Experimentelle Physik IV

Lösungen der Übungsblätter

KIT - Karlsruher Institut für Technologie

Sommersemester 2012

Mitschriebe ausgearbeitet von

Philipp Basler, Nils Braun, Larissa Bauer

16. Juli 2012

Inhaltsverzeichnis

1. Übung **5**

1. Aufgabe (Größen I) 8
2. Aufgabe (Größen II) 9
3. Aufgabe (Größen III) 9
4. Aufgabe (Optische Auflösung) 10
5. Aufgabe (Mikroskopie) 10

2. Übung **10**

6. Aufgabe (Bragg-Reflexion) 13
7. Aufgabe (e/m-Bestimmung) 13
8. Aufgabe (Rutherford) 15
9. Aufgabe (Photoeffekt) 16

3. Übung **17**

10. Aufgabe (Photonen) 20
11. Aufgabe (Compton - Effekt) 20
12. Aufgabe (Milikan) 22

4. Übung **23**

13. Aufgabe (Heisenbergsche Unschärferelation) 25
14. Aufgabe (Materiewellen) 25
15. Aufgabe (Welle-Teilchen-Dualismus) 25
16. Aufgabe (Wellenfunktion) 26

5. Übung **27**

17. Aufgabe (Das Bohrsche Atommodell) 30
18. Aufgabe (Spektroskopische Vorbemerkung) 31
19. Aufgabe (Termschema, Lichtemission) 31
20. Aufgabe (Isolierte Atome) 32
21. Aufgabe (Absorptions-Balmerlinien) 32
22. Aufgabe (Stationäre Schrödingergleichung) 32
23. Aufgabe (Potentialtopf) 33
24. Aufgabe (Zusatzaufgabe) 36

6. Übung **36**

25. Aufgabe (Korrespondenzprinzip) 38
26. Aufgabe (Positronium) 38

27. Aufgabe (Myon) . . . 39
28. Aufgabe (Franck-Hertz-Versuch) . . . 39
29. Aufgabe (Ionisiertes Helium-Atom) . . . 40
30. Aufgabe (Rückstoßenergie) . . . 40

7. Übung **40**
31. Aufgabe (Drehimpulsoperatoren) . . . 43
32. Aufgabe (l ist 3) . . . 43
33. Aufgabe (Mögliche Kombinationen) . . . 44
34. Aufgabe (Gequantelte Schalplatte) . . . 44
35. Aufgabe (1s-Zustand) . . . 44
36. Aufgabe (Atome verschiedener Zustände) . . . 46
37. Aufgabe (Einstein-de-Haas Versuch) . . . 46

8. Übung **47**
38. Aufgabe (Stern-Gerlach Versuch) . . . 50
39. Aufgabe (Landé g-Faktor, anomaler Zeemann Effekt) . . . 50
40. Aufgabe (Spin-Bahn-Kopplung) . . . 52
41. Aufgabe (Feinstruktur beim Wasserstoff) . . . 52
42. Aufgabe (Positronium) . . . 53

9. Übung **53**
43. Aufgabe (Normaler Zeemann-Effekt) . . . 56
44. Aufgabe (Hyperfeinstruktur) . . . 56
45. Aufgabe (Charakteristische Röntgenstrahlung) . . . 57
46. Aufgabe (ESR-Spektrometer) . . . 58

10. Übung **58**
47. Aufgabe (NMR) . . . 60
48. Aufgabe (Zwei-Elektronen-System) . . . 61
49. Aufgabe (Spektren komplexer Atome) . . . 62
50. Aufgabe (Alkaliatome) . . . 62
51. Aufgabe (Stark Effekt) . . . 62

11. Übung **63**
52. Aufgabe (Unterschiede) . . . 65
53. Aufgabe (Hund'sche Regeln) . . . 65
54. Aufgabe () . . . 65
55. Aufgabe (Wolframatom) . . . 65

56. Aufgabe (Übergänge im Kaliumatom) 65

12. Übung **65**

57. Aufgabe (Flugweite virtueller Teilchen) 67
58. Aufgabe (Laser) 67
59. Aufgabe (Helium-Moleküle) 68
60. Aufgabe (Hybridisierung) 68

1. Übung

Physik IV – Atome und Moleküle; Sommer 2012

Prof. Wim de Boer & Dr. Frank Hartmann, KIT

Aufgabenblatt 1; Übung am 23. April (Montag)

1. Größen I

   (a) Nennen Sie typische Größenordnungen für:
   - die Größe eines Wasserstoffatoms
   - die Größe des Atomkerns von Wasserstoff
   - die Masse eines H-Atoms (in kg und atomaren Einheiten u)
   - die Anzahl der Wasserstoffmoleküle in
     i) einem Mol, ii) einem Liter Wasser
   - die Anzahl Elektronen, die bei einer Stromstärke von 1 A fließen
   - die Anzahl Elektronen, welche sich bei 10 V in einer Kapazität von 1pF sammeln

   (b) Wie groß ist die Loschmidt-Zahl N_L (Avogadro Konstante), was bedeutet sie, wie wird sie festgelegt, wie gemessen?

   (c) Energien werden in der Atom- und Teilchenphysik oft in Einheiten von eV angegeben. WARUM? Wieviel Joule entspricht 1 MeV? Wie schnell bewegt sich ein Proton der Energie 5 GeV, ein Elektron der Energie 1 MeV, ein Elektron der kinetischen Energie von 10 eV? Welche Bindungsenergie erwarten Sie für das Elektron des Wasserstoffatoms?

2. Größen II
   Beschreiben Sie das Bragg-, das Laue- und das Debeye Scherer Verfahren zur Kristallgitterbestimmung.

3. Größen III
   Flüssiges Helium (Atomgewicht 4.003) hat die Dichte ρ=0.13 g/cm^3. Schätzen Sie den Radius eines He-Atoms ab, unter der Annahme, daß die Atome sich in einer dichtesten Kugelpackung befinden (Raumfüllung 74%).

4. Die optische Auflösung ist begrenzt durch

$$d = \frac{\lambda}{n \sin \alpha}$$

   wobei d die Auflösung, n der Brechungsindex der verwendeten Linse und α der Öffnungswinkel ist. Welche Auflösung ist mit sichtbaren Licht, welche mit Röntgenlicht möglich? Warum erreicht man mit Röntgenlicht die theoretische Auflösung nicht? Welche Wellenlänge benötigt man um Kerne aufzulösen?

5. Um Atome trotzdem optisch darzustellen wurden verschiedene Methoden entwickelt, bsp: Feldemissionsmikroskop, Raster-Tunnelmikroskop! (Bsp.: Haken Wolf; Seite 21ff oder ähnliche Literatur. Dieser Versuch wird im Rahmen des Anfängerpraktikums PII durchgeführt. (Glüh- und Feldemission))
   Auf dem gezeigten Bild sehen Sie Barium-Atome in makroskopischer Auflösung. Machen Sie sich die Methoden klar und erklären Sie sie in den Übungen.

Abbildung 1: *Barium-Atome in makroskopischer Auflösung auf der Spitze einer Wolfram-Nadel.*

Matrix:(1.1/1.2-1.3/2/3/4/5)

Den Schein erwirbt man durch das Bestehen der Semesterabschlussklausur. Die Zulassung zur Klausur erwirbt man, indem 50% der Aufgaben *virtuell* gerechnet wurden.

Virtuelles Rechnen: Zu Beginn des Tutoriums legt man fest, welche Aufgaben man vorrechnen kann, hiermit erklärt man sich auch bereit diese Aufgabe nach Aufforderung vorzurechnen.

Übungsleiter: Frank Hartmann,
Tel.: +41 (76) 487 4362; Email: Frank.Hartmann@kit.edu

www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/∼hartmann/atom12.htm

1. Aufgabe: Größen I

(a) Die Größen liegen im Bereich

- Wasserstoffatom: Ångström / 25 Pikometer
- Atomkern: 5000 mal so klein (Femtometer), 0.75 fm
- Masse eines Wasserstoff-Atomkerns: 1,0079 u oder $1.66 \cdot 10^{-27}$ kg
- Anzahl der Wasserstoffmoleküle: Ein Mol Wasser enthält $N_A \approx 6 \cdot 10^{23}$ Teilchen. Ein Liter Wasser enthält

  $$n = \frac{m}{M} = \frac{1000}{18} = 55.5 \text{ mol}$$

  und damit ungefähr $333.3 \cdot 10^{23}$ Teilchen.
- ungefähr $6.25 \cdot 10^{18}$
- ungefähr $6.25 \cdot 10^{7}$

(b) Sie beträgt $6.022 \cdot 10^{23}$ 1/mol und gibt an, wie viele Teilchen sich in einem Mol eines Stoffes befinden. Sie ist definiert über die Anzahl der Atome in 12 Gramm reinem C-12. Heutzutage wird die Konstante durch das Avogadroprojekt gemessen, welches die größe von Elementarzellen in Eiskristallen mithilfe von Röntgenbeugungsversuchen misst.

(c) Da viele zu berechnende Prozesse mit Teilchen von Statten gehen, die die Elementarladung tragen ist es einfacher, direkt mit der Energie zu rechnen (statt in $W = U \cdot Q$ immer wieder die Elementarladung einsetzen zu müssen). Es ist

$$1 \text{ MeV} = 1,602 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

Es gilt

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 = \frac{m^2v^2c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + m^2c^4$$

Umgeformt ergibt dies

$$v = \frac{\sqrt{E^2 - m^2c^4}c}{E}$$

Damit folgt für das Proton bei 5 GeV

$$v_p \approx 2.945 \cdot 10^8 \ \frac{m}{s}$$

Für das Elektron bei 1 MeV

$$v_{e,1} \approx 2.577 \cdot 10^8 \ \frac{m}{s}$$

und bei 10 eV bei Anwendung von

$$10 \text{ eV} = \gamma m_e v c$$

$$v \approx 1.88 \cdot 10^6 \ \frac{m}{s}$$

Die Bindungsenergie beträgt ungefähr 13.6 eV.

2. Aufgabe: Größen II

Bragg-Verfahren Der Kristall wird mit monochromatischen Röntgenlicht bestrahlt. Das Röntgenlicht führt bei den im Kristall befindlichen Elektronen zu einer erzwungenen Schwingung - die Elektronen senden selbst wieder Röntgenstrahlung aus. Verschiedene Strahlen von verschiedenen Gitterebenen interferieren dann miteinander und nur noch ein Teil der emittierten Strahlen lassen sich unter ganz bestimmten Winkeln beobachten (typische Interferenzerscheinung mit Maxima und Minima). Es ist

$$n\lambda = 2d \sin\theta$$

Laue-Verfahren Im Gegensatz zum Bragg-Verfahren wird hier mit nicht-monochromatischem Licht gearbeitet, was zu mehreren gleichzeitigen Interferenzbildern führt. Somit lassen sich schneller mehr Informationen erhalten. Später müssen aber die einzelnen Interferenzerscheinungen wieder auseinandergehalten und nach Wellenlänge getrennt werden (Indizierungsproblem)

Debye-Scherrer-Verfahren Bei den vorigen Verfahren wurde immer ein Einkristall verwendet. Hier kommt jetzt Pulver des Kristalles zur Verwendung. Trifft ein Röntgenstrahl gerade so auf eine der zufällig angeordneten Subkristallschichten, dass die Bragg-Bedingung erfüllt ist, so entsteht ein Kreis (oder Kegel) auf der Fotoplatte.

3. Aufgabe: Größen III

Wir nehmen also an, ein Heliumatom würde aus einer Kugel mit Radius r und Masse $m = 4.003$ u bestehen. Wir betrachten 0.13 Gramm (entsprechend $7.831 \cdot 10^{22}$ u) Heliumgas. Dieses hat (mit der gegebenen Dichte) ein Volumen von 1 cm^3. Die Raumfüllung beträgt

74 Prozent, weshalb also 0.74 cm^3 wirklich mit Heliumatomen besetzt sind. Es befinden sich (laut der Masse) $N = 1.956364052 \cdot 10^{22}$ Heliumatome. Also

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 N \implies r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi N}} = 2.083 \cdot 10^{-10}\ \text{m}$$

4. Aufgabe: Optische Auflösung

Wir haben

$$d = \frac{\lambda}{\sin\alpha}$$

Die Formel sagt uns aus, dass die Auflösungsgrenze in etwa in der Nähe der Wellenlänge liegt. Bei einer Wellenlänge von $\lambda = 500$ nm (sichtbares Licht) und einem Brechungsindex von 1,7 liegen wir ungefähr bei 3000 Ångeström. Bei Röntgenlicht kommt man nicht so weit, weil es keine Linsen mit solch einem Brechungsindex gibt. Für die Kerne benötigt man eine Energie von

$$E = \frac{hc}{\lambda} = 1.24 \cdot 10^8\ \text{eV}$$

5. Aufgabe: Mikroskopie

Feldemissionsmikroskopie Bei der FEM wird eine ultra dünne Spitze (meist Wolfram) in kleiner Entfernung über das zu untersuchende Material gehalten. Durch einen Potentialunterschied werden die Elektronen aus der Nadel herausgelöst und zum Material hin beschleunigt. Dies gibt Rückschluss darüber, wo sich welche Atome auf dem Material befinden (da die Energieverteilung nicht homogen ist).

Raster-Tunnel-Mikroskopie Ein ähnlicher Aufbau wird auch bei der RTM benutzt. Hier wird aber das Tunneln der Elektronen ausgenutzt und nur eine kleine Spannung angelegt. Der fließende Strom gibt Rückschluss auf die Entfernung Spitze-Material, da die Tunnelwahrscheinlichkeit bei kleineren Abständen ansteigt. Somit lässt sich eine Art Reliefmuster erzeugen.

2. Übung

Physik IV – Atome und Moleküle; Sommer 2012

Prof. Wim de Boer & Dr. Frank Hartmann, KIT

Aufgabenblatt 2; Übung am 30. April

1. Bragg-Reflexion
   Leiten sie den Bragg-Winkel (auch Glanzwinkel genannt) her.

2. Teilchen im elektromagnetischen Feld; e/m Messung; Isotopenbestimmung: Geladene Teilchen unbekannter Masse werden in einem Zyklotron auf die Endgeschwindigkeit v_0 gebracht. Darin ist senkrecht zur Teilchenbahn ein konstantes Magnetfeld B_Z angelegt. Die Ionen werden in der Lücke zwischen den Elektroden durch eine Spannung der Form $U = U_0 sin(\omega t)$ beschleunigt, d.h. sie erhalten bei jedem halben Umlauf eine zusätzliche kinetische Energie von 20keV. Um eine resonante Beschleunigung zu erreichen, muß die Frequenz des Ionenumlaufs mit der Wechselfrequenz koinzidieren.
   Nach mehreren Umläufen verlassen die Ionen den Beschleuniger und treten in ein langen Kondensator mit dem Plattenabstand d=4mm ein. Dessen homogenes elektrisches Feld ist ein homogenes Magnetfeld der Stärke B=10mT orthogonal überlagert.

