Physik IV – Atome und Moleküle; Sommer 2012

Prof. Wim de Boer & Dr. Frank Hartmann, KIT

LÖSUNGEN Übung 6

1. Korrespondenzprinzip; Ehrenfests Theorem

   Klassische Mechanik entsteht als der 'klassische Limes' der Quantenmechanik. Klassische Mechanik ist eine ausreichend gute Beschreibung der Natur wenn die von der Quantenmechanik vorhergesagten statistischen Verteilungen der physikalischen Variablen vernachlässigt werden können.
   Bsp.: Unendlicher Potentialtopf;
   Im Übergang mit der klassischen Vorstellugn sind die Bereiche ausserhalb des unendlichen Topfes für die Teilchen absolut tabu.
   Im Gegensatz zur klassischen Vorstellung gilt aber zweierlei:

   - Das Teilchen kann im gebundenen Zustand nicht beliebige Energiebeträge aufnehmen, es sind gemäß $n = 1, 2, 3, ...$ nur bestimmte Energiewerte erlaubt.
   - Es existiert eine Nullpunktsenergie bei $n = 1$, die nicht unterschritten werden kann, d.h. das Teilchen hat diese Energie auch bei absolutem Nullpunkt der Temperature (T=0K) und kann (in Übereinstimmung mit Heisenberg) damit niemals in Ruhe sein.

   Der Abstand zwischen den erlaubten Energieniveaus E_n ist um so kleiner,

   - je größer die Masse m und
   - je größer der dem Teilchen Zugestandene Raum, d.h. je größer die Topflänge ist

   D.h. bei makroskopischen Körpern und/oder bei makroskopischen Potentialtöpfen die Energieniveaus so dich aneinanderrücken, dass das quantenmechanische Ergebnis in das scheinbare Energiekontinuum der klassischen Mechanik übergeht.
   Ehrenfests Theorem:
   Die statistischen mittel der Quanten-variablen erfüllen die gleichen Bewegungsgleichungen wie die korrespondierenden klassischen Variablen.Beispiele: Wellenpaket ($< x >, < p >$); Kugel im harmonischen Oszillator (WP in harmon. Osz.); Laserlicht. Warnung: Klassische Zustände sind immer Überlagerungen von vielen Eigenzuständen.

2. Positronium $\rightarrow$ H-ähnliches Atom
Unten wird recht ausführlich gerechnet, im Prinzip können die Bohr-Sommerfeldschen Formeln für das H-Atom benutzt werden unter Berücksichtigung der effektiven Masse:
(0) effektive Masse: $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} = \frac{m_e m_e}{2m_e} = \frac{m_e}{2}$
(1) Bohr-Modell: $E = \frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$; $[E = E_{pot} + E_{kin}]$
(2) Kräftegleichgewicht: $\frac{\mu v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$
(3) Quantisierung des Drehimpulses $\mu v r = n\hbar$
(2) $\mu\omega^2 r = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$
(3) $\mu\omega r^2 = n\hbar \rightarrow r = \sqrt{\frac{n\hbar}{\mu\omega}}$ (4)
in (2): $\mu\omega^2(\frac{n\hbar}{\mu\omega})^{3/2} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \rightarrow \sqrt{\omega} = \frac{e^2\mu^{1/2}}{4\pi\epsilon_0(n\hbar)^{3/2}} \rightarrow \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\mu e^4}{32\pi^3\epsilon_0^2\hbar^3}\frac{1}{n^3}$
Im Grundzustand n=1: $\mu = \frac{m_e}{2} \rightarrow \frac{\omega}{2\pi} = \frac{m_e e^4}{64\pi^3\epsilon_0^2\hbar^3} = 3.288 \times 10^{15}\frac{1}{s}$
in (4): $r = (\frac{n\hbar}{\mu})^{1/2}\sqrt{\frac{16\pi^2\epsilon_0^2\hbar^3}{\mu e^4}n^3} = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{\mu e^2}n^2 = (mit\, n = 1\, und\, \mu = m_e/2)\ \frac{8\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} = 1.059 \times 10^{-10}m.$

in (1): $E = \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{2}\mu(\frac{\mu e^4}{16\pi^2\epsilon_0^2\hbar^3}\frac{1}{n^2})^2 \times (\frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{\mu e^2}n^2)^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mu e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar^2}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{32}\frac{\mu e^4}{\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2}\frac{1}{n^2} = -\frac{1}{64}\frac{m_e e^4}{\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2} = -6.80eV$

3. Myon-Atom
   (a) (siehe letzte Aufgabe, gleiche Rechnung)
   $\mu = \frac{m_p m_\mu}{m_p+m_\mu} = \frac{m_p 207 m_e}{m_p+207m_e} = 1.625 \times 10^{-28}kg$
   $E_n = -\frac{1}{32}\frac{Z^2\mu e^4}{\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2} = -2531\frac{Z^2}{n^2}eV$ (Achtung im Haken-Wolf wurde statt μ nur m_μ eingesetzt, deswegen das abweichende Ergebnis)
   (b) $r_n = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{Z\mu e^2}n^2 = 2.84 \times 10^{-3}\frac{n^2}{Z}\mathring{A}$
   (c) $h\nu = E_{n=2} - E_{n=1} = -\frac{1}{32}\frac{Z^2\mu e^4}{\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2}(1/4-1) = 1898Z^2eV$

