

LÖSUNGEN Übung 8

1. Stern-Gerlach

- (a) inhomogenes Magnetfeld übt Kraft auf magnetische Momente aus. Klassisch würde man eine isotrope Verteilung der magnetischen Momente im Silberstrahl, also ein Kontinuum möglicher Ablenkungen erwarten. Gemessen werden jedoch zwei Linien: (siehe auch Haken-Wolf):
 → Richtungsquantelung: Atome haben nur diskrete Mögl. zur Einstellung der magn. Momente relativ zum Magnetfeld: parallel und antiparallel.
 → beim Bahndrehimpuls der abgeschlossenen inneren Schalen (man misst denselben Wert der Ablenkung für alle Atome, die ein äusseres s-Elektron haben)
 → s-Elektron hat $l=0$, man misst nur Spinmagnetismus

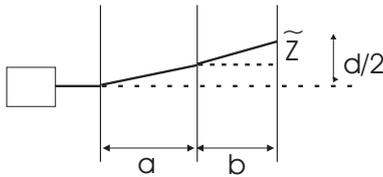


Abbildung 1: Stern-Gerlach-Versuch

(b)

- $E_{kin} = \frac{M_{Ag} v_x^2}{2} = \frac{3}{2} kT \rightarrow v_x = \sqrt{\frac{3kT}{M_{Ag}}} \quad (1)$

- $t_a = \frac{a}{v_x} = a \sqrt{\frac{M_{Ag}}{3kT}} \quad (2)$

- $t_b = \frac{b}{v_x} = b \sqrt{\frac{M_{Ag}}{3kT}} \quad (3)$

- Kraft: $F_z = \mu_{Ag} \frac{\partial B}{\partial z}$ wobei $\mu_{Ag} = \mu_s = -g_s \frac{e}{2m_e} m_s \hbar$
 $\rightarrow F_z = \pm \frac{e\hbar}{2m_e} \frac{\partial B}{\partial z} \quad (4)$, mit $m_s = \pm \frac{1}{2}$ und $g_s = 2$

Aus (4) folgt: $M_{Ag} \ddot{z} = \pm \frac{e\hbar}{2m_e} \frac{\partial B}{\partial z} \quad (5)$

- Beim Austritt aus dem Magnetfeld gilt:

$$V_z = \dot{z} t_a = (\text{mit } 5) \pm \frac{e\hbar}{2m_e M_{Ag}} \frac{\partial B}{\partial z} t_a = (\text{mit } 2) \pm \frac{e\hbar a}{2m_e \sqrt{3kT M_{Ag}}} \frac{\partial B}{\partial z}$$

Von da an ist die Geschwindigkeit konstant:

$$\ddot{z} = V_z t_b = (\text{mit } 3) \frac{e\hbar a b}{6m_e kT} \frac{\partial B}{\partial z} \quad (6)$$

- Der Weg (in z-Richtung) im Magnetfeld beträgt:

$$\frac{d}{2} - \ddot{z} = \frac{1}{2} \ddot{z} t_a^2 = (\text{mit } 5) \frac{e\hbar}{4m_e M_{Ag}} \frac{\partial B}{\partial z} t_a^2 = \frac{e\hbar}{4m_e M_{Ag}} \frac{\partial B}{\partial z} \frac{a^2 M_{Ag}}{3kT} \Rightarrow d = 2 \times \left(\frac{e\hbar a^2}{12m_e kT} \frac{\partial B}{\partial z} - \frac{e\hbar a b}{6m_e kT} \frac{\partial B}{\partial z} \right) = \frac{e\hbar a}{3m_e kT} \frac{\partial B}{\partial z} \left(\frac{a}{2} + b \right) \quad (7)$$

- (c) (7) ist unabhängig von der Masse der Silberatome → selbes Ergebnis für verschiedene Isotope, und auch für andere Elemente, solange ihr magnetisches Moment von einem einzigen Elektron erzeugt wird.
- (d) Im Ofen erhalten die Atome thermische Geschwindigkeiten, die am besten durch eine Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung beschrieben wird.
 → Die gemessenen Linien sind nicht scharf, sondern gemäss der Verteilung der Geschwindigkeiten *verwaschen*.

