Physik IV – Atome und Moleküle; Sommer 2012

Prof. Wim de Boer & Dr. Frank Hartmann, KIT

LÖSUNGEN Übung 3

1. Photonen

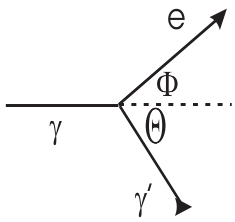
   (a) Die Glühbirne verliert natürlich nicht wirklich Masse, da die Energie ja nachgeliefert wird. Es handelt sich mehr um eine Masseabstrahlung. Die Wahl der Aufgabenstellung soll eben diese Diskussion anregen.
   P=100W=100J/s; $a = 365,25 = 3,16 \times 10^7\,\mathrm{s} \quad \Rightarrow E = Pa = 3,16 \times 10^9\,\mathrm{J} \quad \Delta m = E/c^2 = 3,5 \times 10^{-8}\,\mathrm{kg}$

   (b) Es gilt: $\frac{Nh\nu}{P} = \frac{F}{4\pi R^2}$, wobei F der Pupillenquerschnittfläche ist. Hieraus ergibt sich $R = 14200\,\mathrm{km}$.

   (c) Nach dem Wienschen Verschiebungsgesetz $\lambda_{max} \times T = const = 0,29\,\mathrm{cmK}$ $\rightarrow T = 5800\,\mathrm{K}$

2. Comptonstreuung:

   (a) $\lambda' - \lambda = \frac{hc}{m_0c^2}(1 - cos\theta)$

   $E_{kin} = E_\gamma - E'_\gamma = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} = hc\frac{\lambda'-\lambda}{\lambda\lambda'}$ mit $E_\gamma = \frac{hc}{\lambda}$ und $E' = \frac{hc}{\lambda'}$ folgt aus der Comptonformel:
   $E_\gamma - E'_\gamma = \frac{E_\gamma E'_\gamma}{m_0c^2}(1 - cos\theta)$ (1) oder $E'_\gamma = \frac{E_\gamma}{1+\frac{E_\gamma}{m_0c^2}(1-cos\theta)}$ (2)
   (2) in (1) $\Rightarrow E_{kin} = \frac{E_\gamma E'_\gamma}{m_0c^2}(1 - cos\theta) = \frac{E_\gamma}{\frac{m_0c^2}{E_\gamma(1-cos\theta)}+1}$ (3) maximal für $cos\theta_{max} \rightarrow -1$ also $\theta_{max} \rightarrow \pi$ Informationen für den dazugehörigen Winkel Φ erhält man aus dem Impulserhaltungssatz: $p_\gamma = p'_\gamma cos\theta + p_e cos\Phi$ (4)
   $0 = p'_\gamma sin\theta - p_e sin\Phi$ (5)
   Mit $\theta_{max} \rightarrow \pi$ folgt aus (5):
   $P_e sin\Phi_{max} = 0 \Rightarrow \Phi_{max} \rightarrow 0$

   (b) $\lambda = 400\,\mathrm{nm} \rightarrow \gamma = 7,5 \times 0^{14} Hz \rightarrow E_\gamma = 3,1\,\mathrm{eV}$
   Aus (3) mit $\theta_{max} = \pi$ folgt $E_{kin,max} = 3,8 \times 10^{-5}\,\mathrm{eV}$

   (c) Übertrüge das Photon seine gesamte Energie auf das Elektron, dann wäre $E'_\gamma = 0$ mit $E' = \frac{hc}{\lambda'}$
   $\rightarrow \lambda' \rightarrow \infty \Rightarrow \infty = \frac{hc}{m_0c^2}(1 - cos\theta) \rightarrow$ unmöglich!
   Kann das Photon aus Aufgabe 2b (die Frage gehört eigentlich zu Teil 2b) ein Elektron aus einem Metall schlagen?
   Nein, die Austrittsabeiten in Metall sind im einstelligen eV Bereich, d.h. ca. 5 Größenordnungen höher als der maximle Übertrag.

