wer wird Millionär" Frage ist völliger Blödsinn. Ausschließlich das Elektron ist ein Elementarteilchen. Ich denke allerdings die "Richtige" Antwort wäre in dem Fall Molekül gewesen.

In der Physik IV reicht es zu wissen, dass das Proton nicht nur aus up,up,down besteht, sondern ein beträchtlicher Teil aus Gluonen und See-Quarks besteht, wobei die See-Quark natürlich Quarks und Anti-Quarks sind. Siehe Figur 2.

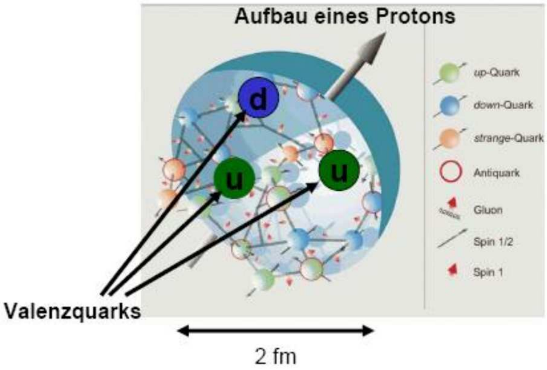

Abbildung 2: *Das Proton, mehr als up,up,down.*

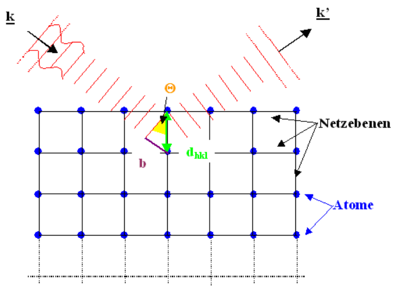

Abbildung 3: *Skizze: Bragg-Winkel*

2. Bragg-Reflexion

   Bedingung für konstruktive Interferenz:
   $n \cdot \lambda = 2 \cdot b$
   mit $b = d_{hkl} \cdot \sin\theta_B$ ergibt sich schließlich der gesuchte Bragg-Winkel zu:

   $$\sin\theta_B = \frac{n \cdot \lambda}{2 \cdot d_{hkl}}$$

   Bemerkungen:

   - Mit d_{hkl} wird der Abstand zweier Netzebenen aus einer Netzebenenschar unter Verwendung der Millerschen Indizes bezeichnet. Welche man sich heraus greift spielt keine Rolle das Ergebnis für den Bragg-Winkel ist immer das Obige.
   - Die Bragg-Bedingung gibt nur an wo man einen Bregg-Reflex erwartet, nicht ob es wirklich einen gibt (Basis) und schon gar nicht die Intensität (Debye-Waller-Faktor).
   - Für $n \cdot \lambda > 2 \cdot d_{hkl}$ gibt es keine Lösung, d.h. sobald die Wellenlnge größer als zwei Mal die Gitterkonstante ist gibt es keine Möglichkeit zur konstruktiven Interferenz mehr.

3. Milikan

   (a) Gewichtskraft des Tröpfchen; Auftriebskraft; Stokes'sche Reibungskraft; Elektrische Kraft

(b) Zunächst muss man sich klarmachen, dass für U_1 das Tröpfchen steigt, nach dem Umpolen zu $U_2 = -U_1$ das selbe Tröpfchen sinkt.

i. Einfache Lösung:
Wir vernachlässigen die Auftriebskraft sowie die Cunningham-Korrektur, da ρ_{Luft} und λ_{Luft} klein sind. Es gilt dann:

- Steigendes Tröpfchen (U_1, v_1): $|F_\text{R}| + |F_\text{G}| = |F_\text{El}|$
- Sinkendes Tröpfchen (U_2, v_2): $|F_\text{R}| = |F_\text{El}| + |F_\text{G}|$