2. Landé g-Faktor

- (a) z.B. $\vec{\mu}_l = -g_l \mu_B \frac{\vec{l}}{\hbar}$, d.h. g-Faktoren sind immer Verhältnisse von magnetischem Moment und Drehimpuls.
- (b) $g_j = 1 + \frac{j(j+1)+s(s+1)-l(l+1)}{2j(j+1)}$

- Eine Art der Herleitung ist im Haken-Wolf S217ff Kapitel 13.3.5; zum besseren Verständnis sollte jedoch auf $(\vec{\mu}_j)_j$ ein Lot in die Spitze $\vec{\mu}_l - \frac{1}{2}\vec{\mu}_s$ gefällt werden, dann erkennt man 3 rechtwinkelige Dreiecke, wobei 2 gleich sind, daher kommt der Faktor 2 im $|\mu_s|$ Term. Anstatt $|(\vec{\mu}_j)_j| = |\vec{\mu}_l| \cos(l, j) + |\vec{\mu}_s| \cos(s, j) = ..$ sollte man schreiben: $|(\vec{\mu}_j)_j| = |\vec{\mu}_l| \cos(l, j) + 2 \times \frac{1}{2} |\vec{\mu}_s| \cos(s, j) = ..$, der Cosinussatz wird dann im oberen Dreieck genutzt

- Herleitung zum aufgeführten Bild:

Hier ist das Zusammenspiel von Spin \vec{s} und Bahndrehimpuls \vec{l} zum Gesamtdrehimpuls $\vec{j} = \vec{s} + \vec{l}$ als Vektorgerüst im \vec{B} Feld gezeigt. Der Bahndrehimpuls des Elektrons \vec{l} koppelt mit seinem Spin \vec{s} über die entsprechenden magnetischen Momente zum Gesamtdrehimpuls $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$. $\vec{\mu}_l$ bzw. $\vec{\mu}_s$ sind wegen der negativen Ladung des Elektrons \vec{l} und \vec{s} entgegengesetzt. \vec{l} und \vec{s} präzedieren gemeinsam mit ω_{l_s} um \vec{j} . $\vec{\mu}_j = \vec{\mu}_l + \vec{\mu}_s$ weist nicht entgegengesetzt zu \vec{j} , sondern bildet einen Winkel mit der \vec{j} -Achse. $\vec{\mu}_j$ kreiselt daher mit der gleichen Frequenz um \vec{j} wie \vec{l} und \vec{s} . Ein angelegtes B-Feld (erheblich schwächer als das innere Feld (Erhaltung der Spin-Bahnkopplung)) $\rightarrow \vec{j}$ präzediert um die Feldrichtung mit der viel kleineren Lamor-Frequenz ω_j . Vom Gesamtmagnetischen Moment $\vec{\mu}_j$ wird bei der Wechselwirkung mit \vec{B} nur die auf \vec{j} projizierte Komponente $(\vec{\mu}_j)_j$ wirksam. Die Komponente $(\vec{\mu}_j)_{\text{senkrecht}}$ zu \vec{j} mittelt sich durch die schnelle Präzession heraus. Das äussere Magnetfeld ist im Prinzip noch so lange als schwach anzusehen, wie die Kopplung von \vec{l} und \vec{s} zu \vec{j} erhalten bleibt.

Die Wechselwirkung lautet demnach:

$E = -(\vec{\mu}_j)_j \vec{B}$, $(\vec{\mu}_j)_j =$ Komponenten von $\vec{\mu}_j$ in \vec{j} -Richtung
 $(\vec{\mu}_j)_j$ setzt sich aus den entsprechenden Komponenten von $\vec{\mu}_l$ und $\vec{\mu}_s$ zusammen

$$(\vec{\mu}_j)_j = \frac{\vec{\mu}_l \cdot \vec{j}}{|\vec{j}|} + \frac{\vec{\mu}_s \cdot \vec{j}}{|\vec{j}|}$$

$$(\vec{\mu}_j)_j |\vec{j}|^2 = (\vec{\mu}_s \cdot \vec{j}) \vec{j} + (\vec{\mu}_l \cdot \vec{j}) \vec{j} = -\frac{\mu_B}{\hbar} (\vec{l} \cdot \vec{j} + 2\vec{s} \cdot \vec{j}) \vec{j}$$