4. Beim Franck-Hertz-Versuch entspricht der Abstand der Minima (bzw. Maxima) ΔU_B in der Strom-Spannungs-Kennlinie einer charakteristischen Energie eines Übergangs eines Elektrons in den Atomen bzw. Molekülen des Füllgases.
   (a) Erste Anregung = Abstände der Maxima (oder der Minima); jedes Minimum zeigt den Energieverlust des inelastischen Stoss an (Fig. 1). Alle standard Min/Max zeigen nur die **erste** Anregung und die weiteren Minima zeigen einfach nur einen weiteren inelastischen Stoss desselben Elektrons, welches nach dem vorhergehenden Stoss wieder genug Energie durch die anliegende Spannung gesammelt hat, um nochmal mit der ersten Anregungsenergie inelastisch (mit einem anderem Atom) zu stossen. Höhere Anregungszustände zeigen sich in Substrukturen der Franck-Hertz-Kurve; siehe Fig. 2.
   (b) Die Spannung $U_B = 4V$ liegt zwischen dem ersten und zweiten Minimum. Die Wellenlänge dieses charakteristischen Übergangs ist $\lambda = \frac{hc}{e\Delta U_B} = 589nm$. Das Füllgas leuchtet also im gelben Spektralbereich.
   Für $U_B = 5V$ leuchtet es ebenfalls gelb.
   (c) Bsp.: Natriumdampf und ^{86}Krypton leuchtet im gelben Spektralbereich. Es könnte sich also um Natriumdampf oder ^{86}Krypton handeln.
   (d) Die kinetische Energie der Elektronen E_{kin} muss mindestens so groß sein, wie die Energie des charakteristischen Übergangs, d. h. $E_{kin} \geq e\Delta U_B$. Da $E_{kin} = \frac{m}{2}v^2$, muss $v \geq \sqrt{2e\Delta U_B/m} = 8.6 \times 10^5 m/s$ sein.

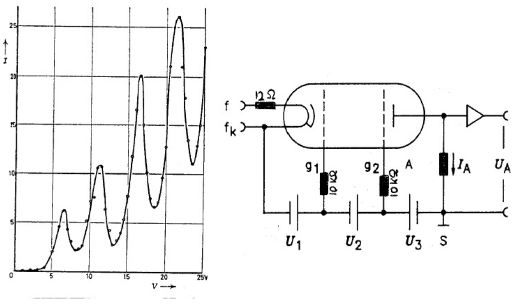

Abbildung 1: *Franck-Hertz-Kurve und Franck-Hertz Versuchsanordnung*

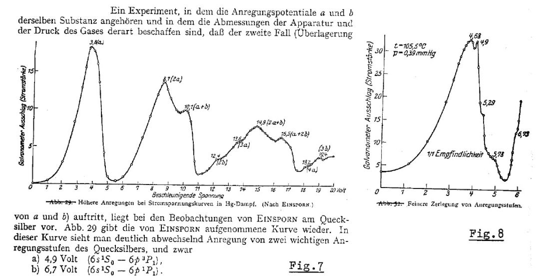

Abbildung 2: *Franck-Hertz-Kurve die Substrukturen zeigen die höheren Anregungszustände*

5. Ist eines der beiden Elektronen entfernt, so benötigt man die Energie Z^2E_i, wobei $E_I = 13.6eV$ die Ionisierungsenergie des H-Atoms ist. Für He (Z=2) ergibt dies 54.4eV. Die Differenz zu 79eV (24.6eV), ist dann die Ionisierungsenergie des ersten Elektrons.

6. Der Rückstoßimpuls p_H des Atoms ist gleich dem Impuls $h\nu/c$ des Photons. Die Übergangsenergie E ist $E = h\nu + p_H^2/(2M_H)$. Aus diesen beiden Gleichungen erhält man mit Hilfe einer einfachen Näherung ($h\nu \ll 2M_Hc^2$) die Rückstoßenergie $T_R \approx E^2/(2M_Hc^2)$. Mit $E_n = -\frac{Rhc}{n^2}$; $E_1 = -13.6eV$ und $E_2 = \frac{E_1}{2^2} = -3.4eV \Rightarrow n = 2 \to n = 1$ $E_{2\to1} = 10.2eV$ (auch aus Diagramm Haken-Wolf S 104 oder ähnlichem Termschema). Mit E=10.2eV ergibt sich sich $T_R = 5.5 \times 10^{-8}eV$. Die natürliche Linienbreite beträgt $\Delta E = \hbar/\Delta t = e \times 10^{-7}eV$. Wegen $\Delta E > 2T_R$ ist Resonanzabsorption möglich.