

# Übungen zur Vorlesung Moderne Experimentalphysik I

## KIT, Sommersemester 2019



Prof. Dr. G. Drexlin, Dr. K. Valerius, Dr. M. Schlösser, Dr. H. Seitz-Moskaliuk

---

Vorlesungen	Di 9:45 + Do 8:00, Gerthsen-Hörsaal
Sprechstunde	Prof. Drexlin: Di 11:30-12:30, Raum F2-34 (Flachbau)
Übungen	Mo 8:00, 9:45, 11:30
Sprechstunde	Dr. Schlösser, Dr. Seitz-Moskaliuk: nach Vereinbarung (magnus.schloesser@kit.edu, hendrik.seitz-moskaliuk@kit.edu)
Ilias	<a href="https://ilias.studium.kit.edu/goto_produkativ_crs_946736.html">https://ilias.studium.kit.edu/goto_produkativ_crs_946736.html</a>

---

## Übungsblatt 7 – Bearbeitung bis 10.06.2019

### (20) Feinstruktur

Im Wasserstoffatom wird die Feinstrukturaufspaltung beobachtet (siehe auch Hertel & Schulz Kapitel 6.2).

- (a) Woher rührt diese Aufspaltung? Für welche  $l$  Quantenzahlen wird sie für  $n = 2$  beobachtet?
- (b) Nun wird ein Wasserstoffatom betrachtet, dessen Elektron sich in einem 3d-Zustand befindet, gemäß der Schrödingertheorie.
- Geben Sie an, in welche Niveaus der 3d-Zustand bei Berücksichtigung der LS-Kopplung (=Spin-Bahnkopplung) aufspaltet.
  - Die Energieverschiebung (nicht relativistisch!) der Niveaus sei gegeben durch  $\Delta E = a(\vec{\ell} \cdot \vec{s})$ . Berechnen Sie die verschobenen Energieniveaus mit dieser Konstante  $a$  und skizzieren Sie die beiden neuen Energiezustände relativ zum ursprünglichen 3d-Zustand in einem Energie-diagramm!  
Hinweis: Um den Ausdruck,  $\vec{\ell} \cdot \vec{s}$ , berechnen zu können, betrachten sie bitte im Buch von Hertel & Schulz Gleichungen (6.42) *Drehimpulseigenzustände* und (6.46) *Drehimpulsoperatoren und Skalarprodukt*.
- (c) Lesen Sie sich untenstehende Hinweise zur relativistischen Feinstrukturkorrektur (Gleichung 1) durch.
- Zeigen Sie, dass der Korrekturterm für die Feinstruktur und die relativistische Korrektur zu keinem möglichen Wert der Quantenzahlen  $n$  und  $j$  verschwindet, sondern stets zu einer Absenkung der Energie, also zu einer stärkeren Bindung führt.
  - Für welche  $n, \ell$  Werte gibt es die stärkste Verschiebung?

### (21) Lamb-Verschiebung

In der Vorlesung wurde das recht aufwendige Experiment von Lamb und Retherford vorgestellt. Für

Interessierte: Die Originalveröffentlichungen vom Experiment von Lamb und Retherford sind in folgendem ILIAS Ordner zu finden: [https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=fold\\_980201&client\\_id=produktiv](https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=fold_980201&client_id=produktiv).

- (a) Die Lamb-Verschiebung sollte sich auch mit optischer Spektroskopie messen lassen. In Aufgabe 12 haben wir die Balmer- $\alpha$ -Linie kennengelernt (d.h. der Übergang von  $n = 3$  auf  $n = 2$ ). In Bohrs Theorie entsprach dem genau ein Übergang. Nun wissen wir, dass es in der quantenmechanischen Beschreibung mehr als einen Zustand für  $n = 3$  und  $n = 2$  gibt. Die Entartung wird durch die Spin-Bahnkopplung und die relativistischen Effekte aufgehoben. Die Balmer- $\alpha$ -Linie besteht daher aus ganzen sieben einzelnen Übergängen, die die Auswahlregeln für optische Übergänge beachten. Geben Sie die Übergänge an in spektroskopischer Notation. (siehe Kapitel 6.2.6 in Hertel & Schulz).
- (b) Wenn man nun mit beliebig hoher Auflösung messen würde, wie viele Linien könnte man dann beobachten?
- (c) In Aufgabe 9 haben wir zwei Effekte kennengelernt, die zu einer Verbreiterung der Linie führen (Lebensdauererweiterung und Stoßverbreiterung). Darüber hinaus ist eine der wichtigsten Linienverbreiterungen in der Spektroskopie die sogenannte Dopplerverbreiterung. Dabei ist zu beachten, dass sich das emittierende oder absorbierende Teilchen relativ zum Spektrographen (Emission) oder zur Lichtquelle (Absorption) bewegt und dadurch die beobachtete Frequenz blau(+) oder rot(-) verschoben wird:  $\nu = \nu_0 \cdot (1 \pm \frac{v}{c})$ . Da die Geschwindigkeit der Teilchen einer thermischen Verteilung folgt, ergibt sich eine Linienverbreiterung von