Damit bekommt man zwei Gleichungen für q und r (mit $U = |U_1| = |U_2|$):

$$6\pi\eta_{\text{Luft}} r v_1 + mg = q \cdot \frac{U}{d} \tag{1}$$

$$6\pi\eta_{\text{Luft}} r v_2 = q \cdot \frac{U}{d} + mg \tag{2}$$

Zunächst bestimmen wir r, dazu bilden wir (2)-(1) und mit $m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{\text{Oel}}$ erhalten wir dann:

$$\begin{aligned} 6\pi\eta_{\text{Luft}} r(v_2 - v_1) &= 2mg \\ 6\pi\eta_{\text{Luft}} r(v_2 - v_1) &= 2 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{\text{Oel}} \cdot g \\ r &= \frac{3}{2}\sqrt{\frac{(v_2 - v_1)\eta_{\text{Luft}}}{\rho_{\text{Oel}} g}} \end{aligned}$$

Jetzt können wir q bestimmen, indem wir (1) und (2) addieren und das eben gewonnen r einsetzen.

$$\begin{aligned} 6\pi\eta_{\text{Luft}} r(v_1 + v_2) &= 2q \cdot \frac{U}{d} \\ q &= 3\pi\eta_{\text{Luft}} r(v_1 + v_2) \cdot \frac{d}{U} \\ q &= 3\pi\eta_{\text{Luft}} \frac{3}{2}\sqrt{\frac{(v_2 - v_1)\eta_{\text{Luft}}}{\rho_{\text{Oel}} g}} \cdot (v_1 + v_2) \cdot \frac{d}{U} \\ q &= \frac{9}{2}\pi \cdot \frac{d}{U} \cdot \sqrt{\frac{\eta_{\text{Luft}}^3}{\rho_{\text{Oel}} g}} \cdot (v_1 + v_2) \cdot \sqrt{(v_2 - v_1)} \end{aligned}$$

ii. Ausführliche Lösung:

- Steigendes Tröpfchen (U_1, v_1): $|F_\text{R}| + |F_\text{G} - F_\text{A}| = |F_\text{El}|$
- Sinkendes Tröpfchen (U_2, v_2): $|F_\text{R}| = |F_\text{El}| + |F_\text{G} - F_\text{A}|$

Mathematisch ist das die gleiche Vorgehensweise allerdings mit ein wenig mehr Aufwand. Die Auftriebskraft lässt sich leicht mit berücksichtigen, es muss lediglich ρ_{Oel} durch $\Delta\rho = \rho_{\text{Oel}} - \rho_{\text{Luft}}$ ersetzt werden.

$$6\pi\eta'_{\text{Luft}} r v_1 + (m_{\text{Oel}} - m_{\text{Luft}})g = q \cdot \frac{U}{d} \tag{3}$$

$$6\pi\eta'_{\text{Luft}} r v_2 = q \cdot \frac{U}{d} + (m_{\text{Oel}} - m_{\text{Luft}})g \tag{4}$$

Wieder bestimmen wir zunächst einmal r, auch hierfür bilden wir (4)-(3) setzen $m_{\text{Oel}} - m_{\text{Luft}} = \frac{4}{3}\pi r^3(\rho_{\text{Oel}} - \rho_{\text{Luft}}) = \frac{4}{3}\pi r^3 \Delta\rho$ und $\eta'_{\text{Luft}} = \dfrac{\eta_{\text{Luft}}}{1 + 0,83\frac{\lambda}{r}}$ ein und wir erhalten:

$$\begin{aligned}
6\pi\eta'_{\text{Luft}}r(v_2-v_1) &= 2(m_{\text{Oel}}-m_{\text{Luft}})g \\
6\pi\frac{\eta_{\text{Luft}}}{1+0,83\frac{\lambda}{r}}r(v_2-v_1) &= 2\cdot\frac{4}{3}\pi r^3\Delta\rho\cdot g \\
\frac{9}{4}\frac{(v_2-v_1)\eta_{\text{Luft}}}{\Delta\rho\cdot g} &= r^2\cdot(1+0,83\frac{\lambda}{r}) \\
\frac{9}{4}\frac{(v_2-v_1)\eta_{\text{Luft}}}{\Delta\rho\cdot g} &= r^2+0,83\lambda r \\
r_{1/2} &= -\frac{0,83\lambda}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{0,83\lambda}{2}\right)^2+\frac{9}{4}\frac{(v_2-v_1)\eta_{\text{Luft}}}{\Delta\rho\cdot g}}
\end{aligned}$$