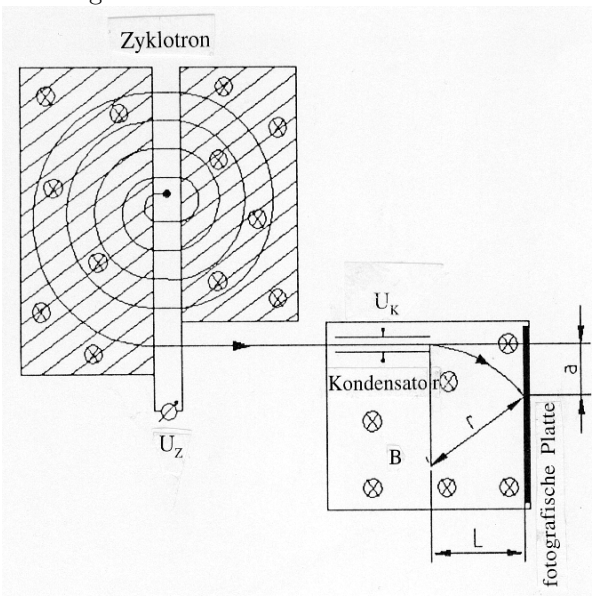


Abbildung 1: *Teilchen im elektromagnetischen Feld; e/m Messung.*

(a) Bei der Einstellung einer bestimmten Spannung von $U_K = 8000V$ zwischen den Platten beobachtet man, dass die Teilchen sich auf einer gerade Bahn bewegen und den Kondensator wieder verlassen. Erklären sie diesen Befund! Wie groß ist die Austrittsgeschwindigkeit? Muß man relativistisch rechnen?

(b) Nach dem Verlassen des Kondensators trifft der Teilchenstrahl auf eine im Abstand $L = 1.6m$ befindliche fotografische Platte. Die Ablenkung aufgrund des dortigen Magnetfeldes beträgt a=4.5mm. Bestimmen sie Q/m, wobei Q ein vielfaches der Elementarladung ist und m die Ruhemasse der Ionen. Um welches Ion handelt es sich?

(c) Wie groß war die Anzahl der Umdrehungen der Ionen im Zyklotron?

(d) Wie groß war die Umlaufzeit eines Ions der Energie E im Magnetfeld B_Z des Zyklotrons? Zeigen sie: Der relativistische Masseanstieg der Ionen bedingt, dass bei der konstanten Wechselspannungsfrequenz ω die Beschleunigungsresonanzbedingung schon bald nicht mehr erfüllt ist (detuning). Um dies zu verhindern, muß die Wechselspannungsfrequenz zeitlich geändert werden, $\omega = \omega(t)$ (Synchro-Zyklotron). Finden sie zur Berechnung von $\omega(t)$ einen Ausdruck für die Umlauffrequenz des Teilchens als Funktion der Energie, und berücksichtigen sie, dass das Ion eine zusätzliche Energiezunahme von $2\int \frac{\hat{E}}{T(t)}dt = \frac{1}{\pi}\int \hat{E} \times \omega(t)dt$ erfährt, wobei
$\hat{E}$: Energieaufnahme pro halben Umlauf,
T: Umlaufzeit.
Lösen die resultierende Integralgleichung durch zeitliches Differenzieren.

3. Rutherford

(a) Bestimmen sie den Abstand der größten Annäherung für Protonen der kinetischen Energie (a) 1 MeV, (b) 10 MeV, die frontal gegen einen Goldkern fliegen, und vergleichen sie das Resultat mit dem Kernradius. In welchem Fall würde das Proton den Kern *berühren*? Bestimmen sie die kinetische Energie des Protons, wenn es den Kern *berührt*.

(b) Was versteht man unter anomaler Rutherfordstreuung?

(c) Um welchen Winkel wird ein 4 MeV α-Teilchen gestreut, wenn es sich einem Goldkern mit dem Stoßparameter von $2,6 \times 10^{-13} m$ genähert hat?

4. Photoeffekt

(a) Warum steht der Photoeffekt im Widerspruch zur klassischen Physik?

(b) In einem Experiment zum Photoeffekt wird eine Metalloberfläche mit Licht verschiedener Wellenlängen λ_i bestrahlt. Die Gegenspannungen U_i, bei denen der Strom aus der Oberfläche gerade verschwindet werden gemessen. Bestimmen sie die Austrittsarbeit W_i und das Plancksche Wirkungsquantum h!

$\lambda_i[nm]$	216	260	317	368	403
$U_i[V]$	2.83	1.86	1.0	0.45	0.16

Matrix: (1/2a+2b/2c+2d/3a+3b/3c/4)

Übungsleiter: Frank Hartmann,
Tel.: +41 (76) 487 4362; Email: Frank.Hartmann@kit.edu

www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/∼hartmann/atom12.htm

6. Aufgabe: Bragg-Reflexion

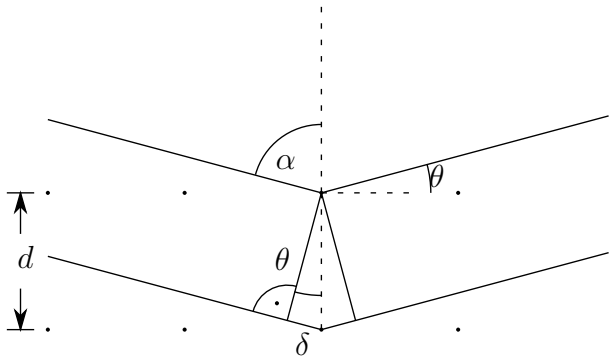


Abbildung 1: Bragg-Reflexion

Der Gangunterschied ist folglich 2δ. Damit konstruktive Interferenz entsteht, muss der Gangunterschied ein Vielfaches der Wellenlänge betragen

$$n\lambda = 2\delta$$

Aus der Zeichnung kann man die Winkelbeziehung ablesen

$$\sin\theta = \frac{\delta}{d}$$

Für den Bragg-Winkel ergibt sich also

$$\theta = \arcsin\left(\frac{n\lambda}{2d}\right)$$

7. Aufgabe: e/m-Bestimmung

(a) Wenn die Teilchen den Kondensator geradlinig durchlaufen, heißt das, dass die Kraft, die durch das elektrische Feld ausgeübt wird, gleich groß ist, wie die Kraft, die durch das magnetische Feld ausgeübt wird.

$$F_{\text{el}} = F_{\text{magn}}$$

$$QE = QvB$$

mit $E = \frac{U}{d}$

$$v = \frac{U_K}{dB} = 2 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

An diesem Wert können wir erkennen, dass wir relativistisch rechnen müssen.

(b) Da das Teilchen sich nicht mehr im Kondensator befindet, fällt die Kraft durch das elektrische Feld weg und die Kraft durch das Magnetfeld wirkt als Zentripetalkraft.

$$F_{\text{magn}} = F_{\text{zentri}}$$

$$QvB = \gamma m \frac{v^2}{r}$$

Aus der Zeichnung auf dem Übungsblatt lässt sich erkennen:

$$r^2 = L^2 + (r-a)^2$$

$$r = \frac{L^2 + a^2}{2a}$$

$$\frac{Q}{m} = \frac{\gamma v}{rB} = \frac{\gamma v 2a}{(L^2+a^2)B} = 9.42 \cdot 10^7 \frac{\text{C}}{\text{kg}}$$

Der Wert entspricht ungefähr dem eines Protons. Der exakte Wert ist $\frac{e}{m_{\text{Proton}}} = 9.58 \cdot 10^7 \frac{\text{C}}{\text{kg}}$.

(c) Die Gesamtenergie des Protons ist

$$E_{\text{ges}} = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} = \sqrt{m^2c^4 + (\gamma m_0 v c)^2}$$

Da wir nur die kinetische Energie gegeben haben, ziehen wir die Ruheenergie ab.

$$E_{\text{kin}} = E_{\text{ges}} - m_0c^2 = 5.12 \cdot 10^{-11}\text{J}$$

Bei jeder Umdrehung bekommt das Proton die zusätzliche Energie von $E_{\text{Umdr}} = 40\text{keV}$. Die Zahl der Umdrehungen ergibt sich dann als

$$N_{\text{Umdr}} = \frac{E_{\text{kin}}}{E_{\text{Umdr}}} = 8006$$

(d) Durch Gleichsetzen der Zentripetal- und Lorentzkraft erhalten wir mit $v = \omega r$

$$\omega = \frac{QB}{\gamma m}$$

Für die Periodendauer ergibt sich dann

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi\gamma m}{QB} = \frac{2\pi}{QBc^2}\left(E_{\text{kin}} + mc^2\right)$$

Diese Energie ist aber nicht unabhängig von der Geschwindigkeit (nur im Fall kleiner

Geschwindigkeiten ist $E_{\text{kin}} \ll mc^2$). Das bedeutet, ω muss an diese Veränderung angepasst werden. Wir betrachten deshalb ω als Funktion der Gesamtenergie, die bei jedem Umlauf um $\hat{E}$ gesteigert wird, also

$$\omega\left(m_0c^2 + \frac{\hat{E}}{\pi}\int \omega \mathrm{dt}\right) = QBc^2$$

nach der Formel von oben. Einmal differenzieren ergibt

$$\frac{\hat{E}}{\pi}\omega = -QBc^2\frac{\dot{\omega}}{\omega^2}$$

und umgestellt

$$\int \mathrm{dt} = -\frac{QBc^2\pi}{\hat{E}}\int \frac{1}{\omega^3}\mathrm{d}\omega$$

Als Anfangsumlauffrequenz wird ω_0 gewählt.

$$t = \frac{QBc^2\pi}{2\hat{E}}\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega_0^2}\right)$$

Dies nach ω umgestellt ergibt

$$\omega(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{2\hat{E}t}{QBc^2\pi} + \frac{1}{\omega_0^2}}}$$

8. Aufgabe: Rutherford

(a) Die kinetische Energie entspricht der Energie durch die Couloumbkraft. Z bezeichnet die Kernladungszahl des Goldatoms.

$$E_{\text{kin}} = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$r = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 E_{\text{kin}}}$$

Für ein Proton mit 1 MeV ergibt sich

$$r = 1.14 \cdot 10^{-13}\ \text{m}$$

Für ein Proton mit 10 MeV ergibt sich

$$r = 1.14 \cdot 10^{-14}\ \text{m}$$

Damit das Proton den Atomkern des Goldatoms berührt, muss gelten

Da gibts viele verschiedene Werte

$$r = r_{\text{Kern, Au}} = 5.149 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

$$E_{\text{kin}} = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = 3.53 \cdot 10^{-12} \text{ J} = 2.21 \cdot 10^7 \text{ eV}$$

(b) Unter anormaler Rutherfordstreuung versteht man, wenn das Kernpotential vom einfallenden Teilchen berührt wird und somit nicht nur das Coulombpotential wirkt.

(c) Für den Stoßparameter gilt

$$p = \frac{k}{mv_0^2} \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

mit $k = \frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}$
Umgeformt erhalten wir

$$\theta = 2\text{arccot}\left(\frac{4\pi\varepsilon_0 E_{\text{kin}}}{Ze^2}\right) = 0.218 = 12.49°$$

9. Aufgabe: Photoeffekt

(a) In der klassischen Physik müsste die Auslösung der Elektronen aus dem Metall von der Intensität des Lichts und nicht von dessen Frequenz abhängen.

(b) Für den Fotoeffekt gilt

$$E_{\text{kin}} = h\nu - E_{\text{B}} = eU$$

Über $\nu = \frac{c}{\lambda}$ lässt sich folgende Tabelle erstellen.

ν (10^{15} Hz)	1.39	1.15	0.946	0.815	0.744
λ (nm)	216	260	317	368	403
U (V)	2.83	1.86	1.0	0.45	0.16

Eine lineare Regression ergibt

$$U(\nu) = -2.9228 \frac{\text{eV}}{e} + 4.15 \cdot 10^{15} \frac{\nu}{e}$$

Daraus lässt sich ablesen, dass die Austrittsarbeit

$$E_{\text{B}} = 2.9228 \text{ eV}$$

beträgt und das Plancksche Wirkungsquantum

$$h = 4.15 \cdot 10^{-15} \text{ eVs}$$

beträgt.

3. Übung

Physik IV – Atome und Moleküle; Sommer 2012

Prof. Wim de Boer & Dr. Frank Hartmann, KIT

Aufgabenblatt 3; Übung am 7.Mai (Montag)

1. Photonen

   (a) Wieviel Masse verliert eine 100 W-Glühbirne innerhalb eines Jahres infolge der Lichtausstrahlung?

   (b) Das auf Dunkelheit adaptierte menschliche Auge vermag eine Photonenrate von N=5 Photonen pro Sekunde bei grünem Licht (λ) gerade noch als Lichtreiz wahrzunehmen. In welcher Entfernung R könnte man demnach eine Lichtquelle von P=100W dieser Wellenlänge gerade noch wahrnehmen? Der Pupillendurchmesser des Auges sei zu 8mm angenommen. Die Absorption des Lichtes in der Luft sei vernachlässigbar.

   (c) Berechnen Sie die Temperatur der Sonnenoberfäche unter der Annahme, dass die Sonne ein schwarzer Körper ist und das Maximum ihres Spektrums etwa bei $\lambda = 500$ nm (grün) liegt.

2. Comptoneffekt

   (a) Ein Photon der Energie E_γ wird an einem freien Teilchen der Ruhemasse m_0 gestreut. Compton beobachtete 1921, dass für die Wellenlängenverschiebungen gestreuter Photonen ein einfacher Zusammenhang mit dem Streuwinkel besteht. Berechnen sie daraus die kinetische Energie des Teilchens, das unter dem Winkel ϕ bezüglicher Richtung des einlaufenden Photons gestreut wird! Unter welchem Winkel erhÌt das Teilchen maximale Energie?

   (b) Welche Energie kann ein Photon der Wellenlänge $\lambda = 400\,\text{nm}$ auf ein freies Elektron übertragen?

   (c) Kann das Photon seine gesamte Energie dem freien Elektron übertragen? Könnte das Photon auch Elektronen aus dem Metall herausschlagen?

   (d) In einem Comptonexperiment erhält ein Elektron die kinetische Energie $0,1\,\text{MeV}$ durch den Stoßmit einem Photon der Energie 500 keV. Bestimmen Sie die Wellenlänge und den Winkel des gestreuten Photons, wenn das Elektron sich anfänglich in Ruhe befand.

3. Milikan Versuch

Mit einem Zerstäuber werden Öltröpfchen in einen großen, luftgefüllten Kondensator geblasen, dessen horizontale Platten den Abstand $d = 6\,\text{mm}$ haben. Die durch das Zerstäuben enstandenen Tröpfchen sind i.a. schwach elektrisch geladen. Mit einer an den Kondensator passend angelegten Spannung U kann ein ausgewähltes Tröpfchen zum Schweben gebracht werden. Aufgrund der Brown'schen Bewegung ist dieser Schwebezustand jedoch experimentell schwer einstellbar. Um die Größe der Elementarladung zu bestimmen, wird daher eine dynamische Methode bevorzugt, bei der die konstante Geschwindigkeit des Tröpfchen gemessen wird.

(a) Welche Kräfte wirken auf das kugelförmig angenommene Tröpfchen?

(b) Im Experiment wurden unter Normalbedingungen die in der Tabelle aufgeführten Geschwindigkeitswertepaare für 7 verschiedene Tröpfchen gemessen, wobei v_1 bei der Spannung $U_1 = 500\,\text{V}$ und v_2 bei der umgepolten Spannung $U_2 = -U_1$ aufgenommen wurde. Stellen Sie für jede der beiden Geschwindigkeiten die Kräftegleichgewichtsgleichung auf, und berechnen Sie daraus Radius und Ladung des jeweiligen Tröpfchens. Bestimmen Sie hieraus den Mittelwert der Elementarladung e und den Fehler (Standardabweichung) der Messung.