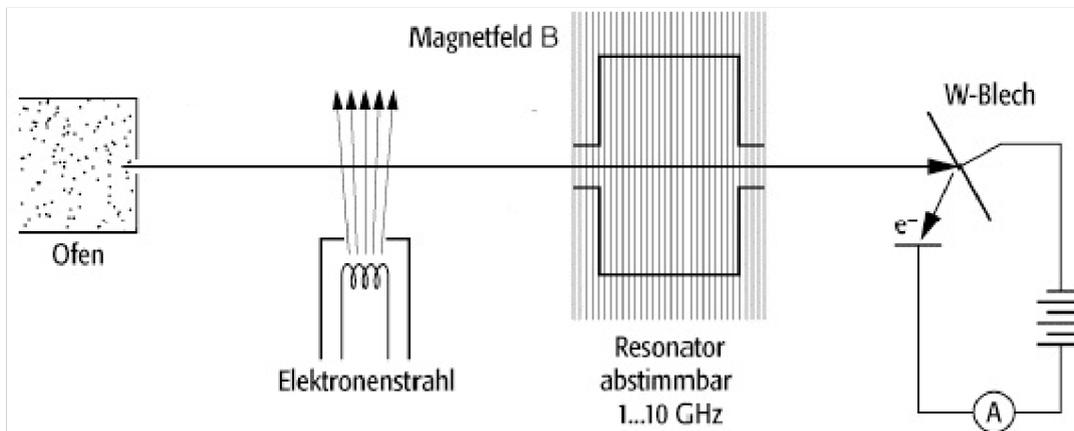
$$\Delta\nu = \frac{2\nu_0}{c} \sqrt{\frac{2k_B T \ln 2}{m}}$$

Wie groß ist die Dopplerverbreiterung bei Raumtemperatur? Vergleichen Sie diese Breite mit den Unterschieden zwischen dem Übergang  $3^2p_{3/2} \rightarrow ?$  und dem Übergang  $3^2d_{3/2} \rightarrow ?$  (größter Unterschied), bzw. dem Übergang  $3^2d_{5/2} \rightarrow ?$  und dem Übergang  $3^2d_{3/2} \rightarrow ?$  (kleinster Unterschied). Was bedeutet dies für die Messung?

- (d) Durch Kühlung der Wasserstoffentladung (z.B. durch flüssigen Stickstoff) kann die Dopplerbreite geringfügig verringert werden. R. Williams hatte so ein Experiment 1938 durchgeführt und gemessen, dass der  $3^2d_{3/2} \rightarrow ?$  und sein laut Dirac-Theorie entarteter Zustand  $3^2p_{3/2} \rightarrow ?$  nicht übereinstimmen. Im Jahr 1947 führten dann W. E. Lamb und R. C. Retherford ihr berühmtes Experiment durch, mit dem sich dieser Effekt nochmals genau quantifizieren lässt. Beschreiben Sie die Funktion der einzelnen Elemente in Abbildung 1 und fügen Sie ein, wo welche Zustände des Wasserstoffs angetroffen werden und begründen Sie weshalb.
- (e) Warum fallen die  $2^2s_{1/2}$ -Atome nicht wieder nach kurzer Zeit ( $\approx 10^{-8}$  s) in den Grundzustand  $1^2s_{1/2}$  zurück? Warum tun dies aber die  $2^2p_{3/2}$  und die  $2^2p_{1/2}$ -Zustände?
- (f) Der Unterschied zwischen  $2^2s_{1/2}$  und  $2^2p_{1/2}$  wurde durch Lamb und Retherford auf ungefähr 1 GHz gemessen. Vergleichen Sie dies mit der Dopplerverbreiterung bei der Balmer-Spektroskopie. Warum ist die Dopplerverbreiterung hier kein Problem gewesen?
- (g) Was bedingt nun diesen sogenannten Lamb-Shift?

