

Prof. Dr. Guido Drexlin, Dr. Kathrin Valerius

Vorlesungen	Di 9:45 + Do 8:00, Gerthsen-Hörsaal
Sprechstunde	Drexlin: Di 11:30-12:30, Valerius: Do 9:45-10:45
Übungen	Mo 8:00, 9:45, 11:30 (Anmeldung im Ilias)
Sprechstunde	Erhard, Schlösser: Mo 13:00-14:00
Ilias	https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_661999&client_id=produktiv

Übungsblatt 5 – Bearbeitung bis 12.06.2017

(15) Stern-Gerlach Versuch

Der Stern-Gerlach-Versuch ist ein grundlegendes Experiment in der Physik und wird immer wieder herangezogen, um quantenmechanische Erscheinungen zu erläutern, die im Rahmen der klassischen Physik nicht verständlich sind.

- Welches ist die wichtigste Erkenntnis, die sich aus den Ergebnissen des Experiments ableiten lässt.
- Was bestimmt wie viele Linien gesehen werden? Welche experimentellen Eigenschaften bestimmen die Entfernung zwischen zwei Linie. Nutzen Sie zur Erklärung Abbildung 1.
- Aus welchem Grund muss das untersuchte Teilchen ungeladen sein? Wieso muss das magnetische Feld inhomogen sein?
- Beim historischen Stern-Gerlach Experiment, wurden Silberatome verwendet, diese haben im Grundzustand ein einzelnes 5s Elektron in einer nicht abgeschlossenen Schale. Hinweis: alle weiter unten liegenden Elektronen in abgeschlossenen Schalen addieren ihre Einzeldrehimpulse \vec{l} genau zu einem Gesamtdrehimpuls $\vec{L} = 0$.

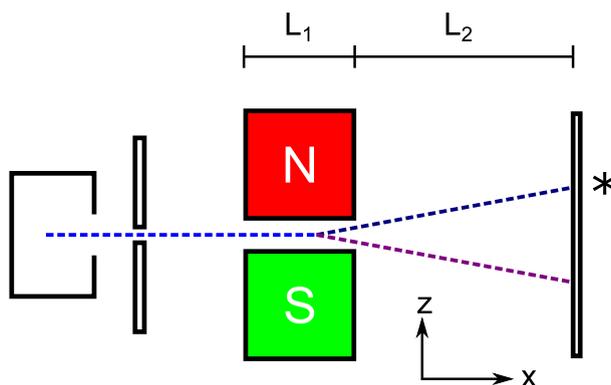


Abbildung 1: Aufbau des Experiment von Walther Gerlach und Otto Stern.

Wir nehmen hier folgende Geometrie an: $L_1 = 4 \text{ cm}$ $L_2 = 10 \text{ cm}$. Die Magnetfeldstärke beträgt $\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \cdot 10^3 \text{ T/m} \end{pmatrix}$. Der Abstand zwischen den beiden Auftreffpunkten auf dem Schirm beträgt 2 mm. Die Silberatome aus dem Ofen haben eine thermische Geschwindigkeit von $v_x = 500 \text{ m/s}$.

- Berechnen Sie die Komponente des magnetischen Moments des Atoms in Richtung der Inhomogenität des Magnetfeldes.
 - Wie kann man mit diesem Experiment den g-Faktor des Elektrons bestimmen? Berechnen Sie ihn.
- (e) Ein feiner Strahl aus neutralen Atomen fliegt durch oben beschriebenen Stern-Gerlach Aufbau. Es werden fünf äquidistante Linien beobachtet. Wie ist der Gesamtdrehimpuls des Atoms?
- (f) Welche Struktur wird beobachtet bei einem Strahl aus Wasserstoffatomen im Grundzustand? Wieso?
- (g) Nun wird der Schirm an der Stelle (*) in Abbildung 1 geöffnet, so dass eine Komponente des Strahls isoliert wird. Nun wird dieser Strahl durch einen weiteren Stern-Gerlach Aufbau geführt. Welches Muster (d.h. gibt es eine Aufspaltung und wie sieht sie aus?) beobachtet man in folgenden Fällen.
- Das zweite Magnetfeld ist ebenfalls in z-Richtung ausgerichtet.
 - Das zweite Magnetfeld ist in y-Richtung ausgerichtet.

