Übungen zur moderne Experimentalphysik I (Physik IV, Atome und Kerne) KIT, Sommersemester 2017

Prof. Dr. Guido Drexlin, Dr. Kathrin Valerius

Vorlesungen	Di 9:45 + Do 8:00, Gerthsen-Hörsaal
Sprechstunde	Drexlin: Di 11:30-12:30, Valerius: Do 9:45-10:45
Übungen	Mo 8:00, 9:45, 11:30 (Anmeldung im Ilias)
Sprechstunde	Erhard, Schlösser: Mo 13:00-14:00
Ilias	`https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_661999&client_id=produktiv`

Übungsblatt 8 – Bearbeitung bis 03.07.2017

(26) Laser

Ein Laser besteht im Allgemeinen immer aus drei Komponenten: einem aktiven Medium, einem Resonator und einer Pumpquelle. Da es sich bei einem Laser um einen optischen Oszillator handelt, kann er mit einem selbsterregten schwingenden elektronischen Oszillator verglichen werden. So dient das aktive Medium als Verstärker, der Resonator als Rückkopplung und die Pumpquelle als Energiequelle.

(a) Wir betrachten in dieser Übungsaufgabe zunächst einen Helium-Neon Laser.

  (a) Erklären Sie wie hierbei wie aktives Medium, Resonator und Pumpquelle in diesem Laser umgesetzt sind. Nutzen sie hierbei auch eine Skizze des Energiediagramms und beschränken sich auf den charakteristischen Laserübergang bei $\lambda = 632.8\,\text{nm}$.

  (b) Im Laserresonator sind nur diejenigen Wellenlängen resonant, die stehende Wellen ausbilden können. Jede dieser Wellenlängen entspricht einer sogenannten Resonatormode. Siehe dazu Abbildung 1. Berechnen Sie die Wellenlänge λ_n für die $n$te-Mode, sowie den Abstand zwischen zwei Moden. Nehmen Sie an, dass der Laserresonator eine Länge von $l = 500\,\text{mm}$ hat.

  (c) Die Gain-Kurve von Neon hat eine Breite von ca. 1.5 GHz (FWHM, bei der typischen Wellenlänge von 632.8 nm). Der Laser kann auf allen (Resonator-) Moden lasern, die innerhalb der

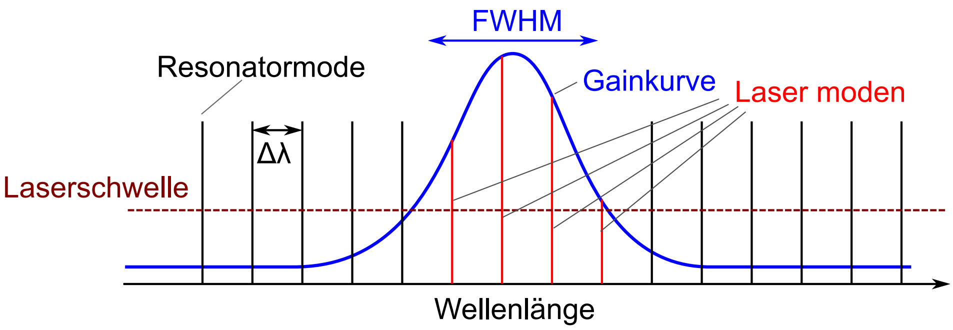

Abbildung 1: Moden im Laserresonator und Gainkurve

Gainkurve und über der Laserschwelle liegen. Wie viele Moden werden für den gegebenen Fall innerhalb der 1.5 GHz liegen (angenommen, dass dies genau der Bereich oberhalb der Laserschwelle ist)?