Mit $\vec{\mu}_l = -\frac{\mu_B}{\hbar} \vec{l}$, $\vec{\mu}_s = -g_s \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{s}$ mit $g_s = 2$ und $g_l = 1$

Wegen $2\vec{l} \cdot \vec{j} = \vec{j}^2 + \vec{l}^2 - \vec{s}^2$ und $2\vec{s} \cdot \vec{j} = \vec{j}^2 + \vec{s}^2 - \vec{l}^2$

können wir schreiben $(\vec{\mu}_j)_j |\vec{j}|^2 = -\frac{\mu_B}{\hbar} \frac{1}{2} (3\vec{j}^2 - \vec{l}^2 + \vec{s}^2) \vec{j}$

Legen wir für die Verknüpfungen von $(\vec{\mu}_j)_j$ mit \vec{j} den gleichen Zusammenhang wie bei Bahndrehimpuls und Spin zugrunde

$(\vec{\mu}_j)_j = -g_j \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{j}$ mit g_j als g-Faktor des Gesamtdrehimpulses, dann

ist $-g_j \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{j} |\vec{j}|^2 = -\frac{\mu_B}{\hbar} (3\vec{j}^2 - \vec{l}^2 - \vec{s}^2) \vec{j}$

Quantisierung: $\vec{j}^2 \rightarrow j(j+1)\hbar^2$, $\vec{l}^2 \rightarrow l(l+1)\hbar^2$, $\vec{s}^2 \rightarrow s(s+1)\hbar^2$.

Daher ist der g-Faktor:

$$g_j = \frac{3j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)}{2j(j+1)} = 1 + \frac{j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)}{2j(j+1)}$$

- (c) $p_{1/2} : l = 1, j = 1/2; s = 1/2 \rightarrow g_j^I = 2/3 \rightarrow \Delta E_{m_j, m_{j-1}}^I = \frac{2\mu_B}{3} |\vec{B}|$

$s_{1/2} : l = 0, j = 1/2; s = 1/2 \rightarrow g_j^{II} = 2 \rightarrow \Delta E_{m_j, m_{j-1}}^{II} = 2\mu_B |\vec{B}|$

Aufspaltung der Zeemann Komponente

Ein bekanntes in der Vorlesung vorgestelltes Beispiel ist die Na D-Linie!

Übergänge $2p_{1/2} \rightarrow 2s_{1/2} : 4; \quad 2p_{3/2} \rightarrow 2s_{1/2} : 6$

3. Spin-Bahn Kopplung

(a) Eigenwerte: $|\vec{j}| = \sqrt{j(j+1)}\hbar$

$$|\vec{s}| = \sqrt{s(s+1)}\hbar$$

$$|\vec{l}| = \sqrt{l(l+1)}\hbar$$

aus $j^2 = l^2 + 2ls + s^2$ folgt:

$$E_{ls} \sim \frac{\langle j^2 \rangle - \langle l^2 \rangle - \langle s^2 \rangle}{n^3 l(l+\frac{1}{2})(l+1)} = \frac{j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}}{n^3 l(l+\frac{1}{2})(l+1)}$$

$$\text{Für } j = l + \frac{1}{2} : E_{ls}^I = \frac{\alpha^2 mc^2}{4} \frac{l^2 + 2l + \frac{3}{4} - l^2 - l - \frac{3}{4}}{n^3 l(l+\frac{1}{2})(l+1)} = \frac{\alpha^2 mc^2}{4} \frac{1}{n^3 (l+\frac{1}{2})(l+1)}$$

$$\text{Für } j = l - \frac{1}{2} : E_{ls}^{II} = \frac{\alpha^2 mc^2}{4} \frac{l^2 - \frac{1}{4} - l^2 - l - \frac{3}{4}}{n^3 l(l+\frac{1}{2})(l+1)} = -\frac{\alpha^2 mc^2}{4} \frac{1}{n^3 l(l+\frac{1}{2})}$$