(Hinweis: Nutzen Sie in den Überlegungen ihre Kenntnis über die Eigenschaften von Operatoren sowie die Messungen von Eigenwerten aus der Vorlesung (ggf. aus Theo D).)

- (h) Welche Struktur wird beobachtet bei einem Strahl aus Quecksilberatomen im Grundzustand ($^1 S_0$)? Wieso?

(16) Spin-Bahnkopplung/Vektoraddition

Die Elektronen in einem Atom sind in einem Zustand mit Bahndrehimpulsvektor \vec{l} und Spinvektor \vec{s} . Diese koppeln zu einem Gesamtdrehimpuls, dargestellt durch den Vektor \vec{j} .

- (a) Wie sieht die Kopplung vektoriell aus? (Zeigen Sie Formel und Darstellung in Skizze).
- (b) Welche möglichen Gesamtlängen haben die Vektoren \vec{l} , \vec{s} und \vec{j} (allgemeine Formel)? Was sind ihre möglichen Komponenten in einer gemeinsam ausgezeichneten Richtung (z.B. entlang der z-Richtung)? Verwenden Sie hierzu die nötigen Quantenzahlen!
- (c) Berechnen Sie für die Bahndrehimpulsquantenzahl $l = 1$ und die Spinquantenzahl $s = \frac{1}{2}$ die Vektorlängen. Was ist der Winkel zwischen \vec{l} und \vec{s} ? (Hinweis: Nutzen Sie für die Winkelbeziehung, die einfachen mathematischen Zusammenhänge, wie z.B. die Vektormultiplikation. Der ausmultiplizierte Term für \vec{j}^2 beinhaltet dann den Kopplungsterm).

(17) Feinstruktur

Im Wasserstoffatom wird die Feinstrukturaufspaltung beobachtet.

- (a) Woher rührt diese Aufspaltung? Für welche l Quantenzahlen wird sie für $n = 2$ beobachtet?
- (b) Nun wird ein Wasserstoffatom betrachtet, dessen Elektron sich in einem 3d-Zustand befindet, gemäß der Schrödingertheorie.
- Geben Sie an, in welche Niveaus der 3d-Zustand bei Berücksichtigung der LS-Kopplung (=Spin-Bahnkopplung) aufspaltet
 - Die Energieverschiebung (nicht relativistisch!) der Niveaus sei gegeben durch $\Delta E = a (\vec{l} \cdot \vec{s})$. Berechnen Sie die verschobenen Energieniveaus mit dieser Konstante a und skizzieren Sie die beiden neuen Energiezustände relativ zum ursprünglichen 3d-Zustand in einem Energie-diagramm!
- (c) Lesen Sie sich untenstehende Hinweise durch zur relativistischen Feinstrukturkorrektur (Gleichung 2) durch.
- Zeigen Sie, dass der Korrekturterm für die Feinstruktur und die relativistische Korrektur zu keinem möglichen Wert der Quantenzahlen n und j verschwindet, sondern stets zu einer Absenkung der Energie, also zu einer stärkeren Bindung führt.
 - Für welche n, l Werte gibt es die stärkste Verschiebung?

(18) Lamb-Verschiebung

In der Vorlesung wurde das recht aufwendige Experiment von Lamb und Retherford vorgestellt.