(d) Der Laser arbeitet meist gleichzeitig nur auf einer Lasermode. Kleine Störungen können aber bewirken, dass es zu Modensprüngen kommt und diese können unter Umständen recht unvorhersagbar sein. Daher fügt man in der Regel in einen Laserresonator noch ein zusätzliches *Etalon* ein, mit dem man alle unerwünschten Moden unterdrücken kann. Dabei handelt es sich um ein Glasplättchen mit aufgedampften Spiegeln auf beiden Seiten, das wie ein Fabry-Perot Interferometer arbeitet (ähnlich dem Laserresonator). Es werden nur diejenigen Wellenlängen durchgelassen (d.h. überleben im Laserresonator), die innerhalb der Etalondicke stehende Wellen ausbilden. Das Etalon hat eine fest Dicke d, der Lichtweg kann aber durch Verkippung etwas variiert werden. Berechnen Sie die Etalon-Moden für eine Dicke von 6 mm und einem Brechungsindex von $n = 1.46$. Zeichnen Sie in Abbildung 1 ein, wie mit der Wahl der Etalon-Mode nur eine Resonatormode zum lasern gebracht werden kann.

(b) Betrachten wir einen gepulsten Laser, z.B. für das Laserentfernungsmesssystem der Fundamentalstation Wettzell. In dem System ist ein gepulster Laser verbaut, der Pulse mit ein Pulsbreite von etwa 200 ps und einer Pulsenergie von 150 mJ bei einer Wellenlänge von 532 nm liefert.

(a) Wie ist die Momentanleistung während des Pulses im Vergleich zu der Leistung eines Kraftwerks?

(b) Wieviele Photonen werden in jedem Puls emittiert?

(c) Mit Dauerstrichlasern (English continouswave, cw) können sehr schmale Bandbreiten in der Laseremission erreicht werden. Gepulste Laser haben hier eine physikalische Begrenzung, die wir auch schon in ähnlicher Form auf einem frühen Übungsblatt kennengelernt haben. Welche ist das und was wäre das kleinste $\Delta\lambda$, dass mit obigem Laser erreicht werden kann.

(27) Herleitung der Rutherford-Streuformel

In der Vorlesung wurde auf die Herleitung von folgender Formel verzichtet:

$$b = \frac{1}{2}\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 E_{\text{kin}}}\cot\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{1}$$

Hierbei ist b der sogenannte Stoßparameter (Englisch *impact parameter*), z/Z die Ladung des einfliegenden Teilchens/des Kerns, e die Elementarladung, E_{kin} die kinetische Energie und θ der Ablenkwinkel. Wie in Abbildung 2 gezeigt, ist b hier der kürzeste rechtwinklige Abstand zwischen Trajektorie der einfliegenden Ladung z und der Parallelen durch die Ladung Z.

Folgende Annahmen werden gemacht: i) Es gibt nur Einfachstreuungen, ii) es gibt nur Coulomb (d.h. elektrische) Wechselwirkungen, ii) die Wirkung von zusätzlichen Elektronen um den Kern kann vernachlässigt werden, iv) der Zielkern ist in Ruhe.

(a) • Wir beginnen die Herleitung mit der einfachen kinetischen Beziehung

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{2}$$

Ersetzen Sie die Kraft mit der Coulombkraft und schreiben Sie die Beschleunigung als Ableitung der Geschwindigkeit. Achten Sie bei der gesamten Herleitung darauf, dass Sie die vektorielle Schreibweise nicht unterschlagen.

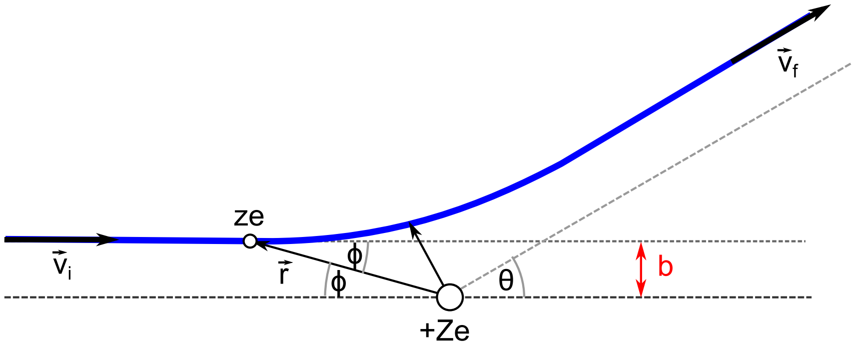

Abbildung 2: Coulomb Streuung geladener Teilchen.