## (22) Kernspin-Resonanz

Ein Wassertropfen befindet sich in einem Magnetfeld von  $B_0 = 2.5$  T. Nun wird über eine Spule zusätzlich ein alternierendes elektromagnetisches Wechselfeld eingekoppelt. Die Frequenz wird so eingestellt,



**Abbildung 1:** Aufbau des Experiments von Lamb und Retherford.

dass sie mit der maximalen Spinumklapprate der im Wasser befindlichen Protonen übereinstimmt. Hinweis: Siehe hierbei Hertel & Schulz Kapitel 9.5.

- Berechnen Sie die dazu notwendige Frequenz. Das Magnetfeld ist parallel zur  $z$ -Achse angelegt und das magnetische Dipolmoment eines Protons in Richtung dieses Magnetfeldes beträgt  $\mu_z = 1.4 \cdot 10^{-26} \text{ J/T}$ .
- Vergleichen Sie diese Frequenz mit typischen Frequenzen bei ESR Experimenten, die in der Vorlesung vorgestellt wurden (bzw. Hertel & Schulz 9.5.2). Woher kommt der Unterschied?
- Das NMR Signal hat in der Regel ein schlechtes Signal-zu-Rausch-Verhältnis, da es sich hierbei nur um einen kleinen Effekt handelt. Erklären Sie weshalb das Signal-zu-Rausch-Verhältnis durch folgende Maßnahmen verbessert werden kann:
  - Signal-Akkumulation durch mehrfache Messung einer Probe und Addition aller Spektren
  - Erhöhung der Magnetfeldstärke  $B_0$
  - Senkung der Temperatur der Probe

### (23) Zeemann Effekt

Beim Zeemann-Effekt kommt es zu einer Wechselwirkung des magnetischen Moment des Atoms  $\vec{\mu}$  mit einem externen Magnetfeld  $B$ . Das Thema wird auch in Hertel & Schulz in Kapitel 8.1.2 behandelt.

- In der Vorlesung wurde von "normalem" und "anomalem" Zeemann Effekt gesprochen. Was ist hierbei der Unterschied und welcher von beiden ist eigentlich nur ein Spezialfall des Anderen?
- Mittels des Zeemann-Effekts lässt sich das Magnetfeld der Sonne messen, ohne direkt vor Ort zu sein. In einem Sonnenfleck misst man einen Übergang des Elements Eisen (reiner Bahndrehimpuls), der sich in drei Komponenten aufspaltet. (z.B. einen Übergang mit  $n+1 \rightarrow n$  und  $l+1 \rightarrow l$ ).
  - In wie viele Energieniveaus spaltet ein Zustand  $l$  in diesem Fall auf?

- Erklären, sie energetisch, wieso sich der Zustand, der ohne Magnetfeld entartet ist, nun im Magnetfeld aufspaltet. Nutzen Sie bei der Erklärung das Bild eines magnetischen Dipol im Magnetfeld.
- Warum werden nur drei Linien gemessen?
- Die Aufspaltung zwischen benachbarten Linien beträgt 0.1 pm und die zentrale Wellenlänge beträgt 350 nm. Wie stark ist das Magnetfeld an dem Sonnenfleck?

(c) In wie viele Linien würde sich eine der Balmer- $\alpha$  Linien ( $3p_{3/2} \rightarrow 2s_{1/2}$ ) aufspalten?