Messung	1	2	3	4	5	6	7
v_1 $(10^{-4} ms^{-1})$	0,41	0,71	1,13	0,79	0,64	0,44	0,71
v_2 $(10^{-4} ms^{-1})$	2,49	5,02	2,86	4,05	6,09	3,83	2,65

Es sei:
$\rho_{\text{Oel}} = 8,75\,\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$, $\rho_{\text{Luft}} = 1,30\cdot10^{-3}\,\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$, $\eta_{\text{Luft}} = 1,81\cdot10^{-5}\,\text{Nsm}^{-2}$

Anmerkung: Die Annahme Stoke'scher Reibung ist nur gerechtfertigt für die Bewegung einer Kugel in einem homogenen Medium. Liegen die Radien der Tröpfchen jedoch in der Größenordnung der mittleren freien Weglänge in Luft bei Normaldruck, so ist diese Voraussetzung nur schlecht erfüllt. Diese Tatsache wird durch die sog. Cunningham-Korrektur der dynamischen Viskosität der Luft berücksicht:

$$\eta'_{\text{Luft}} = \frac{\eta_{\text{Luft}}}{1 + 0,83\frac{\lambda}{r}}$$

mit $\lambda_{\text{Luft}} = 10^{-7}\,\text{m}$ dem mittleren Abstand der Luftmoleküle.

Matrix(1/2a/2b-d/3)

Übungsleiter: Frank Hartmann,
Tel.: +41 (76) 487 4362; Email: Frank.Hartmann@kit.edu

www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/∼hartmann/atom12.htm

10. Aufgabe: Photonen

(a) Verlorene Masse

$$m = \frac{100\,\mathrm{W} \cdot 1\,\mathrm{a}}{c^2} = 3.5 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{kg} = 1.97 \cdot 10^{28}\,\frac{\mathrm{eV}}{\mathrm{c}^2}$$

(b) Annahme: Grünes Licht hat $\lambda = 500\,\mathrm{nm}$.
Mit dem Verhältnis des Raumwinkels erhalten wir

$$\frac{Nh\nu}{P} = \frac{F}{4\pi R^2}$$

Dies liefert uns

$$R = \sqrt{\frac{FP}{4\pi N h\nu}} \approx 14190\,\mathrm{km}$$

(c) Rayleigh-Jeans sagt uns

$$P(\lambda, T) = \frac{8\pi k_B T}{\lambda^4}$$

Es gilt

$$\lambda \cdot T = 2.9 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{mK}$$

Dies ist das Wiensches Verschiebungsgesetzt. Also

$$T_{max} = 5800\,\mathrm{K}$$

11. Aufgabe: Compton - Effekt

(a) Vor dem Stoß : Photon $q_0^\mu = (\frac{\hbar\omega_0}{c}, \vec{q}_0)$, Teilchen $P^\mu = (m_0 c, 0)$.
Nach dem Stoß : Photon: $q_1^\mu = (\frac{\hbar\omega_1}{c}, \vec{q}_1)$.
Energieerhaltung und Impulserhaltung liefert uns

$$\hbar\omega_0 + m_0 c^2 = \hbar\omega_1 + \sqrt{|\vec{p}|^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$
$$\vec{q}_0 = \vec{q}_1 + \vec{p}$$

Benutzen wir nun noch $|q_i| = \frac{\hbar\omega_i}{c}$, so erhalten wir durch quadrieren der zweiten gleichung

$$|\vec{p}|^2 = (\vec{q}_0 - \vec{q}_1)^2 = \frac{\hbar^2}{c^2}\left(\omega_0^2 + \omega_1^2 - 2\omega_0\omega_1 \cos\theta\right)$$

Die erste Gleichung liefert uns damit

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{\frac{\hbar\omega_0}{m_0c^2}(1-\cos\theta)+1}$$

Dies liefert uns insgesamt für die kinetische Energie

$$E_{kin} = \frac{|\vec{p}|^2}{2m_0} = \frac{\hbar^2}{2m_0c^2}\left(\omega_0^2 + \frac{\omega_0^2}{\left(\frac{\hbar\omega_0}{m_0c^2}(1-\cos\theta)+1\right)^2} - \frac{2\omega_0\cos\theta}{1+\frac{\hbar\omega_0}{m_0c^2}(1-\cos\theta)}\right)$$

Ein Maximum liegt vor bei

$$\partial_\phi E_{kin} = 0 \Longleftrightarrow \theta = 0 \in \mathbb{R} \vee \theta = \arccos\left(1 + \frac{{m_0}^2c^4}{\hbar\omega_0\ (\hbar\omega_0 + m_0c^2)}\right) \in \mathbb{C}$$

Oben drüber nicht beachten

Energieerhaltung:

$$E_{ph} = E'_{ph} + E_{e,kin}$$

$$E_{kin} = E_{ph} - E'_{ph} = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} = \frac{hc(\lambda'-\lambda}{\lambda\lambda'}$$

Die Comptonformel soll laut Aufgabenstellung verwendet werden:

$$\lambda' - \lambda = \frac{hc}{m_0c^2}(1-\cos\theta)$$

mit $\lambda = \frac{hc}{E_{ph}}$

$$\Longrightarrow\ E_{kin} = E_{ph} - E'_{ph} = \frac{h^2}{m_0}\frac{(1-\cos\theta)}{\lambda\lambda'} = \frac{(1-\cos\theta)E_{ph}E'_{ph}}{m_0c^2}$$

$$\Longrightarrow\ E'_{ph} = \frac{E_{ph}}{\frac{E_{ph}(1-\cos\theta)}{m_0c^2}+1}$$

$$\Longrightarrow\ E_{kin} = \frac{E_{ph}}{1+\frac{m_0c^2}{(1-\cos\theta)E_{ph}}}$$

Impulserhaltung:

$$p_{ph} = p'_{ph}\cos\theta + p_{el}\cos\phi$$

Nun kann man anhand der Formel sehen (oder sich gar überlegen), dass die maximale Energie bei den Winkeln $\phi = 0°$ und $\theta = 180°$ übergeben wird.

(b) Die Energie des Photons ist

$$E_{ph} = \frac{hc}{\lambda}$$

Die kinetische Energie bei maximalem Übertrag (also $\cos\theta = -1$) ist wie in der vorherigen Aufgabe berechnet

$$E_{kin} = \frac{E_{ph}}{1 + \frac{m_0 c^2}{2E_{ph}}} = 5.04 \cdot 10^{-24}\ \text{J}$$

(c) Bei vollständigem Energieübertrag ist die restliche Energie des Photons Null. Dann ist aber auch die Wellenlänge des Photons Null. Eingesetzt in die Comptonformel ergibt dies

$$\lambda' - \lambda = -\lambda = \frac{hc}{m_0 c^2}(1 - \cos\theta)$$

Damit diese Gleichung erfüllt ist, muss $(1 - \cos\theta$ negativ werden, dies führt zu einem Widerspruch.
Für eine Auslösung aus Metall ist eine Energie von mindestens 1 eV nötig. Diese ist nach Aufgabe b) nicht vorhanden und somit kann das Photon keine Elektronen aus Metall auslösen.

(d) Für die Energie des gestreuten Photons gilt

$$E'_{ph} = E_{ph} - E_{kin}$$

Für die Wellenlänge des gestreuten Photons gilt

$$\lambda' = \frac{hc}{E'_{ph}} = \frac{hc}{E_{ph} - E_{kin}} = 3.11 \cdot 10^{-12}\ \text{m}$$

Wenn man die Comptonformel nach θ umformt, erhält man

$$\theta = \arccos\left(1 - \frac{\lambda' m_0 c^2}{h} + \frac{\lambda m_0 c}{h}\right) = \arccos\left(1 - \frac{\lambda' m_0 c^2}{h} + \frac{hc^2 m_0}{E_{ph} h}\right) = 0.731 = 42^\circ$$

12. Aufgabe: Milikan

(a) Reibungskraft, Auftriebskraft, Elektrische Kraft, Gewichtskraft.

(b) Wenn das Tröpfchen sinkt: Reibungskraft und Antriebskraft nach oben, Gewichtskraft und elektrische Kraft nach unten, also

$$F_R + F_A = F_G + F_E$$

Wenn das Teilchen steigt analog:

$$F_E + F_A = F_G + F_R$$

mit

$$F_G = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{\text{Oel}} g \qquad F_A = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{\text{Luft}} g \qquad F_E = q\frac{U}{d} \qquad F_R = 6\pi r v \frac{\eta_{\text{Luft}}}{1 + 0.83\frac{\lambda_{\text{Luft}}}{r}}$$

Definiere nun

$$\rho = \rho_{\text{Öl}} - \rho_{\text{Luft}}$$

4. Übung

Physik IV – Atome und Moleküle; Sommer 2012

Prof. Wim de Boer & Dr. Frank Hartmann, KIT

Aufgabenblatt 4; Übung am 14.Mai (Montag)

1. Heisenberg'sche Unschärferelation
   Die mittlere Bindungsenergie eines Nukleon im Atomkern beträgt ca. 8MeV. Die empirisch ermittelte Abhängigkeit des Kernradius von der Massenzahl A ist: $r_K = 1.3{\times}10^{-15}A^{1/3}[m]$. Zeigen sie anhand der Unschärferelation, dass ein Elektron nicht (strenggenommen nur mit sehr kleiner Wahrscheinlichkeit) im Atomkern existieren kann. (Neben anderen Gründen hat dies zur Abkehr vom Elektron-Proton Kernmodell geführt.) Tip: Diskutieren sie über die benötigte Energie des Elektron in Abängigkeit von A!

2. Materiewellen
   Die Moleküle eines Gases haben bei T=320K eine mittlere quadratische Geschwindigkeit von $< v^2 >= (499m/s)^2$. Wie groß ist die De Broglie Wellenlänge dieser Moleküle? Um welches Gas handelt es sich?
   Hinweis für die mittlere kinetische Energie von Gasmolekülen gilt:
   $< E >= 3/2kT, k = 1.38 \times 10^{-23}J/K$.

3. Welle-Teilchen-Dualismus

   (a) Ein Körper der Masse 4g bewege sich mit der Geschwindigkeit 100m/s. Wie klein müsste die Öffnung einer Blende sein, damit ein solcher Körper an dieser einen Beugungseffekt zeigt? Zeigen sie, dass kein normaler Körper dieser Masse durch eine solche Öffnung passt!

   (b) Ein Neutron besitze die kinetische Energie 100MeV. Welche Größe hat ein Objekt, an dem man die Beugung dieses Neutrons beobachten kann, wenn man es als Target verwendet. Gibt es ein solches Objekt?

   (c) Wie groß ist die De Broglie Wellenlänge eines Elektrons, das aus dem Ruhezustand eine Spannung von 200V durchläuft? Welche gebräuchlichen Targets kann man verwenden, um die Welleneigenschaften dieses Elektrons zu demonstrieren?

4. $\phi = Nxe^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$ sei die Wellenfunktion eines Teilchens

   (a) Normieren sie diese Wellenfunktion mit Hilfe von
   $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a^{3/2}}$ für $a > 0$

   (b) Welcher Ort des Teilchens ist der wahrscheinlichste, und wo liegt der Mittelwert des Teilchenorts?

Matrix(1/2/3/4a/4b)

Übungsleiter: Frank Hartmann,
Tel.: +41 (76) 487 4362; Email: Frank.Hartmann@kit.edu

www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/∼hartmann/atom12.htm

13. Aufgabe: Heisenbergsche Unschärferelation

Durch die Unschärferelation wissen wir $\Delta x \Delta p \geq \hbar$. Hier ist

$$\Delta x = 2r_k$$

Für die Energie gilt

$$\Delta E = c\Delta p \geq \frac{\hbar c}{2r_k} = \frac{72}{\sqrt[3]{A}} \text{ MeV}$$

14. Aufgabe: Materiewellen

Die kinetische Energie wird beschrieben durch

$$\langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{3}{2}kT = \frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle$$

$$\Longrightarrow \langle v^2 \rangle = \frac{3kT}{m}$$

Umgeformt erhalten wir die Masse

$$m = \frac{3kT}{\langle v^2 \rangle} = 5.32 \cdot 10^{-26} \text{ kg} = 32.04 \text{ u}$$

Die Massezahl passt zu einem Schwefelatom. Allerdings ist Schwefel bei 320 K nicht gasförmig, also muss es ein O_2-Molekül sein.
Die De-Broglie-Wellenlänge ist

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \sqrt{\frac{h^2}{m^2\langle v^2 \rangle}} = \frac{h}{\sqrt{3kTm}} = 2.495 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

15. Aufgabe: Welle-Teilchen-Dualismus

(a) Die De-Broglie-Wellenlänge ist

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = 1.66 \cdot 10^{-33} \text{ m}$$

Damit Beugseffekte auftreten, müssen der Körper und die Wellenlänge ähnliche Größenordnungen aufweisen. Erfahrungsgemäß wissen wir, dass die meisten Körper mit einer Masse von 4 g wesentlich größer als die errechnete Wellenlänge sind.

(b) Relativistisch:

$$E_{\text{kin}} = (\gamma - 1)mc^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\lambda = \frac{h}{mv} = 3.09 \cdot 10^{-15}\ \text{m}$$

Kann man an einem Gitter beugen.

(c) Das Elektron erhält beim Durchlaufen der Spannung eine kinetische Energie von 200 eV.

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2E_{\text{kin}}m}} = 8.678 \cdot 10^{-11}\ \text{m}$$

Man kann zur Beugung ein Gitter in dieser Größenordnung verwenden.

16. Aufgabe: Wellenfunktion

(a) Integral auf dem Übungsblatt ist falsch:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp(-ax^2)\ \mathrm{dx} = \frac{\sqrt{\pi}}{2a^{\frac{3}{2}}}$$

Normierung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi|^2 \mathrm{dx} = 1$$

$$N^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \mathrm{dx} = \frac{\sqrt{\pi}\mathrm{N}^2}{2\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = 1$$

$$\Longrightarrow\ N = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sigma^3\sqrt{\pi}}}$$

(b) Die Wahrscheinlichkeitsdichte ist

$$|\Phi|^2 = N^2 x^2 e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} = \frac{2}{\sigma^3\sqrt{\pi}} x^2 e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}$$

Um das Maximum zu finden, leiten wir die Wahrscheinlichkeitsdichte ab und setzen sie gleich Null.

$$\frac{\mathrm{d}|\Phi|^2}{\mathrm{dx}} = \frac{2}{\sigma^3\sqrt{\pi}} \left(2xe^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} - x^2 e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} 2x \frac{1}{\sigma^2} \right) = 0$$

Daraus ergeben sich die Lösungen

$$x_1 = 0 \quad x_{2/3} = \pm\sigma$$

Die Lösung für x_1 ist allerdings ein Minimum.

Der Mittelwert des Teilchenorts ist

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x|\Phi|^2 \mathrm{dx} = \frac{2}{\sqrt{\pi}\sigma^3} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{x}^3 \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{x}^2}{\sigma^2}} \mathrm{dx} = 0$$

5. Übung

Physik IV – Atome und Moleküle; Sommer 2012

Prof. Wim de Boer & Dr. Frank Hartmann, KIT

Aufgabenblatt 5; Übung am 21. Mai (Montag)

1. Das „Bohr'sche"Atommodell
   Nennen sie die Bohr'schen Postulate und ihre Konsequenzen! Wie lautet die Sommerfeld'sche Erweiterung? Was sind Rhydbergatome?

   (a) Leiten Sie die Formel für den Bohrschen Radius aus dem Borhschen Atommodell her.

   (b) Stimmt dieser Radius mit der Heisenbergschen Unsicherheitsrelation überein?

2. Spektroskopische Vorbemerkungen:

   (a) Warum werden Wellenlängenangaben λ generell auf das Vakuum bezogen?

   (b) Warum ist die Frequenzangabe eindeutiger als die Wellenlängenangabe?

   (c) Wie ist die Wellenzahl definiert? Ist sie mediumunabhängig? Ist sie proportional zur Energie?