Die negative Lösung können wir weglassen und ein wenig umsortieren dann sieht man auch was die Korrektur ist.

$$r=\sqrt{\frac{9}{4}\frac{(v_2-v_1)\eta_{\text{Luft}}}{(\rho_{\text{Oel}}-\rho_{\text{Luft}})g}+\left(\frac{0,83\lambda}{2}\right)^2}-\frac{0,83\lambda}{2}$$

Jetzt können wir wieder q bestimmen, einfach (3)+(4) und dann alles einsetzen.

$$\begin{aligned}
6\pi\eta'_{\text{Luft}}r(v_1+v_2) &= 2q\cdot\frac{U}{d} \\
q &= 3\pi\eta'_{\text{Luft}}r(v_1+v_2)\cdot\frac{d}{U} \\
q &= 3\pi\frac{\eta_{\text{Luft}}}{1+0,83\frac{\lambda}{r}}r(v_1+v_2)\cdot\frac{d}{U} \\
q &= 3\pi\frac{r^2\eta_{\text{Luft}}}{r+0,83\lambda}(v_1+v_2)\cdot\frac{d}{U} \\
q &= 3\pi\frac{\left(\sqrt{\frac{9}{4}\frac{(v_2-v_1)\eta_{\text{Luft}}}{(\rho_{\text{Oel}}-\rho_{\text{Luft}})g}+\left(\frac{0,83\lambda}{2}\right)^2}-\frac{0,83\lambda}{2}\right)^2\eta_{\text{Luft}}}{\left(\sqrt{\frac{9}{4}\frac{(v_2-v_1)\eta_{\text{Luft}}}{(\rho_{\text{Oel}}-\rho_{\text{Luft}})g}+\left(\frac{0,83\lambda}{2}\right)^2}-\frac{0,83\lambda}{2}\right)+0,83\lambda}(v_1+v_2)\cdot\frac{d}{U}
\end{aligned}$$

iii. Ergebnisse

Messung	1	2	3	4	5	6	7
r (μm)	0,993	1,430	0,906	1,244	1,608	1,268	0,959
q (10^{-19} C)	5,897	16,773	7,400	12,321	22,153	11,085	6,599
r_{korr} (μm)	0,954	1,390	0,866	1,204	1,568	1,228	0,919
q_{korr} (10^{-19} C)	5,207	15,387	6,455	11,157	20,519	10,057	5,801

Daraus lässt sich nun die Elementarladung bestimmen, indem man alle Möglichen Differenzen bildet und sich überlegt welche Vielfachen der Elementarladung diese entsprechen. Dies liefert dann:

- $q = 1,610\cdot 10^{-19}$ C mit $\sigma^2 = 0,288$

- $q_{korr} = 1,505 \cdot 10^{-19}$ C mit $\sigma^2 = 0,303$

4. Zyklotron

(a) gekreutzte homogene elektrische und magnetische Felder wirken als Geschwindigkeitsfilter:
$qE = Bqv \rightarrow v = \frac{E}{B} = \frac{U}{d}B$
D.h. nur bei einer bestimmten Einstellung E/B werden die mit der Geschwindigkeit v in den Kondensator eintretenden Teilchen NICHT abgelenkt, da die beiden Feldstärken sich gerade aufheben.
$v = \frac{8 \cdot 10^3 V}{4 \cdot 10^{-3} m \cdot 10^{-2} T} = 2 \cdot 10^8 m/s \rightarrow \beta = 2/3 \rightarrow \gamma = 1.34$ d.h. man muß relativistisch rechnen.