- Nutzen Sie aus, dass die Coulombkraft eine Zentralkraft ist, bei der der Drehimpuls erhalten ist, d.h.

$$L = mr^2 \frac{d\phi}{dt} = \text{const.} \tag{3}$$

Fügen Sie die Gleichungen zusammen, in dem Sie folgende Ergänzung ausnutzen:

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\mathrm{v}}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}\tilde{\mathrm{v}}}{\mathrm{d}\phi}\frac{d\phi}{dt} \; . \tag{4}$$

- Nun integrieren Sie die entstehende Gleichung $\int \mathrm{d}\tilde{\mathrm{v}} = \tilde{\mathrm{v}}_\mathrm{f} - \tilde{\mathrm{v}}_\mathrm{i} = |\tilde{\mathrm{v}}_\mathrm{f} - \tilde{\mathrm{v}}_\mathrm{i}|\tilde{\mathrm{u}}$. Hier bei ist $\vec{u}$ ein Einheitsvektor entlang der Richtung $\vec{v}_i - \vec{v}_f$. Aufgrund der Energieeerhaltung ($E_\mathrm{kin} = \frac{1}{2}m\vec{v}_i^2 = \frac{1}{2}m\vec{v}_f^2 = \frac{1}{2}mv^2$) ist Eingangs- und Endgeschwindigkeit dieselbe. Schreiben Sie daher die Beziehung $|\vec{v}_f - \vec{v}_i|$ mittels des Winkels θ um. (Am besten Skizze machen, ggf. direkt Abbildung 2 nutzen).
- Die andere Seite der Integration wird zwischen einem Winkel zwischen 0 und $\pi - \theta$ integriert. Nutzen Sie aus, dass für den Einheitsvektor $\hat{r}$ in der Integration folgendes gilt:

$$\int \hat{r}\mathrm{d}\phi = \int_0^{\pi-\theta} \left(\hat{\mathrm{i}}\cos\phi + \tilde{\mathrm{j}}\sin\phi\right)\mathrm{d}\phi \tag{5}$$

- Nach der Integration auf beiden Seiten bringen Sie nun den Stoßparameter b in die Gleichung, indem Sie den Drehimpuls als Funktion desselben ausdrücken. Nun erhalten Sie die Coulomb Streuformel

(b) Formel 1 gibt also den Zusammenhang des Ablenkwinkels θ und des Stoßparameters b an. Ein großes b bedeutet ein kleines θ und andersherum.

Einfliegende Ladungsteilchen mit Stoßparameter zwischen b und $b + db$ werden damit auf die Streuwinkel zwischen θ und $\theta - d\theta$ abgebildet. Mit Rotationssymmetrie werden also die Teilchen auf einem Ring mit Innendurchmesser b und Außendurchmesser $b + db$ in einen *Hohlkegel* zwischen den Winkeln θ und $\theta - d\theta$ gestreut (Siehe Vorlesung AK-17b, Folie 12).

- Für die Herleitung des Wirkungsquerschnitts nutzen Sie zunächst, das die Ringfläche des Eingangsstrahl gegeben ist als

$$A_\mathrm{ring} = 2\pi b \cdot |db|, \tag{6}$$

und außerdem $|\mathrm{db}| = |\frac{\mathrm{db}}{\mathrm{d}\theta}\mathrm{d}\theta|$. (Ableitung ausführen!)

- Für die Beziehung zwischen Raumwinkel Ω des Hohlkegels und des Streuwinkels gilt (wegen Kugelkoordinaten)

$$d\Omega = \frac{2\pi r \sin\theta r d\theta}{r^2} \tag{7}$$

  Substituieren Sie damit das $|d\theta|$ aus vorherigem Herleitungsschritt.

- Nun wollen wir den Wirkungsquerschnitt herleiten. Die Wahrscheinlichkeit den 'Trefferkreis' eines Atomkerns mit der Fläche nach Gl. (6), der das eintreffende Teilchen nach $\theta \to \theta - d\theta$ ablenkt, bezogen auf eine Fläche A einer Folie zu treffen, ist gegeben als

$$A_{\text{ring}}/A. \tag{8}$$

  Da sich in der Folie mehrere Atomkerne befinden muss diese Wahrscheinlichkeit noch mit $n \cdot A \cdot d$ multipliziert werden. Hierbei ist n die Volumendichte der Atomkerne, A wiederum die Oberfläche und d die Foliendicke.