3. Termschema, Lichtemission, Stösse bei einem hypothetischem Einelektronenatom (nicht Wasserstoff)

n	1	2	3	4	5	∞
$E_n(eV)$	-15,6	-5,3	-3,1	-1,4	-0,8	0

   Bei c) und d) befindet sich das Atom im Grundzustand!

   (a) Wie groß ist die Ionisierungsenergie des Atoms?

   (b) Welche Wellenlänge hat ein Photon, das beim Übergang von $n = 3$ nach $n = 1$ emittiert wird?

   (c) Welche kinetische Energie E_{kin} hat ein freies Elektron mit der Anfangsenergie von 6 eV nach einem Stoß mit diesem Atom?

   (d) Wie groß sind die möglichen Werte von E_{kin} bei einer Anfangsenergie von 12 eV des freien Elektrons?

4. Isolierte Atome können nur ganz scharfe Spektrallinien absorbieren! Warum wird aber ein Photon mit etwas höhrerer Energie nicht auch absorbiert, wobei das Atom den Energieüberschuss als kinetische Energie aufnimmt?

5. Absorptions-Balmerlinien sind ziemlich schwer zu erzeugen. Warum? Unter welchen Bedingungen gelingt das doch?

6. Stationäre Schrödingergleichung:
   Leiten Sie aus der zeitabhängigen eindimensionalen Schrödingergleichung die stationäre eindimensionale Schrödingergleichung her.

7. Potentialtopf
   Ein unendlich tiefes Kastenpotential V(x) zwischen 0 und a ist gegeben durch

$$V(x) = \begin{cases} 0 \text{ für } 0 < x < a \\ \infty \text{ sonst} \end{cases} \quad (1)$$

   (a) Lösen Sie die stationäre Schrödingergleichung! Beachten Sie die Randbedingungen. Normieren Sie die Ergebnissfunktionen $u_n(x)$, so dass gilt $\int_{-\infty}^{-\infty} |u_n(x)|^2 dx = 1$

   (b) Berechnen Sie die Erwartungswerte von x für alle n.

   (c) Ein Elektron sei in einem Gebiet [0; 10^{-10} m] (typischer Atomdurchmesser) eingeschlossen. Wie viel Energie muss aufgewendet werden, damit ein Elektron vom Grundzustand in den ersten angeregten Zustand N übergeht? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit im Grundzustand, das Elektron in dem Gebiet [0,49 · 10^{-10} m; 0,51 · 10^{-10} m] zu finden? (Hilfe: Verwenden Sie die Näherung $\Psi(x) \approx (x = 0{,}5 \cdot 10^{-10}\,\text{m})$ Für $x \in$ [0,49 · 10^{-10} m; 0,51 · 10^{-10} m].)

8. Achtung Zusatzaufgabe: Die Lösung wird nicht zwingend im Tutorium behandelt, dafür als Musterlösung gereicht.
   Man normiere das Wellenpaket

$$\psi(x,t) = N \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{k^2}{2(\Delta k)^2}} e^{i(kx-\omega(k)t)} dk$$

   für t=0. Berechnen sie $\psi(x,t)$ für ein freies Teilchen der Masse m für $t > 0$. (Als Zwischenergebnis gilt: $\Psi(x, t = 0) = N\sqrt{2\pi}\Delta k e^{-x^2/2\Delta k^2}$. Bleibt die Normierung für $t > 0$ erhalten? Untersuchen Sie an Hand der Aufenthaltswahrscheinlichkeit, ob das Wellenpaket auseinanderfließt. Welche Bedeutung hat $e^{-k^2/2(\Delta k)^2}$?
   Hinweis: Verwenden Sie die Relation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\xi^2 - b\xi} d\xi = e^{b^2/(4a)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(\xi + b/(2a))^2} d\xi$$

   (quadratische Ergänzung!).

Matrix: 1/2/3/4/5/6/7a/7b/7c

Übungsleiter: Frank Hartmann,
Tel.: +41 (76) 487 4362; Email: Frank.Hartmann@kit.edu

www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/∼hartmann/atom12.htm

17. Aufgabe: Das Bohrsche Atommodell

Postulate:

- Gelten der klassischen Gesetze
- Kreisbahnen mit strahlungsloser Bewegung und fester Energie.
- Übergang nur durch Absorption oder Emission mit Energiedifferenz

$$\Delta E = h\nu$$

- Übergang von diskreten Niveaus zu kontinuierlichen Energien.
- Nur stationäre Zustände; keine Entwicklungen

Sommerfeld: Kreisbahn → Ellipsen.
Rhydbergatome: Atome mit sehr hohen Anregungszuständen, gefunden im Weltall mit $n = 350$. Die leben lange.

(a) Wir benutzen

$$F_{Lor} = F_{zentr} \qquad L = n\hbar$$

Dies liefert uns

$$m\frac{v_n^2}{r_n} = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n^2} \qquad mv_n r_n = n\hbar$$

Dies liefert uns

$$r_n = \frac{h^2\varepsilon_0}{\pi m_e Ze^2}n^2$$

Mit $Z = 1$ liefert uns es für $n = 1$ den Bohrschen Atomradius mit

$$r_1 \approx 53\,\mathrm{pm}$$

(b) Im Internet steht, dass der relevante Erwartungswert (also quantenphysikalisch) das 1,5-fache ist.

$$\begin{aligned}
\Delta x &= 2r_n \\
\Delta p &= m_0 v = \sqrt{\frac{Zm_0}{4\pi\varepsilon_0 r_n}}e \\
\Delta x \cdot \Delta p &= 2n\hbar \geq \hbar \\
n &\geq \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Und nun : Was der Übungsleiter eigentlich meinte :

$$
\begin{aligned}
\Delta r &\leq a \\
\Delta p &> \frac{\hbar}{a} \\
E_{\text{Kin}} = \frac{p^2}{2m} &\geq \frac{(\Delta p)^2}{2m} > \frac{\hbar^2}{2ma^2} \\
E_{\text{Ges}} &= E_{\text{Kin}} + E_{\text{Pot}} \\
&> \frac{\hbar^2}{2ma^2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a} \\
\frac{\mathrm{d}E_{\text{Ges}}}{\mathrm{d}a} &= -\frac{\hbar}{ma^3} + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \stackrel{!}{=} 0 \\
\Longrightarrow\ a &= \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{e^2 m}
\end{aligned}
$$

18. Aufgabe: Spektroskopische Vorbemerkung

(a) Weil sie sich im Medium verändern (primär auch dispersiv, also wellenlängenabhängig)

(b) Verändert sich nicht im Medium

(c) 1 durch Wellenlänge im Vakuum. Damit auch nicht mediumabhängig.

$$E = hc\overline{v}$$

19. Aufgabe: Termschema, Lichtemission

(a) Sie beträgt gerade

$$E_I = E_\infty - E_1 = 15.6 \text{ eV}$$

(b) Es ist

$$\Delta E = E_3 - E_1 = -3.1 \text{ eV} + 15.6 \text{ eV} = 12.5 \text{ eV}$$

und damit

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{ch}{\Delta E} = 9.918 \cdot 10^{-8}\,\text{m}$$

(c) Mit 6 eV kann das Atom nicht angeregt werden, da es mindestens einen Sprung von 10.3 eV machen muss um von 1 auf 2 zu kommen

(d) 1. Möglichkeit: inelastischer Stoß (also danach fast immer noch 12 eV) oder Stoß mit Atom und danach noch 12 - 10.3 = 1.7 eV kinetische Energie.

20. Aufgabe: Isolierte Atome

Nun, eigentlich geht das sogar. Nur wäre die Verschiebung einfach viel zu klein (die Ruhemasse des Atoms ist viel zu groß). Es kann aber die Frequenz des Photons geändert werden.

21. Aufgabe: Absorptions-Balmerlinien

Wir betrachten hier einen Übergang von der zweiten Schale in eine höhere. Damit ein Elektron herausgelöst werden kann, müssen genügend andere Elektronen angeregt sein, so dass bei einem Photoneneinfall das Elektron herausgelöst wird. Die thermische Energie reicht dazu selbst bei sehr hohen Temperaturen nicht aus (oder es sind dann einfach viel zu wenige Elektronen in der oberen Schicht). Man kann jedoch Sterne im Weltall beobachten oder einen Atomstrahl mit Laserlicht bearbeiten.

22. Aufgabe: Stationäre Schrödingergleichung

Die Schrödingergleichung ist gegeben durch

$$\left(V(x) - \frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\right)\psi(x,t) = i\hbar\partial_t\psi(x,t)$$

Wähle nun Produktansatz

$$\psi(x,t) = \varphi(x)\cdot\chi(t)$$

Dann folgt

$$V(x)\varphi(x)\chi(t) - \frac{\hbar^2}{2m}\chi(t)\partial_x^2\varphi(x) = i\hbar\varphi(x)\partial_t\chi(t)$$

Teilen wir durch ψ und erhalten

$$V(x) - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial_x^2\varphi(x)}{\varphi(x)} = i\hbar\frac{\partial_t\chi(t)}{\chi(t)}$$

Beide Seiten sind funktionen unabhängiger Variablen, also müssen sie konstant sein. Wähle als Konstante E . Dann folgt

$$\frac{\partial_t\chi(t)}{\chi(t)} = -i\frac{E}{\hbar} \implies \chi(t) = \exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right)$$

Für die andere Seite folgt

$$V(x) - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial_x^2\varphi(x)}{\varphi(x)} = E$$
$$\left(V(x) - \frac{\hbar^2}{2m}\right)\varphi(x) = E\varphi(x)$$

23. Aufgabe: Potentialtopf

(a) Im Bereich $x \in (-\infty, 0) \cup (a, \infty)$ muss die Aufenthaltswahrscheinlichkeit verschwinden, für den Bereich $x \in (0, a)$ wähle Exponentialansatz

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\varphi = E\varphi$$
$$\varphi(x) = \exp(i\lambda x)$$
$$\left(\frac{\hbar^2}{2m}\lambda^2 - E\right)\varphi = 0$$
$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

Die Lösung ist also

$$\varphi(x) = A\exp(i\lambda x) + B\exp(-i\lambda x) \qquad \lambda = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

Die Anschlussbedingungen an die Stetigkeit liefert

$$\varphi(0) = 0$$
$$\varphi(a) = 0$$

Dies gibt uns

$$A + B = 0$$
$$A\exp(i\lambda a) + B\exp(-i\lambda a) = 0$$

Dies gibt uns $A = -B$ aus der ersten Gleichung und somit liefert uns die zweite

Gleichung

$$A\left(\exp(i\lambda a) - \exp(i\lambda a)\right) = 0$$

Dies lässt sich umformen zu

$$A\sin(\lambda a) = 0$$

falls nun also $A \neq 0$ und somit $B \neq 0$ folgt

$$\lambda a = n\pi, n \in \mathbb{N} \implies E_n = (k\pi)^2 \frac{\hbar^2}{2m}$$

Benutzen wir nun noch die Normierungsbedingung so folgt

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2 \,\mathrm{dx} &= \int_0^a |\varphi(x)|^2 \,\mathrm{dx} \left[\frac{2\,\sin(\lambda\,x)\cos(\lambda\,x)\,A\,B + \lambda\,xA^2 + \lambda\,xB^2}{\lambda}\right]_0^a \\
&= \frac{2\,\sin(\lambda\,a)\cos(\lambda\,a)\,A\,B + \lambda\,aA^2 + \lambda\,aA^2}{\lambda} \\
&= \frac{2\lambda a A^2}{\lambda} \\
&= 2aA^2 \\
&\overset{!}{=} 1 \\
&\implies A = \frac{1}{\sqrt{2a}}
\end{aligned}$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\langle x\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x|\varphi(x)|^2 \,\mathrm{dx} \\
&= \frac{1}{2a}\int_{0}^{a} x|\exp(i\lambda x) - \exp(-i\lambda x)|^2 \,\mathrm{dx} \\
&= \frac{1}{2a}\int_{0}^{a} x|2i\sin(\lambda x)|^2 \,\mathrm{dx} \\
&= \frac{1}{2a}\int_{0}^{a} 4\sin^2(\lambda x)x \,\mathrm{dx} \\
&= \frac{2}{a}\int_{0}^{a} x\sin^2(\lambda x) \,\mathrm{dx} \\
&= \frac{2}{a}\left[\frac{\lambda\, x\left(-\frac{1}{2}\cos(\lambda\, x)\sin(\lambda\, x) + \frac{1}{2}\lambda\, x\right) - \frac{1}{4}\left(\cos(\lambda\, x)\right)^2 - \frac{1}{4}\lambda^2 x^2}{\lambda^2}\right]_0^a \\
&= \frac{-1}{2a}\,\frac{-1 + 2\,\lambda\, a\cos(\lambda\, a)\sin(\lambda\, a) - \lambda^2 a^2 + \left(\cos(\lambda\, a)\right)^2}{\lambda^2}
\end{aligned}
$$

Da $\sin(\lambda a) = 0$ folgt $\cos(\lambda a) = \pm 1$. Also

$$
\begin{aligned}
\langle x\rangle &= -\frac{1}{2a}\frac{-\lambda^2 a^2}{\lambda^2} \\
&= \frac{a}{2}
\end{aligned}
$$

Und welch Wunder: Der Erwartungswert ist in der Mitte.

(c) Gegeben ist die Energie durch

$$E_n = (n\pi)^2\frac{\hbar^2}{2ma^2}$$

Also folgt für die Differenz von der ersten und zweiten Schale mit $a = 1\cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \frac{3}{2}\frac{\pi^2\hbar^2}{ma^2} \approx 112.81\,\mathrm{eV}$$

Für die Wahrscheinlichkeit gilt

$$\begin{aligned} P &= \int_{0.49\cdot10^{-10}\,\mathrm{m}}^{0.51\cdot10^{-10}\,\mathrm{m}} |\psi|^2 \,\mathrm{dx} \\ &= \int_{0.49\cdot10^{-10}\,\mathrm{m}}^{0.51\cdot10^{-10}\,\mathrm{m}} |A2i\sin(\lambda_1 x)|^2 \,\mathrm{dx} \\ &= \frac{2}{a} \int_{0.49\cdot10^{-10}\,\mathrm{m}}^{0.51\cdot10^{-10}\,\mathrm{m}} \sin^2(\lambda_1 x) \,\mathrm{dx} \end{aligned}$$

Mit $\sin(\lambda_1 x) \approx \sin(\lambda\frac{a}{2}) = 1$ folgt

$$P = \frac{2}{a}\,(0.51 - 0.49)\cdot 10^{-10}\,\mathrm{m} = 2 \cdot 0.02 = 0.04$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt also ca 4%.

24. Aufgabe: Zusatzaufgabe

Für $t = 0$ erhalten wir (wie tausendmal in Theo gerechnet)

$$|\psi| = N^2\sqrt{\pi}\Delta k$$

Also

$$N = \frac{1}{\sqrt{\Delta k\sqrt{\pi}}}$$

fertig machen

6. Übung

Physik IV – Atome und Moleküle; Sommer 2012

Prof. Wim de Boer & Dr. Frank Hartmann, KIT

Aufgabenblatt 6; Übung am 04.Juni (Montag)

1. Erlären Sie 'frei' das Korrespondenzprinzip! Was ist das Ehrenfests Theorem?

2. Unter Positronium versteht man ein gebundenes Elektron-Positron-Paar. Das Positron ist das Antiteilchen zum Elektron. Mit der Vorstellung, dass e^- und e^+ -analog wie beim H-Atom, um den gemeinsamen Schwerpunkt kreisen, berechne man die Umlauffrequenz $\omega/(2\pi)$, den Radius r und die Bindungsenergie des Systems im Grundzustand.