- (a) Die Lamb-Verschiebung sollte sich auch mit optischer Spektroskopie messen lassen. In Aufgabe 8 haben wir die Balmer- α Linie kennengelernt (d.h. der Übergang von $n = 3$ auf $n = 2$). In Bohrs Theorie entsprach dem genau ein Übergang. Nun wissen wir, dass es in der quantenmechanischen Beschreibung mehr als einen Zustand für $n = 3$ und $n = 2$ gibt. Die Entartung wird durch die Spin-Bahnkopplung und die relativistischen Effekte aufgehoben.
- Die Balmer- α Linie besteht daher aus ganzen sieben einzelnen Übergängen, die die Auswahlregeln für optische Übergänge beachten. Geben Sie die Übergänge an in spektroskopischer Notation.
- (b) Wenn man nun mit beliebig hoher Auflösung messen würde, wie viele Linien könnte man dann beobachten?
- (c) In Aufgabe 7 haben wir zwei Effekte kennengelernt, die zu einer Verbreiterung der Linie führen (Lebensdauererweiterung und Stoßverbreiterung). Darüber hinaus ist eine der wichtigsten Linienverbreiterungen in der Spektroskopie die sogenannte Dopplerverbreiterung. Dabei ist zu beachten, dass sich das emittierende oder absorbierende Teilchen relativ zum Spektrographen (Emission) oder zur Lichtquelle (Absorption) bewegt und dadurch die beobachtete Frequenz blau(+) oder rot(-) verschoben wird $\nu = \nu_0(1 \pm v/c)$. Da die Geschwindigkeit der Teilchen einer thermischen Verteilung folgt ergibt sich eine Linienverbreiterung von

$$\Delta\nu = \frac{2\nu_0}{c} \sqrt{2k_B T \ln 2/m} \quad (1)$$

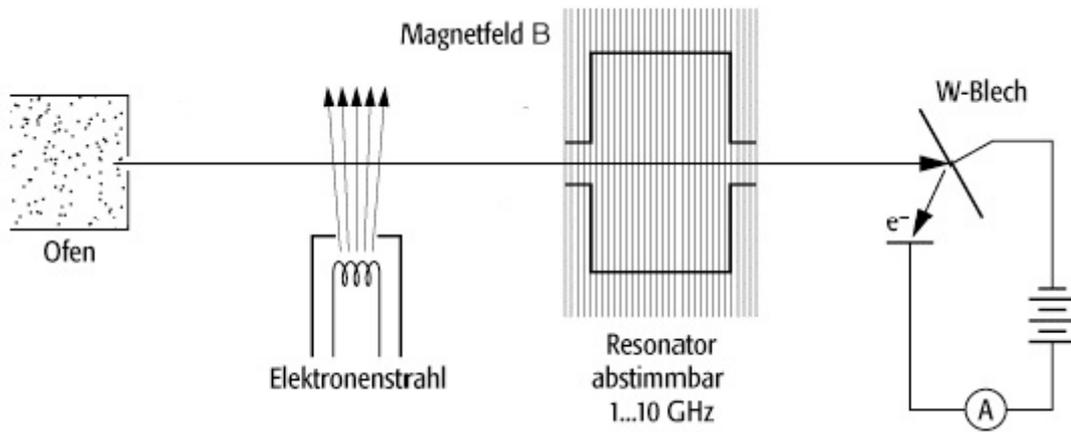


Abbildung 2: Experiment von Lamb und Retherford.

Wie groß ist Dopplerverbreiterung bei Raumtemperatur? Vergleiche diese Breite mit den Unterschieden zwischen dem Übergang $3^2p_{3/2} \rightarrow ?$ und dem Übergang $3^2d_{3/2} \rightarrow ?$ (größter Unterschied), bzw. dem Übergang $3^2d_{5/2} \rightarrow ?$ und dem Übergang $3^2d_{3/2} \rightarrow ?$ (kleinster Unterschied). Was bedeutet dies für die Messung?

- (d) Durch Kühlung der Wasserstoffentladung (z.B. durch flüssigen Stickstoff) kann die Dopplerbreite geringfügig verringert werden. R. Williams hatte ein so Experiment 1938 durchgeführt und gemessen, dass der $3^2d_{3/2} \rightarrow ?$ und sein laut Dirac Theorie entarteter Zustand $3^2p_{3/2} \rightarrow ?$ nicht übereinstimmen.