(d) $E'_\gamma = E_\gamma - E_{kin} = 400\,\text{keV} \rightarrow \lambda' = 3,1 \times 10^{-3} nm$ mit $\lambda = \frac{hc}{E_\gamma} = 2,48 \times 10^{-4}\,\text{nm}$ folgt aus Compton: $\theta = Arccos\left(1 - \frac{(\lambda' - \lambda) m_0 c}{h}\right) = 41,8^\circ$

3. Milikan

(a) Gewichtskraft des Tröpfchen; Auftriebskraft; Stokes'sche Reibungskraft; Elektrische Kraft

(b) Zunächst muss man sich klarmachen, dass für U_1 das Tröpfchen steigt, nach dem Umpolen zu $U_2 = -U_1$ das selbe Tröpfchen sinkt.

i. Einfache Lösung:
Wir vernachlässigen die Auftriebskraft sowie die Cunningham-Korrektur, da ρ_{Luft} und λ_{Luft} klein sind. Es gilt dann:

- Steigendes Tröpfchen (U_1, v_1): $|F_{\text{R}}| + |F_{\text{G}}| = |F_{\text{El}}|$
- Sinkendes Tröpfchen (U_2, v_2): $|F_{\text{R}}| = |F_{\text{El}}| + |F_{\text{G}}|$

Damit bekommt man zwei Gleichungen für q und r (mit $U = |U_1| = |U_2|$):

$$6\pi\eta_{\text{Luft}} r v_1 + mg = q \cdot \frac{U}{d} \tag{1}$$

$$6\pi\eta_{\text{Luft}} r v_2 = q \cdot \frac{U}{d} + mg \tag{2}$$

Zunächst bestimmen wir r, dazu bilden wir (2)-(1) und mit $m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{\text{Oel}}$ erhalten wir dann:

$$\begin{aligned} 6\pi\eta_{\text{Luft}} r(v_2 - v_1) &= 2mg \\ 6\pi\eta_{\text{Luft}} r(v_2 - v_1) &= 2 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{\text{Oel}} \cdot g \\ r &= \frac{3}{2}\sqrt{\frac{(v_2 - v_1)\eta_{\text{Luft}}}{\rho_{\text{Oel}} g}} \end{aligned}$$

Jetzt können wir q bestimmen, indem wir (1) und (2) addieren und das eben gewonnen r einsetzen.

$$\begin{aligned} 6\pi\eta_{\text{Luft}} r(v_1 + v_2) &= 2q \cdot \frac{U}{d} \\ q &= 3\pi\eta_{\text{Luft}} r(v_1 + v_2) \cdot \frac{d}{U} \\ q &= 3\pi\eta_{\text{Luft}} \frac{3}{2}\sqrt{\frac{(v_2 - v_1)\eta_{\text{Luft}}}{\rho_{\text{Oel}} g}} \cdot (v_1 + v_2) \cdot \frac{d}{U} \\ q &= \frac{9}{2}\pi \cdot \frac{d}{U} \cdot \sqrt{\frac{\eta_{\text{Luft}}^3}{\rho_{\text{Oel}} g}} \cdot (v_1 + v_2) \cdot \sqrt{(v_2 - v_1)} \end{aligned}$$

ii. Ausführliche Lösung:

- Steigendes Tröpfchen (U_1, v_1): $|F_{\text{R}}| + |F_{\text{G}} - F_{\text{A}}| = |F_{\text{El}}|$
- Sinkendes Tröpfchen (U_2, v_2): $|F_{\text{R}}| = |F_{\text{El}}| + |F_{\text{G}} - F_{\text{A}}|$

Mathematisch ist das die gleiche Vorgehensweise allerdings mit ein wenig mehr Aufwand. Die Auftriebskraft lässt sich leicht mit berücksichtigen, es muss lediglich ρ_{Oel} durch $\Delta\rho = \rho_{\text{Oel}} - \rho_{\text{Luft}}$ ersetzt werden.

$$6\pi\eta'_{\text{Luft}} r v_1 + (m_{\text{Oel}} - m_{\text{Luft}})g = q \cdot \frac{U}{d} \tag{3}$$

$$6\pi\eta'_{\text{Luft}} r v_2 = q \cdot \frac{U}{d} + (m_{\text{Oel}} - m_{\text{Luft}})g \tag{4}$$