3. Ein Myon-Atom besteht aus einem Atomkern mit Kernladungszahl Z und einem eingefangenen Myon, das sich im Grundzustand befindet. Das Myon ist ein Teilchen dessen Masse 207mal so gross ist, wie die des Elektrons; seine Ladung ist der Elektronenladung gleich.

   - Wie gross ist die Bindungsenergie eines Myons, das von einem Proton eingefangen worden ist?
   - Wie gross ist der Radius der entsprechenden Bohr'schen Bahn mit n=1?
   - Man gebe die Energie des Photons an, das ausgestrahlt wird, wenn das Myon vom Zustand n=2 in den Grundzustand springt.

4. Die Kennlinie eines Franck-Hertz-Versuchs zeigt die Minima des Anodenstromes bei Beschleunigungsspannungen in Abständen von $\Delta U_B = 2,104$ V.

   (a) Zeichnen Sie die Franck-Hertz-Kurve, erklaeren Sie die Kurve. Wie zeigen sich die ersten Anregeungszustände? Wie manifestieren sich höhere Anregungszustände?

   (b) In welcher Farbe leuchtet das Füllgas bei einer Beschleunigungsspannung von $U_B = 4$ bzw. 5 V?

   (c) Um welches Gas könnte es sich handeln?

   (d) Wie groß muss die Geschwindigkeit eines Elektrons mindestens sein, damit ein Füllgasatom durch einen Stoß zum Leuchten angeregt werden kann?

5. Um ein He-Atom vollständig zu ionisieren wird eine Energie von 79eV benötigt. Berechnen Sie die Energie, die jeweils zum Ablösen des ersten und des zweiten Elektrons erforderlich ist.

6. Bestimmen Sie die Rückstoßenergie T_R, die ein H-Atom beim Übergang von n=2 nach n=1 durch die Emission des Photons erhällt. Ist die nachfolgende Resonanzabsorption des Photons durch ein anderes H-Atom möglich, selbst in Anbetracht des weiteren Energieverlustes T_R infolge des Absorptionsprozess? Die Lebensdauer des Zustandes beträgt $\Delta t = 2 \times 10^{-9} s$.

Matrix:1/2/3/4/5/6

Übungsleiter: Frank Hartmann,
Tel.: +41 (76) 487 4362; Email: Frank.Hartmann@kit.edu

www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/∼hartmann/atom12.htm

25. Aufgabe: Korrespondenzprinzip

Unter dem Korrespondenzprinzip versteht man, dass eine neue naturwissenschaftliche Theorie zu denselben Ergebnissen kommt, wie die ältere naturwissenschaftliche Theorie, dabei aber einen größeren Gültigkeitsbereich umfasst.
Das Ehrenfest-Theorem besagt, dass unter bestimmten Bedingungen die klassischen Bewegungsgleichungen für die Mittelwerte der Quantenmechanik gelten. Nach dem Korrespondenzprinzip ist also die klassische Mechanik in der Quantenmechanik enthalten. Die zugehörige Formel lautet

Ne, die gehört nicht dazu... Aus ihr folgts nur

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle O\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle [H,O]\rangle + \langle \frac{\partial O}{\partial t}\rangle$$

wobei O ein quantenmechanischer Operator ist.

26. Aufgabe: Positronium

Wir verwenden die effektive Masse

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_e}{2}$$

Außerdem setzen wir Coulombkraft und Zentripetalkraft gleich

$$\frac{\mu v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Daraus erhalten wir mit $v = r\omega$

$$\mu r\omega^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Der Drehimpuls ist quantisiert, also

$$\mu v r = \mu r^2 \omega = n\hbar$$

$$\Longrightarrow\ r = \sqrt{\frac{n\hbar}{\mu\omega}}$$

Dies eingesetzt und im Grundzustand (n=1) ergibt

$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{e^4\mu}{32\pi^3\varepsilon_0^2 n^3\hbar^3} = 3.29\cdot 10^{15}\,\mathrm{Hz}$$

$$\Longrightarrow\ r = \frac{n^2\hbar^2 8\pi\varepsilon_0}{e^2 m_e} = 1.06\cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$$

Die Bindungsenergie ist

$$E = \frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{m_e e^4}{64\varepsilon_0^2 \pi^2 n^2 \hbar^2} = -6.80\,\mathrm{eV}$$

27. Aufgabe: Myon

- Die Bindungsenergie wird wie in der vorhergehenden Aufgabe berechnet mit $\mu = \frac{207 m_e m_p}{207 m_e + m_p}$

$$E = -\frac{e^4 Z^2 \mu}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 n^2 \hbar^2} = -2.53 \frac{Z^2}{n^2}\,\mathrm{keV}$$

- Der Radius ist

$$r = \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2 n^2}{Z\mu e^2} = 2.84 \frac{1}{Z} \cdot 10^{-13}\,\mathrm{m}$$

- Die Energie des Photons entspricht dem Energieunterschied zwischen den zwei Zuständen. Also

$$E_2 - E_1 = 1898 Z^2\,\mathrm{eV}$$

28. Aufgabe: Franck-Hertz-Versuch

(a) Es bilden sich ansteigende Maxima und Minima, wobei die Minima immer annähernd den gleichen Abstand ΔU_B haben.

(b) Mit $\lambda = \frac{c}{\nu}$ und $e\Delta U_B = h\nu$ ergibt sich

$$\lambda = \frac{hc}{e\Delta U_B} = 589\,\mathrm{nm}$$

unabhängig von der Beschleunigungsspannung. Das ist die Wellelänge von orangenem oder gelbem Licht.

(c) Natriumdampflampen leuchten gelb.

(d) Damit ein Elektron das Füllgasatom zum Leuchten anregen kann, muss es genug Energie besitzen, um 2.104 eV abgeben zu können. Also

$$e\Delta U_B = \frac{1}{2} m v^2 \implies v = \sqrt{\frac{2e\Delta U_B}{m}} = 8.6 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

29. Aufgabe: Ionisiertes Helium-Atom

Die Energie in der $n-$ten Schale ist gegeben durch

$$E_n = -Ry^* \frac{Z^2}{n^2} = E_I \frac{Z^2}{n^2}$$

(wenn E_I die Ionisierungsenergie von Wasserstoff ist) und da der Nullpunkt immer die Ionisation ist, müssen wir für $n = 1$ einsetzen:

$$E = Z^2 E_I = 54.4 \text{ eV}$$

Dies war die Rechnung für das zweite Elektron. Für das erste ergibt sich dann offensichtlich

$$E = 79 \text{ eV} - 54.4 \text{ eV} = 24.6 \text{ eV}$$

30. Aufgabe: Rückstoßenergie

Die Rückstoßenergie ist

$$E_R = \frac{p^2}{2M}$$

mit M der Masse des Atomes. Dann

$$\Delta E = h\nu + E_R = h\nu + \frac{\left(\frac{h\nu}{c}\right)^2}{2M} \implies \nu = \sqrt{\frac{M^2c^4}{h^2} - \frac{2M^2c\Delta E}{h^2}} - \frac{Mc^2}{h} \approx \frac{\Delta E}{h}$$

Damit

$$E_R = \frac{\Delta E^2}{2Mc^2} = 5.53 \cdot 10^{-8} \,\text{eV}$$

$$\Delta E = \frac{\hbar}{\Delta t} = 3.29 \cdot 10^{-7} \,\text{eV}$$

7. Übung

Physik IV – Atome und Moleküle; Sommer 2012

Prof. Wim de Boer & Dr. Frank Hartmann, KIT

Aufgabenblatt 7; Übung am 11.Juni (Montag)

1. Drehimpulsoperatoren
   (a) Zeigen Sie $[\hat{L}_z, \hat{L}^2] = 0$ mit $\sum_{ij} \epsilon_{ijk} L_i L_j = i\hbar L_k$
   (b) Eigenwert des $\hat{l}^2$ Operators, des Gesamtimpuls.
   Warum ist der Eigenwert von $\hat{l}^2 = l(l+1)\hbar^2$ und nicht $\hat{l}^2 = l^2\hbar^2$
   Annahme: $\hat{l}^2 = \omega^2\hbar^2 F(\theta, \phi)$, zu beweisen $\omega^2 = l(l+1)$ und l gerade.
   ($L_\pm = L_x \pm iL_y$; $\hat{l}_+ F - l, m_{max} = ?$)

2. Es sei l=3! Bestimmen Sie den Betrag des Drehimpulses und die möglichen Werte von m. Zeichnen Sie ein Vektordiagramm mit den möglichen Orientierungen von L bezüglich der z-Achse.

3. Welche Werte kann l für n=3 annehmen? Geben Sie für jedes l die möglichen Kombinationen von m an. Für jede Kombination von l und m sind wegen des Elektronenspins zwei Zustände möglich. Bestimmen Sie die Anzahl aller Zustände eines Elektrons mit: n=3; n=4.

4. Das Trägheitsmoment Θ einer Vinyl-Schallplatte beträgt $10^{-3} kgm^2$. Berechnen Sie den Drehimpuls $L = \Theta\omega$, wenn Sie mit $\frac{\omega}{2\pi} = 33,3 \frac{U}{min}$ dreht. Wie groß ist ungefähr die Quantenzahl l ?

5. Die Radial-Eigenfunktionen des 1s-Zustandes des Wasserstoffatoms ist kugelsymmtetrisch und hat die Form:
   $\Psi(r) = a \times e^{-\frac{r}{r_1}}$
   r_1 ist der erste Bohrsche Radius und a eine, durch die Normierung festzulegende Konstante.
   (a) Berechnen Sie die Energie dieses Zustandes!
   (b) Bestimmen Sie die Aufenthaltswahrscheinlichkeit W(r) des Elektrons im Abstand r vom Kern!
   (c) In welchem Abstand ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeit am größten?
   (d) Zeichnen Sie die beiden Funktionen $\Psi(r)$ und W(r)!

6. Welche Elemente haben die Elektronenkonfigurationen:
   (a) $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^2$ und (b) $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2$?

7. Magnetisches Moment, Einstein-de-Haas Versuch

   (a) Berechnen Sie das orbitale magnetische Moment eines Wasserstoffatoms im Grundzustand unter der Annahme des Bohr'schen Modells.

   (b) Ein Eisenzylinder, der so aufgehängt ist, dass er reibungsfrei um seine Symmetrieachse rotieren kann, werde mit Hilfe einer Spule bis zur Sättigung magnetisiert. Nach Umpolen des Spulenstroms beobachtet man, dass der Zylinder mit der Masse M_{Fe} und Trägheitsmoment Θ_{Fe} sich mit der Umdrehungsfrequenz ω dreht. Erklären Sie diesen Befund und berechnen Sie ω als Funktion des atomaren Drehimpulses. In welche Richtung dreht sich der Zylinder?

   (c) Bestimmen Sie aus dem magnetischen Moment des Zylinders im Spulenfeld und der gemessenen Frequenz ω das Verhältnis aus magnetischen Moment und Drehimpuls eines Eisenatoms.

   (d) Berechnen Sie ω unter der vereinfachten Annahme, der Drehimpuls eines jeden Eisenatoms sei gleich dem Drehimpuls eines Elektrons im ersten Bohr'schen Orbital. Die Länge des 1g schweren Zylinders betrage 1 cm ($\rho_{Fe} = 7.87g \times cm^{-3}$)

Matrix: 1a/1b/2/3/4/5a/5b+c/6/7a+7b/7c+7d *Übungsleiter: Frank Hartmann, Tel.: +41 (76) 487 4362; Email: Frank.Hartmann@kit.edu*

www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/∼hartmann/atom12.htm

31. Aufgabe: Drehimpulsoperatoren

(a) Es ist

$$[L_z, L^2] = [L_z, L_x^2 + L_y^2 + L_z^2] = L_x[L_z, L_x] + L_y[L_z, L_y] + [L_z, L_x]L_x + [L_z, L_y]L_y$$

und nach der Formel auf dem ÜB

$$= i\hbar(L_xL_y - L_yL_x + L_yL_x - L_xL_y) = 0$$

(b)

$$\begin{aligned} L^2F &= \omega^2\hbar^2F \\ L_zF &= m\hbar F \\ (L_-L_+)F &= (L_x - iL_y)(L_x + iL_y)F \\ &= (L_x^2 + L_y^2 + iL_xL_y - iL_yL_x)F \\ &= (L^2 - L_z^2 - hL_z)F \\ &= (\omega^2\hbar^2 - m^2\hbar^2 - m\hbar^2)F \end{aligned}$$

$L_z \leq L$ liefert

$$\begin{aligned} \omega^2 - m_{max}^2 - m_{max} &= 0 \\ \omega^2 &= m_{max}(m_{max} + 1 \\ \omega^2 &\overset{l=m_{max}}{=} l(l+1) \end{aligned}$$

Die Gleichung folgt aus $F_{l,m_{max}} = F_{l,l}$. Eigentlich L^2 durch L_+ und L_- ausdrücken und $L_+F_{l,l} = 0$.

32. Aufgabe: l ist 3

Damit ist der Betrag des Drehimpulses gegeben durch

$$|L| = \sqrt{l(l+1)}\hbar = 2\sqrt{3}\hbar$$

Mögliche Werte für m sind dann

$$m = -3 \ldots 0 \ldots 3$$

Auf dem Bild ist zu sehen Ein senkrechter Strich als z-Achse. Um den Mittelpunkt ein Kreis mir Radius $|L|$. Ab dem Mittelwpunkt 7 Vektoren bis auf den Kreisrand, jeweils mit z-Achsenabschnitt 3 bis -3.
Wähle θ als Winkel zwischen L_z und L. dann folgt

Bild malen

$$\cos\theta = \frac{L_z}{|L|} = \frac{m}{2\sqrt{3}}$$

33. Aufgabe: Mögliche Kombinationen

l läuft ganzzahlig von 0 bis $n-1$, also

$$l = 0 \ldots 2$$

Für jedes l gibt es die Kombinationen für m mit

$$m = -l \ldots 0 \ldots l$$

Also für $l = 0$ ist $m = 0$, für $l = 1$ ist $m = -1, 0, 1$ und für $l = 2$ ist $m = -2, -1, 0, 1, 2$.
Für jedes l gibt es $(2l + 1)$ verschiedene Kombinationen für m und damit für n

$$\sum_{l=0}^{n-1}(2l + 1) = n^2$$

verschiedene Kombinationen für l und m. Für jede Kombination gibt es 2 Elektronenspins.
Also für $n = 3$ sind es 18 und für $n = 4$ 32 verschiedene Möglichkeiten.

34. Aufgabe: Gequantelte Schalplatte

Der Drehimpuls ist

$$L = \Theta\omega = 10^{-3} \cdot 33.3 \cdot 2\pi 1/60 \text{ kgm}^2/2 = 3.49 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2/2$$

dann ist

$$\sqrt{l(l+1)} \approx 3.31 \cdot 10^{31} \approx l$$

sollte hier überhaupt normiert werden?

35. Aufgabe: 1s-Zustand

(a) Normierung :

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} |\psi|^2 r^2 \sin\theta \; \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = |a|^2 r_1^3 \pi \overset{!}{=} 1 \implies |a| = \sqrt{\frac{r_1^{-3}}{\pi}}$$

Wir verwenden die Schrödingergleichung in Kugelkoordinaten:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}\right)\Psi(r) = E\Psi(r)$$

Im s-Zustand ist $l = 0$, eingesetzt ergibt sich

$$\frac{\hbar^2}{m}\frac{1}{r_1 r} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r_1^2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = E$$

mit dem Bohrschen Radius $r_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{e^2 m}$ ergibt sich

$$E = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r_1^2}$$

(b)

$$W(r) = |\psi|^2 \cdot 4\pi r^2 = a^2 e^{-\frac{2r}{r_1}} 4\pi r^2 = 4\exp\left(-\frac{2r}{r_1}\right)\frac{r^2}{r_1^3}$$

(c)

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_r W(r) \\ &= 8\,a^2\pi\, r \mathrm{e}^{-2\frac{r}{r_1}} - 8\,a^2\pi\, r^2 \mathrm{e}^{-2\frac{r}{r_1}} {r_1}^{-1} \\ \implies r &\in \{0, r_1\} \\ \partial_r^2 W(0) &= 8a^2\pi > 0 \\ \partial_r^2 W(r_1) &= -8\,a^2\pi\, \exp(-2) < 0 \end{aligned}$$

Problem: Sollte die Wahrscheinlichkeit eigentlich denn eigentlich nie über 1 kommen?