- Nun wird diese Wahrscheinlichkeit mit der Anzahl der eintreffenen Teilchen N multipliziert und man erhält die Teilchen dN′ die in den Raumwinkel $d\Omega$ gestreut werden.

- Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist somit

$$\sigma_c(\theta) = \left(\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega}\right) = \frac{dN'}{Nnd\, d\Omega}. \tag{9}$$

  Hieraus sollte nun die bekannte Rutherford-Streuformel folgen.

(28) Einstieg in Kernphysik

Ein Nuklid ist eine Art (Sorte) von Atomen, die sowohl in der Anzahl der Protonen als auch in der Anzahl der Neutronen ihres Atomkerns übereinstimmen. Nukleide werden wie folgt geschrieben

$${}^{A}_{Z}X \tag{10}$$

Hier bei ist A die Nukleonzahl (oder Massenzahl), Z die Ordnungszahl und X das Elementsymbol.

(a) Welche der folgenden Kerne sind i) Isotope, ii) Isobare und iii) Isotone zueinander?

^{17}N	^{12}C	^{3}H	^{18}O	^{6}Li
^{13}C	^{14}N	^{17}O	^{3}He	^{17}F
^{2}H	^{18}O	^{4}He	^{16}O	^{14}C

(b) Vervollständigen Sie die Schreibweise nach Gleichung (10).

(29) Bindungsenergien und Kernmassen

In Tabelle 1 sind die Massen einger leichter Kerne aufgelistet.

(a) Was ist die maximale Energie des Beta-Teilchens aus dem Zerfall von ^{3}H in ^{3}He?

(b) Welche Fusionsreaktion produziert mehr Energie?

$$^{3}\text{H} + ^{3}\text{He} \to ^{6}\text{Li} \tag{11}$$
$$^{2}\text{H} + ^{4}\text{He} \to ^{6}\text{Li} \tag{12}$$

Nukleid	Masse (amu)	Nukleid	Masse (amu)
^{1}H	1.00783	^{3}He	3.01603
^{2}H	2.01410	^{4}He	4.02603
^{3}H	3.01605	^{6}Li	6.01512

Tabelle 1: Massen einiger leichter Kerne (1 amu = 931.5 MeV).

(30) Bethe-Weizsäcker-Massenformel

Die Bethe-Weizsäcker-Formel ist eine Formel zur Beschreibung der Bindungsenergie von Atomkernen nach dem sogenannten Tröpfchenmodell. Bindungsenergie kann als negative potentielle Energie betrachtet werden. Im Tröpfchenmodell werden die Nukleonen wie Moleküle eines inkompressiblen geladenen Flüssigkeitströpfchens betrachtet.

(a) Wie lautet die Bethe-Weizäcker-Massenformel für die Bindungsenergie E_B und erklären Sie alle auftretenden Terme?

(b) Was bedeutet der Ausdruck E_B/A und welcher Term wird für große Kerne am dominantesten?

(c) Welcher Kern hat eine pro Nukleon größere Bindungsenergie, ^{60}Ni oder ^{52}Cr?

(d) Warum kann man durch die Spaltung von Uran-235 Energie gewinnen? Nehmen sie an, dass ^{235}U in zwei ungefähr gleich große Kernfragmente zerfällt und schätzen Sie dadurch die Energie ab, die durch diese Reaktion frei wird.

(e) Wie viel Energie wird frei, wenn 1 kg Uran gespalten wird? Vergleichen Sie diesen Wert mit der Energiemenge von 'konventionellen' Sprengstoffen, wie Beispielsweise TNT ($C_7H_5N_3O_6$) mit einer Explosionswärme von $3725\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$.

(*) Punkteverteilung

Übungsblatt	Aufgabe	Teilaufgabe	Punkte
8	26	a, b	je 2
8	27	a, b	je 2
8	28	a, b	je 1
8	29	a, b	je 1
8	30	a	1,5
8	30	b	0,5
8	30	c, d, e	1