Wieder bestimmen wir zunächst einmal r, auch hierfür bilden wir (4)-(3) setzen $m_{\text{Oel}} - m_{\text{Luft}} = \frac{4}{3}\pi r^3(\rho_{\text{Oel}} - \rho_{\text{Luft}}) = \frac{4}{3}\pi r^3 \Delta\rho$ und $\eta'_{\text{Luft}} = \dfrac{\eta_{\text{Luft}}}{1+0,83\frac{\lambda}{r}}$ ein und wir erhalten:

$$\begin{aligned}
6\pi\eta'_{\text{Luft}} r(v_2 - v_1) &= 2(m_{\text{Oel}} - m_{\text{Luft}})g \\
6\pi\frac{\eta_{\text{Luft}}}{1+0,83\frac{\lambda}{r}} r(v_2 - v_1) &= 2\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 \Delta\rho\cdot g \\
\frac{9}{4}\frac{(v_2 - v_1)\eta_{\text{Luft}}}{\Delta\rho\cdot g} &= r^2\cdot(1+0,83\frac{\lambda}{r}) \\
\frac{9}{4}\frac{(v_2 - v_1)\eta_{\text{Luft}}}{\Delta\rho\cdot g} &= r^2 + 0,83\lambda r \\
r_{1/2} &= -\frac{0,83\lambda}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0,83\lambda}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}\frac{(v_2 - v_1)\eta_{\text{Luft}}}{\Delta\rho\cdot g}}
\end{aligned}$$

Die negative Lösung können wir weglassen und ein wenig umsortieren dann sieht man auch was die Korrektur ist.

$$r = \sqrt{\frac{9}{4}\frac{(v_2 - v_1)\eta_{\text{Luft}}}{(\rho_{\text{Oel}} - \rho_{\text{Luft}})g} + \left(\frac{0,83\lambda}{2}\right)^2} - \frac{0,83\lambda}{2}$$

Jetzt können wir wieder q bestimmen, einfach (3)+(4) und dann alles einsetzen.

$$\begin{aligned}
6\pi\eta'_{\text{Luft}} r(v_1 + v_2) &= 2q\cdot\frac{U}{d} \\
q &= 3\pi\eta'_{\text{Luft}} r(v_1 + v_2)\cdot\frac{d}{U} \\
q &= 3\pi\frac{\eta_{\text{Luft}}}{1+0,83\frac{\lambda}{r}} r(v_1 + v_2)\cdot\frac{d}{U} \\
q &= 3\pi\frac{r^2\eta_{\text{Luft}}}{r+0,83\lambda}(v_1 + v_2)\cdot\frac{d}{U} \\
q &= 3\pi\frac{\left(\sqrt{\frac{9}{4}\frac{(v_2-v_1)\eta_{\text{Luft}}}{(\rho_{\text{Oel}}-\rho_{\text{Luft}})g} + \left(\frac{0,83\lambda}{2}\right)^2} - \frac{0,83\lambda}{2}\right)^2 \eta_{\text{Luft}}}{\left(\sqrt{\frac{9}{4}\frac{(v_2-v_1)\eta_{\text{Luft}}}{(\rho_{\text{Oel}}-\rho_{\text{Luft}})g} + \left(\frac{0,83\lambda}{2}\right)^2} - \frac{0,83\lambda}{2}\right) + 0,83\lambda}(v_1 + v_2)\cdot\frac{d}{U}
\end{aligned}$$

iii. Ergebnisse

Messung	1	2	3	4	5	6	7
r (μm)	0,993	1,430	0,906	1,244	1,608	1,268	0,959
q (10^{-19} C)	5,897	16,773	7,400	12,321	22,153	11,085	6,599
r_{korr} (μm)	0,954	1,390	0,866	1,204	1,568	1,228	0,919
q_{korr} (10^{-19} C)	5,207	15,387	6,455	11,157	20,519	10,057	5,801

Darus lässt sich nun die Elementarladung bestimmen, indem man alle Möglichen Differenzen bildet und sich berlegt welche Vielfachen der Elementarladung diese entsprechen. Dies liefert dann:

- $q = 1,610 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$ mit $\sigma^2 = 0,288$
- $q_{korr} = 1,505 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$ mit $\sigma^2 = 0,303$