Bei $r = 0$ liegt ein Minimum vor und bei $r = r_1$ ein Maximum. Das Maximum bei $r = r_1$ beträgt dann

$$W(r_1) = 4\exp(-2)\frac{1}{r_1}$$

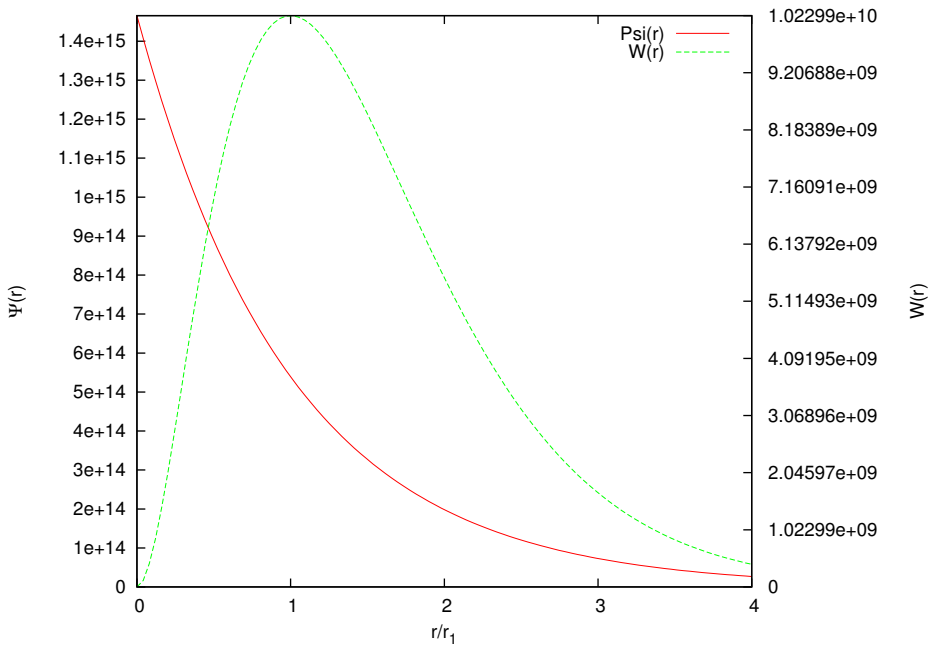


Abbildung 2: Linke y-Skala für ψ, rechte für $W(r)$

(d)

36. Aufgabe: Atome verschiedener Zustände

$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^2$ ist Silizium und $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2$ entspricht Calcium.

37. Aufgabe: Einstein-de-Haas Versuch

(a)

$$\vec{m} = I\vec{A} = -\frac{e\omega}{4\pi}\pi m^2 \vec{e}_z = -\frac{e}{2m}\vec{L}_z$$

$$I = \frac{-e}{T} = \frac{-e\omega}{2\pi} \qquad \vec{A} = \pi r^2 \vec{e}_z$$

(b) $L_{mech} = \partial_{F_l}\omega$

$$2L_{Atom} \cdot N = L_{mech}$$

$$\omega = \frac{2L_{Atom} \cdot N_{Atom}}{\Theta_{F_l}} = \frac{2N_A m_{Fl} L_{Atom}}{\Theta M_{Fl}}$$

wobei M_{Fl} die molare Masse ist.

(c)

$$\gamma = \frac{|\vec{m}|}{L_{Atom}} = \frac{2|\vec{m}|}{\omega\Theta}$$

(d) $L = m\hbar = \hbar$

$$\Theta_{Fl} = \frac{1}{2} M_{Fl} r^2$$

$$\omega = \frac{2 N_A m_{Fl} \hbar}{M_{Fe}^2 m_{Fl}} \rho \pi l = 1.119 \cdot 10^{-6} \, \frac{1}{\mathrm{s}}$$

8. Übung

Physik IV – Atome und Moleküle; Sommer 2012

Prof. Wim de Boer & Dr. Frank Hartmann, KIT

Aufgabenblatt 8; Übung am 18.Juni (Montag)

1. Stern-Gerlach Versuch
   Beim Stern-Gerlach Experiment werden Silberatome in einem Ofen bei der Temperatur T verdampft. Durch einen schmalen Spalt werden sie kollimiert und durchfliegen im Anschluss ein stark inhomogenes Magnetfeld mit konstantem Gradienten $\partial B/\partial z$, das von zwei Polschuhen der Länge a erzeugt wird. Nach dem Austritt aus dem Magnetfeld trifft der Strahl auf einen Beobachtungschirm.

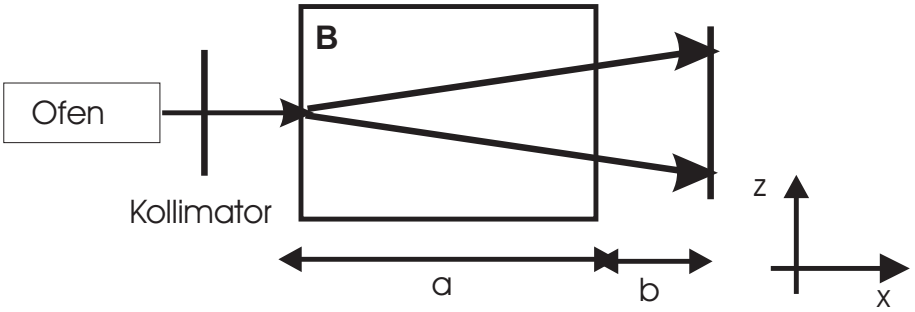


Abbildung 1: *Stern-Gerlach-Versuch*

   (a) Diskutieren Sie den beobachteten Effekt.

   (b) Zeigen Sie, dass für den Abstand d der beiden beobachteten Linien gilt: $d = \frac{ae\hbar}{3m_e kT}\frac{\partial B}{\partial z}(\frac{a}{2} + b)$
   mit der Elektronenmasse m_e.
   Es soll hierbei vereinfachend angenommen werden, dass alle Atome dieselbe kinetische Energie $\frac{3}{2}kT$ haben.

   (c) Würde sich das Messergebniss ändern, wenn andere Silberisotope im Strahl vorhanden wären?

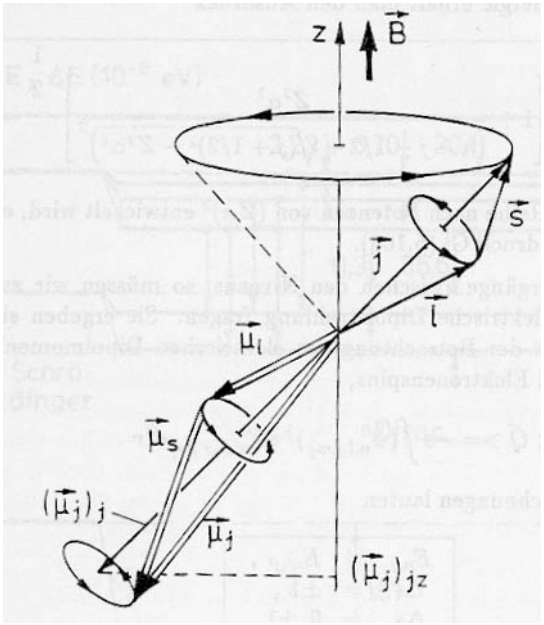
   (d) Die Annahme, alle Atome bewegen sich mit derselben kinetischen Energie, kann in der Realität nicht gemacht werden. Welche Geschwindigkeitsverteilung wäre sinnvollerweise anzusetzen? Wie wirkt sich das auf das Messergebnis aus?

2. Landé g-Faktor, anomaler Zeemann Effekt

   (a) Erklären sie die Bedeutung des g-Faktors!

   (b) Leiten sie den g-Faktor $g_j = 1 + \frac{j(j+1)+s(s+s)-l(l+1)}{2j(j+1)}$ für den anomalen Zeemann Effekt her. Hinweis: als Vektordiagramm kann unten stehende Abbildung oder Abbildung 13.12 im Haken-Wolf zu Rate gezogen werden.

   (c) Berechnen sie den g-Faktor der Zustände $p_{1/2}$ und $s_{1/2}$! Wie groß ist der Energieabstand der jeweiligen Zeemannkomponenten im Magnetfeld $\vec{B}$? Wie groß ist der g-Faktor für reinen Spin- bzw. reinen Bahndrehimplus?



Drehimpulse und magnetische Momente beim anomalen Zeemann Effekt.

3. Spin-Bahn Kopplung
   Die Energieverschiebung eines Elektron aufgrund der Spin-Bahn Kopplung im Wasserstoffatom ist gegeben durch:
   $E_{ls} = \frac{\alpha^4 m_e c^2}{2\hbar^2} \frac{<\vec{sl}>}{n^3 l(l+1/2)(l+1)}$

   (a) Berechnen sie den Erwartunsgwert $<\vec{sl}>$ für die Spin-Bahn Kopplung!

   (b) Berechnen sie E_{ls} in den Einheiten eV und cm^{-1} für alle Zustände des Wasserstoffatoms mit n=1,2,3! Kann man diese Aufspaltung konventionell spektroskopisch beobachten? Gilt ihre Aussage auch für Alkali- bzw. Erdalkaliatome?

   (c) Welche Besonderheit ergibt sich für die s-Zustände? Zeichnen sie ein Termschema für n=1,2,3 unter Berücksichtigung der Spin-Bahn Kopplung! Diskutieren sie die Entartung der Zustände.

4. Feinstruktur beim Wasserstoff
   Für die gesamte Feinstrukturaufspaltung (einschließlich relativistischer Korrekturen) gilt:
   $\Delta E_{n,j} = E_n \frac{\alpha^2}{n}(\frac{1}{j*1/2} - \frac{3}{4n})$ mit $E_n = -\frac{13.6eV}{n^2}$

   (a) Welche relativistischen Korrekturen sind gemeint?

   (b) Berechnen sie die Aufspaltung der Zustände in eV mit n=1,2,3 und diskutieren sie die Unterschiede zu den Ergebnissen der Spin-Bahn Kopplung (siehe letzte Aufgabe)!

5. Positronium
   Warum hat das Positronium kein magnetisches Moment?

Matrix: 1a+1b/1c+1d/2a+2b/2c+3a/3b+3c/4/5 *Übungsleiter: Frank Hartmann, Tel.: +41 (76) 487 4362; Email: Frank.Hartmann@kit.edu*

www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/∼hartmann/atom12.htm

38. Aufgabe: Stern-Gerlach Versuch

(a) Im klassischen Sinne würde man eine kontinuierliche Verteilung erwarten. Zu sehen sind aber zwei diskrete Punkte (im Abstand d). Dies kommt vom internen Spin der Silberatome (welcher nur durch das äußerste 5s-Elektron beeinflusst ist). Dieser Spin hat nur zwei diskrete Werte (unten oder oben).

(b) Im Magnetfeld wirkt eine Kraft in z-Richtung mit

$$F = \mu \frac{\partial B}{\partial z}$$

Dies führt zu einer Parabelbahn mit (in z-Richtung)

$$z = \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2 = \frac{1}{2}\frac{\mu}{m}\frac{\partial B}{\partial z}t^2 \qquad v_z = \frac{\mu}{m}\frac{\partial B}{\partial z}t$$

Die Zeit ergibt sich aus der x-Richtung. Die Geschwindigkeit in x-Richtung ist

$$v_x = \frac{\sqrt{2E_kin}}{\sqrt{m}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

Also im Magnetfeld die Zeit

$$t_1 = \frac{a}{v_x}$$

Nach dem Magnetfeld brauch das Teilchen noch die Zeit

$$t_2 = \frac{b}{v_x}$$

Damit

$$\Delta d = 2(d_1 + d_2) = 2\left(\frac{1}{2}\frac{\mu}{m}\frac{\partial B}{\partial z}\frac{ma^2}{3kT} + \frac{\mu}{m}\frac{\partial B}{\partial z}\frac{a}{v_x^2}b\right)$$

Mit $\mu = \frac{e\hbar}{2m}$ erhält man die Behauptung.

(c) Nein (Unabhängig von Masse)

(d) Sinnvoller wäre eine Maxwell-Bolzmann-Verteilung und damit eine Verwischung des Messergebnisses

39. Aufgabe: Landé g-Faktor, anomaler Zeemann Effekt

(a) Der g-Faktor gibt an, um wie viel stärker sich ein Spin auf die Energie auswirkt als ein gleich großer Bahndrehimpuls.

(b) Im Vektordiagramm erkennt man, dass die Länge der Projektion von μ_j auf die j-Richtung gerade gegeben ist durch

$$|(\mu_j)_j| = |\mu_l| \cos(l,j) + |\mu_s| \cos(s,j)$$

Für die Beträge benutzen wir

$$|\mu_l| = \mu_B \sqrt{l(l+1)} \qquad |\mu_s| = 2\mu_b \sqrt{s(s+1)}$$

und

$$|l| = \hbar\sqrt{l(l+1)} \qquad |s| = \hbar\sqrt{s(s+1)} \qquad |j| = \hbar\sqrt{j(j+1)}$$

Mit dem Cosinussatz lassen sich auch die Winkel bestimmen

$$\cos(l,j) = \frac{|j|^2 + |l|^2 - |s|^2}{2|j||l|} \qquad \cos(s,j) = \frac{|s|^2 + |j|^2 - |l|^2}{2|s||j|}$$

und damit

$$|(\mu_j)_j| = \mu_B \left(\frac{j(j+1) + l(l+1) - s(s+1)}{2\sqrt{(j(j+1)}\sqrt{(l(l+1)}} \sqrt{(l(l+1)} + 2\frac{s(s+1) + j(j+1) - l(l+1)}{2\sqrt{(j(j+1)}\sqrt{(s(s+1)}} \sqrt{(s(s+1)} \right)$$

was sich vereinfacht zu

$$= \sqrt{j(j+1)} \frac{\mu_B}{2j(j+1)} \left(3j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)\right)$$

und damit zur Behauptung führt.

(c) Für $p_{1/2}$ ist $l = 1, j = 1/2, s = 1/2$, also

$$g_i = 2/3 \qquad \Delta E = \frac{2\mu_B}{3}|B|$$

Für $s_{1/2}$ ist $l = 0, j = 1/2, s = 1/2$, also

$$g_i = 2 \qquad \Delta E = 2\mu_B|B|$$

Für reinen Bahn-Magnetismus ist $s = 0$ und $j = l$ und damit $g_i = 1$. Für reinen Spin-Magnetismus ist $l = 0$ und $j = s$ und damit $g_i = 2$.

