ÜBUNGSAUFGABEN III Abgabe am: 17.05.2023, 10:00 Uhr

Aufgabe 1: Erwartungswerte (5 Punkte)

Die Wellenfunktion $\Psi(r)$ eines Teilchens in einem eindimensionalen Problem sei

$$\Psi(r) = N \frac{e^{ip_0 r/\hbar}}{\sqrt{a^2 + r^2}},$$

wobei a, p_0 reelle Parameter sind und N die Normierungskonstante ist.

a) Bestimmen Sie die Normierungskonstante N.
b) Sie messen den Ort r des Teilchens. Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man das Teilchen im Intervall $\left[-\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}}\right]$?
c) Berechnen Sie die Erwartungswerte für Ort $\langle r \rangle = \langle \Psi | \hat{r} | \Psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dr\, \Psi^*(r) r\, \Psi(r)$ und Impuls $\langle p \rangle = \langle \Psi | \hat{p} | \Psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dr\, \Psi^*(r) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial r}\right) \Psi(r)$ des Teilchens.

Aufgabe 2: Schrödingergleichung (4 Punkte)

Für ein einzelnes Elektron sind im einfachsten Fall (kein Spin) die Wellengleichung der Elektrodynamik und die stationäre Schrödingergleichung im Ortsraum formal äquivalent. Lösen Sie anhand dieses Umstands folgende Fragestellung: Ein Elektron mit Geschwindigkeit v treffe aus dem Vakuum (Potential $\Phi_0 = 0$) senkrecht auf einen Halbraum mit konstantem elektrischen Potential Φ_1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird das Elektron reflektiert? Wie würde sich dagegen ein klassisches Teilchen verhalten?

Hinweis: Bestimmen Sie den Ausdruck in der Schrödingergleichung, der formal dem Brechungsindex entspricht. Berechnen Sie dann den Reflexionskoeffizienten anhand der Formel für die analoge Fragestellung in der Optik.

Zahlenwerte: $v = 150$ km/s, $\Phi_1 = 50$ mV.

Aufgabe 3: Wellenpaket (6 Punkte)

Sie haben in der Vorlesung gelernt, dass die Wellenfunktion eines freien Teilchens der Masse m im eindimensionalen Fall die folgende allgemeine Form hat

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\Psi}(k)\, \mathrm{e}^{i(kx-\omega(k)t)} \mathrm{d}k\,, \quad \omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m},$$

wobei $\widetilde{\Psi}(k)$ im allgemeinen eine beliebige absolut integrierbare Funktion ist, die den Wellenzahl-, bzw. Frequenzbeiträgen des Wellenpakets entspricht.

Wir betrachten nun den Spezialfall, des so genannten Gauß'schen Wellenpakets, für das gilt

$$\widetilde{\Psi}(k) = A \cdot \mathrm{e}^{-d^2(k-k_0)^2}, \quad d, A > 0.$$

Das Wellenpaket beschreibt ein Teilchen welches bei $t = 0$ im Raumbereich mit der Ausdehnung $2d$ lokalisiert ist.

a) Bestimmen Sie die Konstante A aus der Normierungsbedingung $\int_{-\infty}^{\infty} |\widetilde{\Psi}(k)|^2 \mathrm{d}k = 1$.
b) Berechnen Sie $\Psi(x,t)$.
c) Berechnen Sie die charakteristische Zeit (d.h. die Zeit bis zur Verdopplung der Breite des Wellenpakets) für (i) einen Tennisball mit $m = 40\mathrm{g}$ und $d = 10\mathrm{cm}$, (ii) ein Elektron mit $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}\mathrm{kg}$ und $d = 10^{-15}\mathrm{m}$.
d) Kommentieren Sie das räumliche und zeitliche Verhalten von $|\Psi(x,t)|^2$, der Aufenthaltswahrscheinlichkeit unseres Teilchens

Aufgabe 4: Die Unschärferelation (5 Punkte)

Wasserstoff hat eine Lebensdauer des angeregten Zustands (n = 3) von 10^{-8} s.

a) Verwenden Sie die geeignete Unschärferelation, um die Unschärfe der Linienbreite in Einheiten von Hz für diesen optischen Emissionsübergang zu berechnen.
b) Wie groß ist die Linienbreite des H-Alpha-Übergangs (656.3 nm), vorausgesetzt, er hat die in Teil a) angegebene Lebensdauer.
c) Viele Lanthanid-Ionen haben Lebensdauern von 4f → 4f-Übergängen in der Größenordnung von 10^{-3} s (wenn sie in ein kristallines Material dotiert werden). Berechnen Sie die zugehörige Linienbreite für einen Übergang bei der gleichen Wellenlänge wie der H-Alpha-Übergang und vergleichen Sie sie mit der von Wasserstoff. Diskutieren Sie eine mögliche technologische Anwendung für solche Materialien.