Physik IV – Atome und Moleküle; Sommer 2012

Prof. Wim de Boer & Dr. Frank Hartmann, KIT

LÖSUNGEN Übung 7

1. Drehimpulsoperatoren

   (a) $[\hat{L}_z, \hat{L}^2] = 0$

$$\begin{aligned}
[\hat{L}_z, \hat{L}^2] &= \\
&= [\hat{L}_z, \hat{L}_x^2] + [\hat{L}_z, \hat{L}_y^2] + [\hat{L}_z, \hat{L}_z^2] \\
&= [L_z, L_x]L_x + L_x[L_z, L_x] + [L_z, L_y]L_y + L_y[L_z, L_y] \\
&= i\hbar(L_yL_x + L_xL_y - L_xL_y - L_yL_x) = 0
\end{aligned}$$

   (b) Warum Eigenwert $l(l+1)$ und nicht l^2

$$\begin{aligned}
\hat{l}_-\hat{l}_+F_{l,m} &= (\hat{l}_x - i\hat{l}_y)(\hat{l}_x + i\hat{l}_y)F_{l,m} \\
&= (\hat{l}_x^2 + \hat{l}_y^2 + i\hat{l}_x\hat{l}_y - i\hat{l}_y\hat{l}_x)F_{l,m} \\
&= (\hat{l}^2 - \hat{l}_z^2 - \hbar\hat{l}_z)F_{l,m} \\
&= (\omega^2\hbar^2 - m^2\hbar^2 - m\hbar^2)F_{l,m}
\end{aligned}$$

   Setze $F_{l,m} = F_{l,m_{max}} = F_{l,l}$
   dann gilt $\hat{l}_+F_{l,m_{max}} = 0$ oder damit $\omega^2 = m_{max}^2 - m_{max} = 0$
   $\omega^2 = m_{max}(m_{max}+1) = l(l+1)$

2. L=$\sqrt{l(l+1)}\hbar$ für l=3 ist der Betrag daher $2\sqrt{3}\hbar$. Die QZ m läuft in ganzzahligen Schritten von $-l$ bis l. $\rightarrow m = -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3$. Die 7 möglichen Vektoren sind in Abbildung 1 zu sehen. Jeder Vektor hat die Länge $2\sqrt{3}\hbar$ und die z-Komponenten sind $-3\hbar, -2\hbar, -1\hbar, 0, +1\hbar, +2\hbar, +3\hbar$, die Winkel zur z-Achse sind $150^o; 125,3^o; 106,8^o; 90^o; 73,2^o; 54,7^o; 30^o$

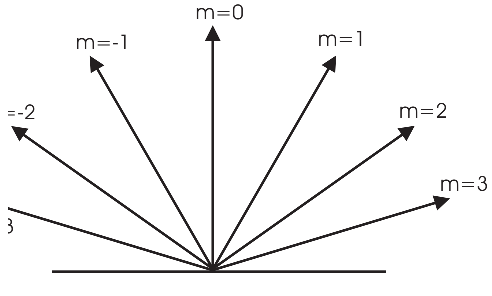


Abbildung 1: *Vektordiagramm*

3. QZ l läuft ganzzahlig von 0 bis n-1, somit kann $l = 0, +1, +2$ sein. Für $l = 0$ ist $m = 0$; für $l = 1$ ist $m = -1, 0, +1$; für $l = 2$ ist $m = -2, -1, 0, +1, +2$. Für jedes l gibt es genau $2l + 1$ verschiedene Werte für m. Die Anzahl der unterschiedlichen Kombinationen von m und l ist daher $[2 \cdot (0) + 1] + [2 \cdot (1) +$

1] + [2 · (2) + 1] = 9. Die Anzahl der zugehörigen Elektronenzustände ist somit wegen des Spins gleich 18 (für $n = 3$).
Für $n = 4$ Elektronenzustände $2[[2\cdot(0)+1]+[2\cdot(1)+1]+[2\cdot(2)+1]+[2\cdot(3)+1]] = 32$.

4. Drehimpuls: $L = \Theta\omega = 3.49 \cdot 10^{-3} kgm^2/s$
   Quantenzahl: Mit $L = \sqrt{l(l+1)}\hbar$ erhalten wir $l = 3.31 \cdot 10^{31}$

5. Schrödingergleicheiung

   (a) $\Psi(r) = ae^{-\frac{r}{r_1}}$
   Radialteil der Schrödingergleichung:
   $[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r}) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}]R(r) = E \cdot R(r)$
   s-Zustand: $l = 0$:
   $[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r}) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}]ae^{-\frac{r}{r_1}} =$
   $[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{-1}{r_1}) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}]ae^{-\frac{r}{r_1}} =$
   $[-\frac{\hbar^2}{2m}[-\frac{2}{r}\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1^2}] - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}]ae^{-\frac{r}{r_1}} = E \cdot ae^{-\frac{r}{r_1}}$
   $(\frac{\hbar^2}{m}\frac{1}{r_1} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}) + (-\frac{\hbar^2}{2mr_1^2} - E)r = 0$
   $E = -\frac{\hbar^2}{2mr_1^2} = \frac{me^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2\hbar^2}$ mit $r_1 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{e^2 m}$