Im Jahr 1947 führten dann W. E. Lamb und R. C. Retherford ihr berühmtes Experiment durch mit dem sich dieser Effekt nochmals genau quantifizieren lässt. Beschreiben Sie die Funktion der einzelnen Elemente in Abbildung 2 und fügen Sie ein wo welche Zustände des Wasserstoff angetroffen werden und begründen Sie weshalb.

- (e) Warum fallen die $2^2s_{1/2}$ Atome nicht wieder nach kurzer Zeit $\approx 10^{-8}$ s in den Grundzustand $1^2s_{1/2}$ zurück? Warum tun dies aber die $2^2p_{3/2}$ und die $2^2p_{1/2}$ Zustände?
- (f) Der Unterschied zwischen $2^2s_{1/2}$ und $2^2p_{1/2}$ wurde durch Lamb und Retherford auf ungefähr 1 GHz gemessen. Vergleiche dies mit der Dopplerverbreiterung bei der Balmer-Spektroskopie. Warum ist die Dopplerverbreiterung hier kein Problem gewesen.
- (g) Was bedingt nun diesen sogenannten Lamb-Shift?

(Allgemein) Feinstruktur (relativistisch)

Die Energielevel aus der relativistischen Quantentheorie¹ von Dirac sind gegeben als

$$E_{nj} = E_n \left(1 + \frac{Z^2 \alpha^2}{n^2} \left(\frac{n}{j + 1/2} - \frac{3}{4} \right) \right) \quad (2)$$

$$E_n = - \left(\frac{\mu e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 2\hbar^2} \right) \frac{1}{n^2} \quad (3)$$

Diese Berechnung berücksichtigt Energiekorrekturen aufgrund von relativistischen Effekten und der magnetischen Spin-Bahnkopplung.

¹Relativistische Quantenmechanik ist Teil der Theorievorlesung, Theo D oder E

Die Notation von atomaren Zuständen ist $n^{2s+1}X_j$ mit $X = S$ für $l = 0$, $X = P$ für $l = 1$, $X = D$ für $l = 2$, $X = F$ für $l = 3$. Für Eielektronen-Systeme X ist in kleinen Buchstaben angegeben, für Mehrelektronensysteme in großen Buchstaben (Bei Molekülen sind es dann griechische Buchstaben $S, P, D, F \equiv \Sigma, \Pi, \Delta, \Phi$). Der Ausdruck $2s + 1$ nennt sich Multiplizität, z.B. 1=Singulett, 2=Dublett, 3=Triplett, usw. und gibt an den Grad der Entartung des Zustands an. Da bei ein Elektronensystem die Multiplizität immer = 2 ist kann man diese Angabe auch weglassen.

Die Auswahlregel für (elektrische) Dipolübergänge ist $\Delta l = \pm 1$ und $\Delta j = 0, \pm 1$. Ein Grund dafür ist, dass das Photon, das bei optischen Übergängen absorbiert bzw. emittiert wird, als fundamentales Boson einen Spin von $\vec{s} = 1$ besitzt. Daher muss aufgrund von Drehimpulserhaltung Δl gleich dem Photonenspin sein (es sei denn, es werden mehr als ein Photon ausgetauscht).

Für Interessierte: Die Originalveröffentlichungen vom Experiment von Gerlach und Stern sowie von Lamb und Retherford sind in folgendem ILIAS Ordner zu finden. https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=fold_690613&client_id=produktiv

(*) Punkteverteilung

Übungsblatt	Aufgabe	Teilaufgabe	Punkte
5	15	a, c, f, h	je 0.5
5	15	b	1
5	15	g, d	je 1.5
5	16	a, b	je 0.5
5	16	c	2
5	17	a	1
5	17	b, c	je 2
5	18	a, c, d	je 1.5
5	18	b, e, f	je 0.5
5	18	g	1

Bei Verständnisfragen gerne das Wiki im ILIAS nutzen oder eine Mail an die Übungsleiter schreiben.