40. Aufgabe: Spin-Bahn-Kopplung

(a) Wir benutzen

$$|l| = \sqrt{l(l+1)}\hbar \qquad \text{usw.}$$

und

$$\vec{sl} = \frac{1}{2}(\vec{j}^2 - \vec{s}^2 - \vec{l}^2)$$

und kommen auf

$$\langle \vec{sl} \rangle = \frac{1}{2}\left(\langle \vec{j}^2 \rangle - \langle \vec{l}^2 \rangle - \langle \vec{s}^2 \rangle\right) = \frac{\hbar^2}{2}\left(j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)\right)$$

Da j entweder $l+s$ oder $l-s$ mit $s = 1/2$ ist, muss $\langle \vec{sl} \rangle$ entweder $\hbar^2/2l$ oder $\hbar^2/2(-l-1)$ sein.

n	l	j	E_{ls}
1	0	1/2	0
2	0	1/2	0
2	1	3/2	$1.51 \cdot 10^{-5}$
2	1	1/2	$-3.022 \cdot 10^{-5}$
3	0	1/2	0
3	1	3/2	$4.48 \cdot 10^{-6}$
3	1	1/2	$-8.92 \cdot 10^{-6}$
3	2	3/2	$1.79 \cdot 10^{-6}$
3	2	5/2	$-2.69 \cdot 10^{-6}$

Tabelle fertig machen

(b)

41. Aufgabe: Feinstruktur beim Wasserstoff

(a) In Kernnähe sind die Elektronen schwerer, da sie schneller sind (bei Ellipsen)

n	l	j	ΔE
1	0	1/2	$-1.8 \cdot 10^{-4}$
2	0	1/2	$-5.7 \cdot 10^{-5}$
2	1	3/2	$-1.1 \cdot 10^{-5}$
2	1	1/2	$-5.7 \cdot 10^{-5}$
3	0	1/2	$-2.0 \cdot 10^{-5}$
3	1	3/2	$-6.7 \cdot 10^{-5}$
3	1	1/2	$-2.0 \cdot 10^{-5}$
3	2	3/2	$-6.7 \cdot 10^{-6}$
3	2	5/2	$-2.2 \cdot 10^{-6}$

(b) Vergleich

42. Aufgabe: Positronium

Durch die entgegengesetzten Ladungen gibt es keinen Spin und damit kein elektrisches Moment.

9. Übung

Physik IV – Atome und Moleküle; Sommer 2012

Prof. Wim de Boer & Dr. Frank Hartmann, KIT

Aufgabenblatt 9; Übung am 25.Juni (Montag)

1. Normaler Zeemann Effekt

   (a) Erläutern sie den Unterschied zwischen normalem und anomalen Zeemann Effekt!

   (b) In wieviele Terme spaltet ein $l = 3$ Niveau beim normalem Zemann Effekt auf? Wie groß ist der Energieunterschied zwischen den benachbarten Niveaus?

   (c) Wieviele Linien sind beim Übergang $l = 3 \rightarrow l = 2$ beim normalen Zeemann-Effekt messbar? Diskutieren sie die Polarisationen der einzelnen Zeemann Komponenten.

   (d) Wieso kann man den Spin des Photons mit Hilfe des normalen Zeemann Effekts bestimmen?

2. Hyperfeinstruktur

   (a) Wie kommt die Hyperfeinstruktur im Vergleich zur Feinstruktur zustande?

   (b) In wieviele Hyperfeinstrukturkomponenten sind die Grundzustände folgender Atome aufgespalten:
   ${}^3H({}^2s_{1/2}, I = \frac{1}{2})$; ${}^6Li({}^2s_{1/2}, I = 1)$; ${}^{14}N({}^4s_{3/2}, I = 1)$; ${}^{15}N({}^4s_{3/2}, I = \frac{1}{2})$

   (c) Für die magnetische Hyperfeinwechselwirkung bei atomaren Wasserstoff gilt für die s-Zustände:
   $E_{Hyperfein} = \frac{a}{\hbar^2} < \vec{I}\vec{j} >$ mit der Hyperfeinkonstanten
   $a = \frac{2\mu_o}{3\pi a_o^3} \times g_e \times \mu_B \times g_p \times \mu_K \frac{1}{n^3}$
   (Kernspin I=1/2, g-Faktor des Protons g_p=5.585, g-Faktor des Elektrons g_e=2.002, Kernmagneton $\mu_K = 5.051 \times 10^{-27} Am^2$; Bohr'sches Magneton $\mu_B = 9.274 \times 10^{-24} Am^2$, Bohr'scher Radius $a_o = 5.292 \times 10^{-11} m$,
   $\mu_o = 1.257 \times 10^{-6} Vs/(Am)$
   In wieviele Niveaus spaltet der elektronische Grundzustand von atomaren Wasserstoff infolge der Hyperfeinwechselwirkung auf? Welche Werte hat die Gesamtdrehimpulszahl F? Berechnen Sie die Hyperfeinaufspaltung in den Einheiten eV, cm^{-1} und Hz. Verifizieren Sie mit diesem Resultat die Intervallregel: $\Delta E_{F+1} - \Delta E_F = a(F + 1)$!

3. Charakteristische Röntgenstrahlung

   (a) Welche Spannung muss mindestens an eine Röntgenröhre angelegt werden, damit man alle Linien der K-Serie erhält, wenn man das Anodenmaterial Wolfram verwendet? (Moseley)
   Die tatsächlichen Wellenlängen der K–Linien von Wolfram sind 0.210, 0.184 und 0.179$\mathring{A}$ für K_α, K_β und K_γ; die K–Absorptionskante liegt bei 0.178Å.

   (b) Konstruieren Sie das Termschema!

   (c) Welche Energie wird benötigt, um die L–Serie anzuregen, und wie groß ist die Energie der L_α–Linie?

   (d) Wie groß ist die kürzeste charakteristische Wellenlänge von Wolfram?

   (e) Wie groß ist die kinetische Energie des energiereichsten Auger–Elektrons, das statt der L_α–Linie emittiert wird?

4. Skizzieren und beschreiben Sie ein ESR-Spektrometer und erklären Sie die Funktionsweise!

Matrix: 1a+b/1c+1d/2a+2b/2c/3a+3b+3c/3d+3e/4

Übungsleiter: Frank Hartmann,
Tel.: +41 (76) 487 4362; Email: Frank.Hartmann@kit.edu

www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/∼hartmann/atom12.htm

43. Aufgabe: Normaler Zeemann-Effekt

(a) Wie auch bei anormalen Zeemann-Effekt geht es um die Aufspaltung der Spektrallinien (also Energienievaus) in einem externen Magnetfeld. Beim anormalen Z-Effekt führen Spin und Bahndrehimpuls des Elektrons zu verschiedenen Energieniveaus je nach deren Ausrichtung. Bein normalen Z-Effekt wird nur der Bahndrehimpuls berücksichtigt, da der Spin aufgrund der Aufhebung durch zwei Elektronen Null ist.

(b) Zu einem Bahndrehimpuls l gilt $j = l$, da es keinen Spin s gibt. Also gibt es für die z-Richtung des Gesamtdrehimpulses j genau

$$-j \leq m \leq j \implies 2j + 1 \text{ Möglichkeiten}$$

Für $l = 3$ sind dies also 7 aufgespaltete Energieniveaus. Wie wir in Aufgabe 39 auf dem letzten ÜB gesehen haben, ist für $s = 0$ $g_j = 1$ und damit

$$\Delta E = g_j \mu_B |\vec{B}| = \mu_b |\vec{B}|$$

(c) Unter Berücksichtigung der Auswahlregel $\Delta m = -1, 0, 1$ und da die Energieterme immer gleich weit entfernt sind, ergeben sich 3 Linien. Wenn $\Delta m = \pm 1$ ist, so sind die Photonen zirkulär polarisiert. Bei $\Delta m = 0$ linear.

(d) Im System Elektron-Photon gilt weiterhin die Drehimpulserhaltung. Bei einem Übergang mit $\Delta m = \pm 1$ muss also das Photon den Spin 1 besitzen (das Photon hat nämlich natürlich keinen Bahndrehimpuls). Bei einem Übergang mit $\Delta m = 0$ kann man sich das Photon als Überlagerung von zwei entgegengesetzt zirkularisierten Photonen vorstellen.

Zusäzliche Erklärung: Aufgrund der Vertauschungsrelationen von L und H wissen wir, dass wir nur gleichzeitig L^2 und L_z messen können. Das bedeutet bei jeder Messung betrachten wir L^2 und L_z. Dies führt auf das Vektormodell wie in den Aufgaben davor gesehen.

44. Aufgabe: Hyperfeinstruktur

(a) Hyperfeinstruktur wird durch den Kernspin hervorgerufen. Feinstruktur durch den Elektronenspin (und jeweils die Kopplung zwischen Bahndrehimpuls und Spin im erzeugten Magnetfeld).

(b) Die Quantenzahl F kann positiven alle Werte von $j + I$ bis $j - I$ annehmen. Das sind also 2,2,3,2 Möglichkeiten.
Bemerkung zur Schreibweise: Die Zahl ganz vorne gibt die Nukleonenzahl an, die nächste Hochzahl ist $2s + 1$, der Buchstabe gibt l an, wobei für s $l = 0$, p $l = 1$, etc. Der Index des Buchstabens ist j.

(c) Für F ergeben sich die möglichen Werte 1 und 0. Es gibt also zwei Aufspaltungen. Wir benutzen

$$F^2 = j^2 + I^2 + 2jI$$

und erhalten

$$\langle \Delta E \rangle = \frac{a}{2\hbar^2} \langle F^2 - j^2 - I^2 \rangle$$

Dieser erstetzen wir mit den bekannten Erwartungswerten

$$\langle \Delta E \rangle = \frac{a}{2\hbar^2} \langle F(F+1) - j(j+1) - I(I+1) \rangle$$

Damit

$$\Delta E(F = 1) = 1.47 \cdot 10^{-6} \text{ eV} = 0.0118 \text{ cm}^{-1} = 0.36 \text{ GHz}$$

und

$$\Delta E(F = 1) = -4.41 \cdot 10^{-6} \text{ eV} = -0.035 \text{ cm}^{-1} = -1.066 \text{ GHz}$$

45. Aufgabe: Charakteristische Röntgenstrahlung

(a) Um die Linien sichtbar zu machen, muss ein Elektron ganz aus dem Kern entfernt werden (Energie der K-Kante). Wir benutzen das Moseley-Gesetz

$$\nu = \nu_R (Z - K)^2 \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

mit

$$K = 1, Z = 74, \nu_R = 3.29 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}, \text{n} = \infty, \text{m} = 1$$

und damit

$$E = \hbar\nu = 72.52 \text{ keV} \implies \text{U} = 72.52 \text{ kV}$$

(b) Es ist

$$E = \frac{hc}{\lambda}$$

und damit

$$E_K = 69.7 \text{ keV} \qquad \text{E}_\alpha = 59.09 \text{ keV} \qquad \text{E}_\beta = 67.4 \text{ keV} \qquad \text{E}_\gamma = 69.3 \text{ keV}$$

(c) Das ist die Energie der L-Kante, also

$$E_L = E_K - E_\alpha = 10.6 \text{ keV}$$

und

$$E_{L_\alpha} = E_\beta - E_\alpha = 8.3 \text{ keV}$$

(d) Die größtmögliche Energie wird beim Übergang von P zur K Schalte übertragen. Die Energie der P-Schalte ist

$$E_P = 1.5 \text{ eV}$$

wenn wir näherungsweise $K = 72$ benutzen. Damit ist

$$\Delta E_{K \to P} = 69.7 \text{ keV} - 1.5 \text{ eV} = 69.7 \text{ keV}$$

und

$$\lambda = 0.178$$

(e) Es muss sein

$$E_{Kin} = E_{L_\alpha} - E_{Bind} = 8.3 \text{ keV}$$

46. Aufgabe: ESR-Spektrometer

Bei der Elektronenspinresonanz-Spektroskopie macht man sich den Zeemann-Effekt zu nutze. In einem externen Magnetfeld spalten die Energieterme zu einer Hauptquantenzahl n in verschiedene Unterzustände auf. Regt man das Material mit Mikrowellen an, so wird ein charakteristisches Spektrum absorbiert. Dies gibt Rückschlüsse auf den enthaltenen g-Faktor.

10. Übung

Physik IV – Atome und Moleküle; Sommer 2012

Prof. Wim de Boer & Dr. Frank Hartmann, KIT

Aufgabenblatt 10; Übung am 02. Juli (Montag)

1. Erklären Sie NMR inklusive einer SKIZZE des Aufbaus!

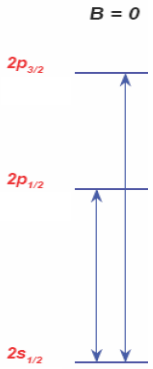
2. Zwei Elektronen bilden einen Gesamtspin S=1 und einen Bahndrehimpuls L=2!

   (a) Welche möglichen Werte hat der Gesamtdrehimpuls?

   (b) Welchen Winkel bilden S und L für J=2?

   (c) Zeichnen Sie die magnetisch induzierten Aufspaltungen in die rechte Skizze ein!
   (Achtung: hier natürlich nicht mehr S=1 und L=2)

   (d) Welches Magnetfeld braucht man, um einen Übergang von $2S_{1/2}; m_j = +1/2$ auf $2S_{1/2}; m_j = -1/2$ mit einer 3 cm Mikrowelle zu induzieren?



3. Spektren komplexer Atome
   Diskutieren und zählen Sie die verschiedenen zum Potential beitragenden Komponenten der Hamilton-Funktion $V(\vec{r}_1\vec{s}_1, \vec{r}_2\vec{s}_2, ..., \vec{r}_N\vec{s}_N)$ für Atome mit N Elektronen auf!

4. Alkaliatome

   (a) Beim Wasserstoffatom ist die l-Entartung aufgrund der Spin-Bahn Kopplung aufgehoben, warum ist sie bei den Alkaliatomen mit $l = 0$ aufgehoben?

   (b) Vergleichen sie das Termschema eines Alkaliatoms für n=2,3 mit dem eines Wasserstoffatoms!
   Beim Natrium wird der Übergang $3p_{1/2} \rightarrow 3s_{1/2}$ bei $\lambda = 5894.92\mathring{A}$ und der Übergang $3p_{3/2} \rightarrow 3s_{1/2}$ bei $\lambda = 5889.92\mathring{A}$ gefunden.

   (c) Skizzieren sie das zugehörige Termschema mit den Zeemann-Aufspaltungen für B=1.3T und zeichnen sie für $3p_{3/2} \rightarrow 3s_{1/2}$ die erlaubten Übergänge mit $\Delta m_j = 0, \pm 1$ ein. Um welchen Zeemann Effekt handelt es sich?

   (d) Berechnen sie die Wellenzahlen der erlaubten Übergänge zwischen den aufgespalteten Niveaus für $3p_{1/2} \rightarrow 3s_{1/2}$!

5. Stark Effekt

   (a) Beschreiben Sie kurz Stark's Experiment!

   (b) Erläutern Sie den Unterschied zwischen dem linearen und dem quadratischen Stark Effekt. Bei welchen Atomen jeweils tritt er auf?

   (c) Wieso ist der Stark Effekt experimentell schwerer zu beobachten, als der Zeemann Effekt?

   (d) Diskutieren Sie Unterschiede zur Aufspaltung von Spektrallinien im Magnetfeld!