(b) Ablenkung im Magnetfeld: Die Teilchen bewegen sich auf einer Kreisbahn mit $r^2 = L^2 + (r-a)^2 \rightarrow r = \frac{L^2+a^2}{2a}$ da $L \gg a$ gilt: $r \simeq \frac{L^2}{2a}$
Bewegungsgleichung: $\frac{\gamma m_0 v^2}{r} = Bqv \rightarrow \frac{q}{m_0} = \frac{\gamma v}{rB} = \frac{\gamma E}{rB^2} = \frac{2\gamma U a}{L^2 B^2 d} = \frac{2 \cdot 1.34 \cdot 8 \cdot 10^3 V \cdot 4.5 \cdot 10^{-3}}{(1.6m)^2 \cdot 10^{-4} T^2 \cdot 4 \cdot 10^{-3}} = 9.4 \cdot 10^7 C/kg$
Dies entspricht ca. 1/2000 von $e/m_{e,0}$ des Elektrons $\Rightarrow$ es handelt sich um Protonen! (korrekter Wert: $e/m_{p,0} = 9.58 \cdot 10^7 C/kg$

(c) Für die Gesamtenergie nach Verlassen des Zyklotrons gilt:
$E_p = \sqrt{m_{p,0}^2 c^4 + p^2 c^2}$ mit der Protonenmasse $m_{p,0}$ $m_{p,0}^2 c^4 = (0.94 GeV)^2; p^2c^2 = (\gamma m_{p,0} v c)^2 = (\gamma \beta m_{p,0} c^2)^2 = (1.34 \cdot 2/3 \cdot (0.94 GeV))^2 \rightarrow E_p = 0.94 GeV(1 + (1.34 \cdot 2/3)^2)^{1/2} = 1.26 GeV \rightarrow E_{kin} = E_p - m_{p,0}c^2 = 0.32 GeV \rightarrow$ Anzahl der Umdrehungen: $n = \frac{0.32 \cdot ^9}{2 \cdot 20 \cdot 10^3} = 8000$

(d) Umlauffrequenz der Protonen: $\omega_p = \frac{eB_Z}{m_p}$ (folgt aus $m\omega r = Ber$; mit $v = \omega r$) $\rightarrow$ Umlaufzeit: $T = \frac{2\pi}{eB} m_p = \frac{2\pi}{eB_z c^2}(E_{kin} + m_{p,0}c^2)$ d.h. T ist nur dann unabhängig von der Energie E_p, wenn $E_{kin} \ll m_{p,0}c^2$ gilt. $\rightarrow \omega = \omega(t) = \frac{eB_Z}{m_p} = \frac{eB_Z c^2}{E_p} \rightarrow$
$\omega(t) \cdot (m_{p,0}c^2 + \frac{\tilde{E}}{\pi} \int \omega(t) dt) = eB_Z c^2 \rightarrow \frac{eBc^2}{\omega(t)} = m_{p,0}c^2 + \frac{\tilde{E}}{\pi} \int \omega(t) dt$ d/dt
$\rightarrow -eBc^2 \frac{\dot{\omega}}{\omega^2} = \frac{\tilde{E}}{\pi}\omega \rightarrow \frac{eBc^2}{\tilde{E}} \int \frac{d\omega}{\omega^3} = \int dt$ mit der Anfangsumlauffrequenz $\omega_0 \rightarrow \frac{eB_Z c^2 \pi}{2 \cdot \tilde{E}}(1/\omega^2 - 1/\omega_0^2) = t \rightarrow 1/\omega^2 = \frac{\tilde{E} t}{2 \cdot eB_Z c^2 \pi} + \frac{1}{\omega_0^2} \Rightarrow \omega(t) = \frac{2 \cdot \omega_0}{\sqrt{\frac{\tilde{E}\omega_0^2}{eB_Z c^2 \pi} t + 1}}$