ÜBUNGSAUFGABEN V Abgabe am: 07.06.2023, 10:00 Uhr

Aufgabe 1: Unendlich tiefer Potentialtopf (5 Punkte)

Bestimmen Sie für den Grundzustand eines unendlich tiefen Potentialtopfs (mit der Breite L) die Erwartungswerte für den Ort $\langle x \rangle$ sowie $\langle x^2 \rangle$ und für den Impuls $\langle p \rangle$ sowie $\langle p^2 \rangle$. Berechnen Sie damit die mittleren Schwankungsquadrate $(\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ und $(\Delta p)^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$. Wie groß ist damit das Produkt von Orts- und Impuls- „Unschärfe“ $\Delta x \cdot \Delta p$?

Aufgabe 2: Kreisbahnen im Wasserstoffatom (4 Punkte)

Wir betrachten im Wasserstoffatom Zustände mit maximalem Drehimpuls, d.h. $l = n - 1$. Der radiale Anteil der Wellenfunktion für diese Zustände ist gegeben durch

$$R_{n,l=n-1}(r) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}na_0\right)^{2n+1}(2n)!}} \cdot e^{-\frac{r}{na_0}} \cdot r^{(n-1)}$$

a) Bestimmen Sie die Erwartungswerte $\langle r \rangle, \langle r^2 \rangle$ und die relative Unschärfe des Bahnradius.
b) Berechnen Sie den Bahnradius und die Unschärfe für $n = 47$, $l = 46$ und vergleichen Sie diese Zahlen mit den Vorhersagen des Bohrschen Atommodells.

Aufgabe 3: Effektives Potential (6 Punkte)

Die Energien E_n des Wasserstoffatoms hängen nur von der Hauptquantenzahl n ab. Sie ergeben sich aus den Randbedingungen des Radialteils, der wiederum über das effektive Potential $V_{eff}(r)$ bestimmt wird:

$$V_{eff}(r) = \frac{\hbar^2}{2m}\left(-\frac{2}{a_0 r} + \frac{l(l+1)}{r^2}\right)$$

mit $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2}$. Obwohl dieses Potential von der Drehimpulsquantenzahl l abhängt, gilt dies nicht für die bezüglich l entarteten Energien E_n. Es entsteht die Frage, wie E_n im Bezug zu V_{eff} für die erlaubten l liegt.

a) Berechnen Sie dazu die Position r_{min} und den Wert des Minimums $V_{eff}(r_{min})$ des effektiven Potentials in Abhängigkeit von l. Hierbei entspricht dann r_{min} dem Bahnradius des Elektrons im klassischen Modell einer negativen Ladung auf einem Orbit im Coulombpotential einer positiven Zentralladung.
b) Vergleichen Sie für Zustände mit maximalem Drehimpuls $l = n - 1$ das Ergebnis $V_{eff}(r_{min})$ mit der Energie E_n, und, falls vorhanden, r_{min} mit dem Ergebnis für $\langle r \rangle$ aus Aufgabe 1 und interpretieren Sie das Ergebnis.
c) Ein Fehler des Bohrschen Atommodells ist es, dass auch dem niedrigsten Energieniveau $n = 1$ ein Bahndrehimpuls $|\vec{L}| = n\hbar$ zugeordnet wird, wie es auch im klassischen Modell zu erwarten ist (ohne Bahndrehimpuls würde das Elektron in den Kern stürzen). Wie kann man sich die Elektronenbewegung für $l = 0$-Zustände vorstellen und somit trotz verschwinden des Zentralfeldpotentialterms in V_{eff} anschaulich erklären, warum das Elektron nicht in den Kern stürzt?

Aufgabe 4: Wasserstoff-ähnliche Systeme (5 Punkte)

Als wasserstoff-ähnlich kann man alles Systeme bezeichnen, bei denen sich ein geladenes Teilchen im Coulomb-Potential eines anderen, entgegengesetzt geladenen Objekts befindet.

a) Besonders ähnlich zum Wasserstoffatom sind natürlich Deuterium und Tritium, bei welchen zusätzlich ein, bzw. zwei Neutronen im Kern sind. Der Kern ist also deutlich schwerer als beim einfachen Wasserstoff. Wie wirkt sich das auf die Eigenenergien, bzw. auf die emittierten Wellenlängen aus? Bestimmen Sie, um welche Faktoren sich diese Werte für Deuterium und Tritium von denen für Wasserstoff unterscheiden.

b) Ein weiteres Beispiel für wasserstoff-ähnliche Systeme sind Exzitonen. Ein Exziton ist ein gebundener Zustand von einem Elektron und einem Loch (einfach positiv geladene Fehlstelle) in einem Festkörper. Berechnen Sie mit dem entsprechend modifizierten Ansatz des Wasserstoffatoms die Ausdehnung (Bohrscher Radius) eines Exzitons im Halbleiter Galliumarsenid (GaAs), sowie die Energie des Grundzustands und des ersten angeregten Zustands.

   Hinweis: In GaAs haben das Elektron und das Loch effektive Massen von $m_e^* = 0.066 m_e$ und $m_h^* = 0.5 m_e$. Die relative dieletrische Permittivität ist $\epsilon_r = 13$.