Physik IV – Atome und Moleküle; Sommer 2012

Prof. Wim de Boer & Dr. Frank Hartmann, KIT

LÖSUNGEN Übung 4

1. Heisenberg'sche Unschärferelation
   Orts-/Impulsunschärfe: $\Delta x \cdot \Delta p \sim \hbar$ mit $2 \cdot r_K = \Delta x$ und $\Delta E = c \cdot \Delta p$ folgt:

$$\Delta E \sim \frac{\hbar c}{2r_K} \to \Delta E \sim \frac{10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{2 \cdot 1.3 \cdot 10^{-15} \sqrt[3]{A}} = \frac{72}{\sqrt[3]{A}} \,[\mathrm{MeV}]$$

   D.h. selbst für schwere Kerne ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Elektron mit derart hoher kinetischer Energie im Atomkern gebunden ist, unwahrscheinlich. (Im vgl. zu den üblichen 8 MeV für Nukleonen.)

2. De Broglie Wellenlänge

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \sqrt{\frac{h^2}{m^2 < v^2 >}} = \frac{h}{\sqrt{3mkT}}$$

$$< E >= \frac{1}{2} m < v^2 >= \frac{3}{2} kT$$

$$\Rightarrow m = \frac{3kT}{< v^2 >} = \frac{3 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 320}{499^2} \,\mathrm{kg} = 5.32 \times 10^{-26} \,\mathrm{kg} \cong 31.9 \,\mathrm{u}$$

   d.h. das Gas ist O_2^{16}

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{3mkT}} = \frac{6.6 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{3 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 320 \cdot 5.32 \cdot 10^{-26}}} = 2.5^{-11} \,\mathrm{m} = 0.25 \,\mathrm{\mathring{A}}$$

3. Welle-Teilchen-Dualismus

   (a) Damit Beugung auftritt, müssen beugende Öffnung und Wellenlänge vergleichbar groß sein. Der Wert ist hier $d \approx \lambda = h/(mv) = 1.66 \times 10^{-33}$ m. Der Durchmesser des Atomkerns beiträgt ca. 10^{-15} m, also 18 Größenordnungen über der berechneten Abmessung. Demnach kann es keinen Körper der Masse 4 g geben, der an dieser Öffnung gebeugt wird.

   (b) Die Geschwindigkeit eines Neutrons der Energie 10 MeV beträgt $v = \sqrt{2E_{kin}/m} = 4.37 \cdot 10^7$ m/s. Daraus folgt die De Broglie Wellenlänge zu $\lambda = h/(mv) = 9.05 \cdot 10^{-15} m$ (Für 100 MeV wie in der Aufgabe wäre die Wellenlänge $\lambda = h/(mv) = 2.86 \cdot 10^{-15} m$). Damit solch ein Neutron Beugung erfährt, muss die Abmessung des Objektes in der Größenordnung dieser Wellenlänge liegen; es kann beispielsweise ein Atomkern sein.

   (c) Ein Elektron mit 200 eV besitzt die Geschwindigkeit $v = \sqrt{2E/m} \to$ De Broglie Wellenlänge $\lambda = h/(mv) = h/\sqrt{2E/m} = 8.68 \cdot 10^{-11}$ m, d.h. 0.1 nm (Gitter).

4. $\phi = Nxe^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$ sei die Wellenfunktion eines Teilchens

   (a) Unter Verwendung von $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}}$ für $a > 0$ erhält man für die Normierung $N^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} dx = \frac{1}{2} \cdot N^2 \sqrt{\pi} \sigma^3 = 1 \to N = \frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/4} \sigma^{3/2}}$

(b) Die Wahrscheinlichkeitsdichte für den Ort x beträgt:

$|\phi(x)|^2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}\sigma^3} x^2 e^{\frac{-x^2}{\sigma^2}}$

Die Extremwerte liegen bei $\frac{d}{dx}|\phi(x)|^2 = 0$. Das liefert ein Minimum bei x=0 und Maxima bei $x = \pm\sigma$. Der Mittelwert des Teilchenorts ist:

$< x >= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x|\phi(x)|^2 dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}\sigma^3} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{\frac{-x^2}{\sigma^2}} dx = 0$ (ungerade Funktion von $-\infty$ bis $+\infty$).