Matrix: 1/2a+2b/2c+2d/3/4a+4b/4c+4d/5a+5b

47. Aufgabe: NMR

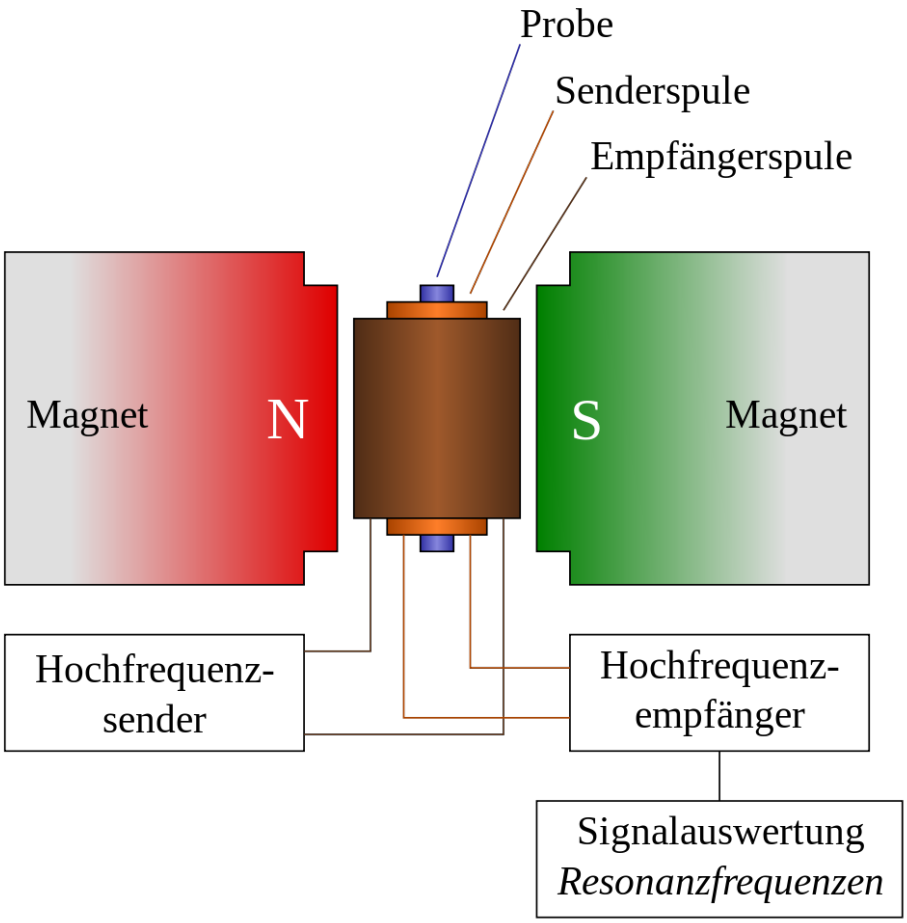


Abbildung 3: Schematischer Aufbau eines NMR-Spektrometers. Quelle: wikipedia.de

Wieder macht man sich eine Art Zeeman-Effekt zu nutzen; diesmal jedoch für den Kern. Besitzt der Kern einen nichtverschwindenden Kernspin I, so gibt es $2I + 1$ Möglichkeiten für die Ausrichtung der Spinorientierung (am einfachsten ist die Messung wenn sich der Spin der Hüllenelektronen zu Null addiert). In einem äußeren Magnetfeld besitzen diese alle eine unterschiedliche Energie. Die Abstände dieser Energiezustände sind atomtypisch und können durch Anregung im Radiowellenbereich angeregt werden (gängige Resonanzfrequenzen liegen zwischen 300 MHz und 1 GHz).
Die Probe wird in ein homogenes (Haupt-)Manetfeld eingebracht und senkrecht dazu mit einem hochfrequenten elektromagnetischem Wechselfeld bestrahlt (heutzutage eher Radiowellen-Pulse). Dabei wird bei einer gewissen Frequenz die interne (Lamor-)Frequenz der Atome angeregt. Diese Oszillation regt in der Induktionsspule einen messbaren Strom an. Durch FFT kann daraus das Spektrum der Oszillationen und damit die spektroskopische Aufteilung gefunden werden.

$$\Delta E = -\vec{\mu}_S \vec{B} \qquad \mu_I = -g_I \mu_B \frac{\vec{I}}{\hbar}$$

in diesem Fall:

$$\mu_{I_z} = -g_I \mu_B m$$

mit

$$g_I = 5.58 \qquad \Delta m = 1 \implies \Delta E = \mu_B g_I \mu_B B/\hbar$$

Da wir Radiowellen einbringen ist

$$E = \hbar\omega \implies \omega = g_I B$$

Dieses $\omega \approx 40$ MHz. Bei der ESR lagen wir bei Frequenzen von $\omega \approx 10$ GHz (bei B = 0.3 T).

48. Aufgabe: Zwei-Elektronen-System

(a) Es ist

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

also für $S = 1$ und $L = 2$ die drei Möglichkeiten

$$J = 1, 2, 3$$

(b) Für $J = 2$ bilden S, J und L ein Dreieck mit den Seitenlängen

$$J = 2 \qquad S = 1 \qquad L = 2 \qquad \vec{J} = \vec{S} + \vec{L}$$

Der Winkel zwischen S und L ist damit aus

$$|\vec{J}|^2 = J^2 = S^2 + L^2 - 2SL\cos(L,S) \implies \cos(L,S) = \frac{L^2 + S^2 - J^2}{2LS}$$

Dies ist ein Winkel von

$$\cos(L,S) = 1/4 \implies \measuredangle(L,S) = 73.2^\circ$$

Es ist aber ein stumpfer Winkel, also 104 Grad.

(c) Quartett, Duplett, Duplett. Für die Übergänge muss wieder der Unterschied von m 0 oder +-1 betragen und bei l = 1. m wird von unten nach oben aufgetragen.

(d)

$$\Delta E = \Delta\vec{\mu}\vec{B} \qquad \Delta\vec{\mu}_z = -g_j\mu_B\Delta J_z/\hbar$$

Wir haben nur Spinmagnetismus, deshalb ist $g_i = g_s = 2$. Auch muss $\Delta m = 1$ gelten. Das Magnetfeld ist also 0.3 T.

49. Aufgabe: Spektren komplexer Atome

Im einfachsten Fall ist:

$$H = \sum_{i=1}^{N}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_i\right)$$

Dazu kommt: Elektron-Elektron (Coulomb); Kern-Elektron (Coulomb); Spin-Spin, Bahn-Spin, Kernspin-Spin, Kernspin-Bahn-Kopplung; Relativistisch (alle Niveaus absenken); l-Entartung => Aufgehoben durch Relativistisch => Dafür j-Entartung => Dies aufgehoben durch Lamb-Shift.

50. Aufgabe: Alkaliatome

(a) Durch die Abschirmung der inneren gefüllten Schalen haben Elektronen mit verschiedenen Bahnen (verschiedenem l) auch unterschiedliche Abschirmungen gegenüber dem Kern. 1/r führt zur l-Entartung. Hier ist dies jedoch kein 1/r-Potential mehr.

(b) Natrium zeigt keine Entartung mehr. Das Wasserstoffatom zeigt noch j-Entartung (aber keine l-Entartung). Durch die relativistische Verschiebung sind alle Niveaus abgesenkt.

(c) Anormaler Zeeman-Effekt.

(d) Es ist

$$\Delta E = \Delta E(\text{l-Übergang}) + \mu_B(g_j m_j - g_s m_j)$$

mit

$$g_j = 3/2 \qquad g_s = 2$$

und für den l-Übergang:

$$\lambda = 5894.92$$

51. Aufgabe: Stark Effekt

(a) Lichtemission von H-Atomen in einem starken E-Feld eines Kondensators. Stark beobachtete die Aufspaltung der Balmer Serie.

(b) Beim quadratischen Stark-Effekt wird ein Dipol induziert mit der Stärke proportional zu E^2. Beim linearen Stark-Effekt gibt es schon einen Dipolmoment des Atoms (nur bei k-fach entarteten Energieniveaus) und die Energie ist damit proportional zur angelegten Feldstärke.

(c) Es werden sehr hohe Felder benötigt

(d) Kein Unterschied zwischen $+m$ und $-m$.

11. Übung

Physik IV – Atome und Moleküle; Sommer 2012

Prof. Wim de Boer & Dr. Frank Hartmann, KIT

Aufgabenblatt 11; Übung am 09. Juli (Montag)

1. Erklären Sie den wesentlichen Unterschied zwischen dem normalen, dem anomalen Zeemann-Effekt und dem Paschen-Back-Effekt!
   Anmerkung: Dies ist ein Beispiel einer typischen Klausuraufgabe!

2. Nennen sie die Hund'schen Regeln!

3. Erklären sie die energetischen Staffelungen der s-,p-,d-,f-Zuständen und die Unregelmässigkeiten in der Auffüllung der Elektronenschalen (Übergangsmetalle, Seltene Erden, Aktiniden) mit den Ellipsenbahnen des Bohr-Sommerfeld-Modells!

4. Elektron in der K-Schale des Wolframatoms

   (a) Berechnen sie mit der effektiven Kernladungszahl Z-1 die Energie eines Elektrons in der K-Schale des Wolframsatoms (Z=74)

   (b) Der experimentelle Wert ist 69,5keV. Berechnen sie daraus die Abschirmungskonstante σ, mit der die effektive Kernladungszahl als $Z - \sigma$ definiert ist.

5. Übergänge im Kaliumatom
   Beim Übergang von $4P_{3/2}$ bzw. $4P_{1/2}$ in den Grundzustand emittiert das Kaliumatom Photonen der Wellenlänge 766,41nm bzw. 769,90nm.

   (a) Berechnen sie die Energie der Photonen in eV.

   (b) Die Differenz der angegebenen ΔE!

   (c) Schätzen sie die Stärke des Magnetfeldes ab, das ein 4P-Elektron im Kaliumatom erfährt!

Matrix: 1/2/3/4/5a+5b/5c
(Aufgabe 3 gibt 2 Wertungskreuze)

Übungsleiter: Frank Hartmann, Tel.: +41 (76) 487 4362; Email: Frank.Hartmann@kit.edu
www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/∼hartmann/atom12.htm

52. Aufgabe: Unterschiede

Zeeman-Effekt: schwaches Magnetfeld; Kooplung zwischen Span- und Bahndrehimpuls. normal: kein Spin. Paschen-Back-Effekt: starkes Magnetfeld, Kopplung wird aufgehoben.

53. Aufgabe: Hund'sche Regeln

Siehe Wikipedia

54. Aufgabe:

siehe Musterlösung

55. Aufgabe: Wolframatom

(a) Benutze

$$E = (-Z - 1)^2(13.6 \text{ eV}) = -72.47 \text{ keV}$$

(b) Mit der Formel von oben ergibt sich

$$\sigma = 2.5/3$$

56. Aufgabe: Übergänge im Kaliumatom

(a) Über

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda}$$

kommt man auf die Energien

(b) Bilde die Differenz!

(c) Das Magnetfeld führt zur Aufspaltung. Deshalb benutzen wir die Formel

$$\Delta E = \mu_B g \Delta j B$$

mit den Zahlenwerten

$$g = 2$$

und ΔE von oben. Man erhält .

12. Übung

Physik IV – Atome und Moleküle; Sommer 2012

Prof. Wim de Boer & Dr. Frank Hartmann, KIT

Letztes Aufgabenblatt 12; Übung am 16. Juli (Montag)

1. Flugweite von virtuellen Teilchen

   (a) Wir wissen, dass auch im Vakuum ständig Teilchenpaare, z.B. Elektron-Positron-Paare enstehen. Falls ihnen niemand die dazu notwendigen Energie stiftet, müssen diesen Teilchen einander sehr bald vernichten. Nach welcher Zeit muß dies spätestens geschehen, und wie weit können sie bestensfalls in dieser Zeit fliegen?

   (b) Wenn Teilchen eines virtuellen Paares genau mit ihrer Ruhemasse erzeugt werden, bewegen sie sich nicht. Will man sie mit hoher kinetischer Energie erzeugen, fliegen sie zwar schnell, aber existieren noch kürzer. Gibt es ein Maximum für ihre mögliche Flugstrecke, und wie groß wäre diese?

2. Laser

   (a) Skizzieren Sie die Komponenten eines Lasers (3 Komponenten)

   (b) Was versteht man unter "Pumpen"?
   Wie funktioniert das technisch (Mittel)?

   (c) Was versteht man unter Besetzungsinversion?

   (d) Welche Eigenschaften hat Laserlicht und wieso hat es diese?

3. Warum bilden zwei Heliumatome nicht ein Helium-Molekül He_2? (kurz)

4. Erklären sie kurz was die sp^3, sp^2 und sp-Hybridisierung beim C-Atom bedeutet und geben sie ein Beispiel für jede Hybridisierung!

5. **Allgemeine Diskussion und Fragestunde!**

Matrix: 1/2/3/4
Übungsleiter: Frank Hartmann,

Tel.: +41 (76) 487 4362; Email: Frank.Hartmann@kit.edu

www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/∼hartmann/atom12.htm

57. Aufgabe: Flugweite virtueller Teilchen

(a) Wir benutzen $\Delta W \cdot \Delta t \leq \hbar$. Falls es nur die Ruhemasse gibt, ist

$$\Delta W = 2m_0c^2$$

und dann

$$r_{\max} = c\Delta t = \frac{\hbar}{2m_0c} \approx \lambda_e$$

(b) Jetzt ist

$$\Delta W = 2mc^2 = 2\gamma m_0c^2$$

Damit

$$r = v\Delta t = \frac{\lambda_e v}{2c}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Das Maximum liegt bei

$$v = c/\sqrt{2}$$

und damit

$$r = \frac{\lambda_e}{4}$$

58. Aufgabe: Laser

(a) Für einen Laser benötigt man das Lasermedium, die optischen Resonatoren (Spiegel) und die Pumpquelle.

(b) Erstellen einer Besetzungsinversion durch Zuführung von Energie. Möglich ist dies z.B. durch einen hellen Blitz.

(c) Besetzungsinversion ist, wenn sich mehr Elektronen im energetisch ungünstigerem Niveau befinden.

(d) Große Kohärenzlänge (bei der stimulierten Emission wird immer ein Photon gleicher Phase emittiert).

$$I = N^2 I_0$$

Polarisation (durch Brewster-Fenster). Kleines Frequenzband (nur durch Energieniveaus im Atom gegeben).

Wahrscheinlichkeit a:

$$\frac{a_{\text{spontan}}}{a_{\text{stimuliert}}} = \nu^3$$

59. Aufgabe: Helium-Moleküle

Die vier Elektronen besetzen die zwei unteren Energieniveaus. Es wären mehr bindende oder nichtbindende Elektronenzustände nötig, was nicht möglich ist (Warum??).

60. Aufgabe: Hybridisierung

Hybridisierung bedeutet, dass sich die Wellenfunktionen der Elektronen verschiedener Orbitale zu neuen Wellenfunktionen linear kombinieren, welche dann nicht mehr unterscheidbar sind. Ein Kohlenstoff-Atom hat eigentlich 2 s und 2 p Elektronen. Diese verschieben sich zu 1 s und 3 p Elektronen (durch äußere Kräfte). Daraus bilden sich dann z.B. vier sp^3-Orbitale, die sich tetraedisch anordnen (CH_4). Oder es bildet sich aus jeweils einem s und zwei p-Orbitalen drei sp^2-Orbitale (das übrige p bleibt im Grundzustand). Oder aus einem s und einem p zwei sp-Orbitale und zwei p bleiben im Grundzustand (somit können noch C-C-Bindungen gebaut werden; Doppelt oder Dreifach).

Todo list

Da gibts viele verschiedene Werte 16
Oben drüber nicht beachten 21
fertig machen 36
Ne, die gehört nicht dazu... Aus ihr folgts nur 38
Bild malen 44
sollte hier überhaupt normiert werden? 44
Problem: Sollte die Wahrscheinlichkeit eigentlich denn eigentlich nie über 1 kommen? 45
Tabelle fertig machen 52
Vergleich 53

Dieses Skript wurde heruntergeladen von
ugroup.hostzi.com

Alle Rechte verbleiben beim lesenden Dozenten.
Keine Garantie auf Richtigkeit oder Vollständigkeit.