   (b) $W(1)dr = |\Psi|^2 4\pi r^2 dr$ mit $4\pi r^2$ = Fläche der Kugelschale mit Radius r
   $W(1)dr = 4\pi r^2 a^2 e^{-\frac{2r}{r_1}} dr$
   $W(1) = 4\pi r^2 a^2 e^{-\frac{2r}{r_1}}$

   (c) $\frac{dW(r)}{dr} = 0 \Rightarrow 2r - r^2\frac{2}{r_1} = 0 \Rightarrow r = r_1$

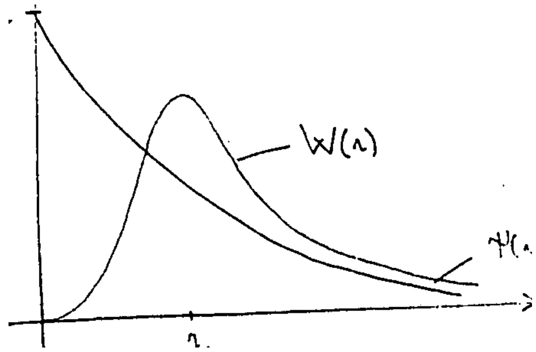
   (d)


Abbildung 2: *Funktionen*

6. (a) Das Element hat 14 Elektronen ⇒ Silizium.
   (b) Das Element hat 20 Elektronen ⇒ Kalzium.

7. Einstein-de-Haas

(a) magnetisches Moment des vom Elektron bedingten Kreisstroms: $\vec{\mu} = I\vec{A}$ mit $I = \frac{-e}{T} = \frac{-e\omega}{2\pi}$ und $A = \pi r^2$ folgt: $\vec{\mu} = -\frac{1}{2}e\omega r^2 \hat{l_z}$ mit $\vec{l} = m\omega r^2 \hat{l_z}$ folgt: $\vec{\mu} = -\frac{e}{2m}\vec{l}$

(b) Ausrichtung der atomaren magnetischen Momente im Eisen $\mu_{\vec{F}e}$ bedingt eine Änderung der atomaren Drehimpulse $\vec{L}_{Atom} \rightarrow$ Zylinder dreht sich wegen Drehimpulserhaltung, also $\vec{L}_{makro}$ entgegengesetzt zu $\vec{L}_{Atom}$: $\vec{L}_{makro}|| - \vec{L}_{Atom}$
Da $\vec{L}_{Atom}|| - \vec{\mu}_{Fe}$ und $\vec{\mu}_{Fe}||B$ folgt $\vec{L}_{makro}||\vec{B}$ oder $\vec{\omega}||\vec{B}$
Aus $\vec{L} = \Theta_{Fe}\vec{\omega}$ folgt $\vec{\omega} = \frac{2n_{Fe}\vec{L}_{makro}}{\theta_{Fe}}$ (I) (2 wegen Umklappen) mit n_{Fe}: Anzahl der Eisenatome = $\frac{M_{Fe}}{m_{Fe}}N_A$ und m_{Fe} : atomare Masse von Eisen
$\rightarrow \omega = \frac{2N_A M_{Fe} L_{Atom}}{\theta_{Fe} m_{Fe}}$ (II)

(c) $\gamma = \frac{|\vec{\mu}|}{|\vec{L}_{Atom}|} = \frac{|n_{Fe}\vec{\mu}|}{|n_{Fe}\vec{L}_{Atom}|} = \frac{|\vec{M}_{Fe}|}{|n_{Fe}\vec{L}_{Atom}|} = (mitI) = \frac{2|\vec{M}_{Fe}|}{\Theta_{Fe}|\omega|}$
mit $\vec{M}$: magnetisches Moment des Zylinders
(Achtung M:Masse; $\vec{M}$: magn. Moment)

(d) aus (II) folgt mit Annahme $L_{Atom} = \hbar$ und $\rho = \frac{M_{Fe}}{\pi r^2 L_{Zyl}} = \frac{M_{Fe}^2}{2\pi\Theta_{Fe}L_{Zyl}}$; L_{Zyl}:Länge des Zylinders. $\Theta_{Fe} = \Theta_{Zyl.} = \rho V \frac{r^2}{2}$
$\rightarrow \omega = \frac{2N_A M_{Fe}\hbar\rho}{\frac{M_{Fe}^2}{2\pi\Theta_{Fe}L_{Zyl}}\Theta_{Fe}m_{Fe}} = \frac{4\pi N_A \hbar\rho L_{Zyl}}{M_{Fe}m_{Fe}}$
$\rightarrow \omega = \frac{4\pi\times 6\times 10^{23}\times 1.05\times 10^{-34}\times 7.87\times 10^{3}\times 10^{-2}}{10^{-3}\times 55.8} = 1.1\times 10^{-6}\frac{1}{s}$