### **(24) Rubidium-Atomuhr mit Hyperfeinübergang (Bonus-Aufgabe)**

*Diese Bonusaufgabe ist außerhalb der 60% Regelung für den Übungsschein. Allen motivierten Studenten und auch allen, die noch ihre 60% vollbekommen wollen, empfehlen wir die Bearbeitung dieser Aufgabe.*

Als Zeitnormal können atomaren Übergänge verwendet werden, da hierbei die Übergangsfrequenzen (in Abwesenheit von externen Störungen) universell konstant sind (anders bei einer Pendeluhr oder einem Quarzoszillator). Hyperfeinübergänge liegen im Bereich von einigen GHz. Dies ist meßtechnisch sehr praktisch, da es sich hierbei um Frequenzen handelt, die sich elektronisch zählen lassen. (Vergleiche hierbei die Frequenz von sichtbaren Licht!).

(a) Wodurch resultiert die Hyperfeinaufspaltung in Atomen?

(b) In der Vorlesung wurde die Cs-Atomstrahluhr vorgestellt. Eine andere, kompaktere Art der Atomuhr ist eine, die auf Rubidium-Dampf beruht. Betrachten Sie dazu den Artikel von James Camparo [https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=file\\_980204\\_download&client\\_id=produktiv](https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=file_980204_download&client_id=produktiv) und beantworten Sie die folgende Fragen:

- Für die Hyperfeinstrukturaufspaltung wird kein externes Magnetfeld benötigt. Wieso gibt es hier doch ein externes Magnetfeld?
- Wieso wählt man einen Übergang zwischen  $m = 0$  und  $m = 0$ ?
- Vergleichen Sie die Übergangsenergie mit der thermischen Energie bei Raumtemperatur. Was bedeutet das für die Besetzung der Hyperfein-Zustände?
- Warum wird das optische Pumpen benötigt und wie funktioniert es?
- Wie stabilisiert man den Quarzkristalloszillator auf den atomaren Übergang?

### **(Anhang) Feinstruktur (relativistisch)**

Die Energielevel aus der relativistischen Quantentheorie<sup>1</sup> von Dirac sind gegeben als

$$E_{nj} = E_n \left( 1 + \frac{Z^2 \alpha^2}{n^2} \left( \frac{n}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \right) \right), \quad (1)$$

$$E_n = - \left( \frac{\mu e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 2\hbar^2} \right) \frac{1}{n^2}. \quad (2)$$

Diese Berechnung berücksichtigt Energiekorrekturen aufgrund von relativistischen Effekten und der magnetischen Spin-Bahnkopplung. Die Notation von atomaren Zuständen ist  $n^{2s+1}X_j$  mit  $X = S$  für

<sup>1</sup>Relativistische Quantenmechanik ist Teil der Theorievorlesung, Theo D oder E

$l = 0$ ,  $X = P$  für  $l = 1$ ,  $X = D$  für  $l = 2$ ,  $X = F$  für  $l = 3$ . Für Einelektronen-Systeme ist  $X$  in kleinen Buchstaben angegeben, für Mehrelektronensysteme in großen Buchstaben (bei Molekülen sind es dann griechische Buchstaben  $S, P, D, F \equiv \Sigma, \Pi, \Delta, \Phi$ ). Der Ausdruck  $2s + 1$  nennt sich Multiplizität, z. B. 1=Singulett, 2=Dublett, 3=Triplett usw., und gibt den Grad der Entartung des Zustands an. Da bei einem Ein-Elektronensystem die Multiplizität immer = 2 ist, kann man diese Angabe auch weglassen. Die Auswahlregel für (elektrische) Dipolübergänge ist  $\Delta l = \pm 1$  und  $\Delta j = 0, \pm 1$ . Ein Grund dafür ist, dass das Photon, das bei optischen Übergängen absorbiert bzw. emittiert wird, als fundamentales Boson einen Spin von  $|\vec{s}| = 1$  besitzt. Daher muss aufgrund von Drehimpulserhaltung  $\Delta l$  gleich dem Photonen-spin sein (es sei denn, es werden mehr als ein Photon ausgetauscht).

**(\*) Punkteverteilung**

Aufgabe	Teilaufgabe	Punkte
20	a	1
20	b, c	2
21	a, c, d	je 1,5
21	b, e, f	je 0,5
21	g	1
22	a, b, c	je 1
23	a, c	je 1
23	b	2
24*	a	0,5
24*	b (pro Unterpunkt)	je 0,5

\* Bonusaufgabe!

Bei Verständnisfragen gerne das Wiki im ILIAS nutzen oder eine Mail an die Übungsleiter schreiben.