(b) Mit $\alpha = \frac{1}{137}, mc^2 = 0.5 MeV, \frac{1}{\lambda} = \frac{E}{ch} = \frac{E[eV]}{1.239 \cdot 10^{-4}} \left[\frac{1}{cm} \right]$

$$\rightarrow \frac{\alpha^4 mc^2}{4} = 3.55 \times 10^{-4} eV = 2.88 \frac{1}{cm}$$

n	1,2,3	2	3	3
l	0	1	1	2
E_{ls}^I	-	$1.5 \times 10^{-5} eV = 0.12 \frac{1}{cm}$	$4.4 \times 10^{-6} eV = 0.04 \frac{1}{cm}$	$1.8 \times 10^{-6} eV = 0.01 \frac{1}{cm}$
E_{ls}^{II}	-	$-3.0 \times 10^{-5} eV = 0.24 \frac{1}{cm}$	$-8.8 \times 10^{-6} eV = 0.07 \frac{1}{cm}$	$-2.6 \times 10^{-6} eV = -0.02 \frac{1}{cm}$

Beobachtung mit konventionell spektroskopischen Mitteln bei Wellenzahlen $< \frac{1}{cm}$ scheitern an der Dopplerverbreiterung. Nur Alkaliatome, nicht Erdalkaliatome haben ein Elektron in der nicht-abgeschlossenen äusseren Schale. Wegen $E_{ls} \sim Z^4$ (da $\alpha \rightarrow \alpha Z^2$ für $Z > 1$) ist selbst bei Lithium die Aufspaltung ca. ein Faktor ≈ 100 (3^4) grösser, und ist deshalb mit konv. Methoden messbar.

(c) Für $l=0$ misst man nur den Spinmagnetismus \rightarrow keine Spin-Bahn Kopplung.

$$E_n = -\frac{13.6 eV}{n^2}; \text{ keine l-Entartung; keine j-Entartung}$$

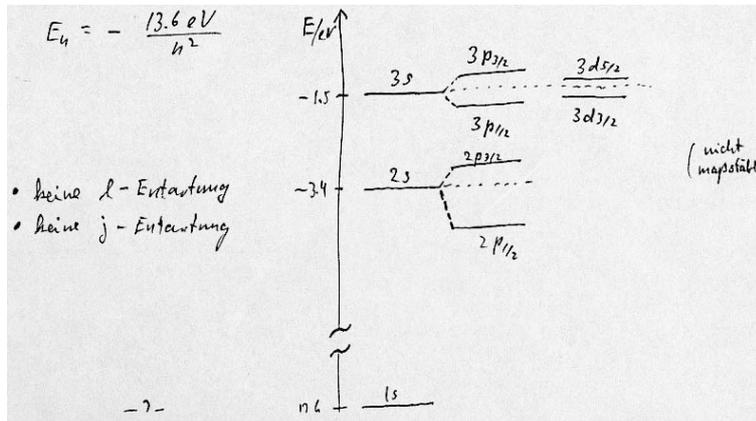


Abbildung 2: Termschema.

4. Feinstruktur

- Geschwindigkeitsabhängige Massen, E-Feldkorrekturen
- Aufspaltungen

n	1	2	2	2	3	3	3	3	3
l	0	0	1	1	0	1	1	2	2
j	1/2	1/2	3/2	1/2	1/2	3/2	1/2	3/2	5/2
ΔE_{nj} [eV]	-1.8 $\times 10^{-4}$	-5.7 $\times 10^{-5}$	-1.1 $\times 10^{-5}$	-5.7 $\times 10^{-5}$	-2.0 $\times 10^{-5}$	-6.7 $\times 10^{-5}$	-2.0 $\times 10^{-5}$	-6.7 $\times 10^{-6}$	-2.2 $\times 10^{-6}$

- **Feinstruktur senkt *alle* Niveaus (auch s-Niveau)**
- j-Entartung

5. Positronium

Beim Positronium fließt im Schwerpunktsystem aufgrund der gegensätzlichen Ladungen bei gleichen Massen kein Strom, d.h. auch ein magnetisches Moment des Bahndrehimpulses verschwindet. (Beim Orthopositronium ($S = 1$) bleibt das magnetische Moment des Gesamtspins.)