ÜBUNGSAUFGABEN VI Abgabe am: 14.06.2023, 10:00 Uhr

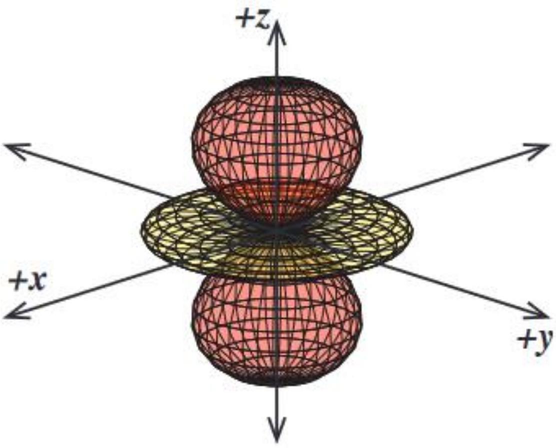
Aufgabe 1: Impulse von Wasserstoff (5 Punkte)

Ein Wasserstoffatom befindet sich in seinem fünften angeregten Zustand (n = 6). Das Atom sendet ein Photon mit einer Wellenlänge von 1096 nm aus.

a) Bestimmen Sie die maximal mögliche Größe des Bahndrehimpulses des Atoms nach der Emission.
b) Was sind die größten und kleinsten Werte der z-Komponente des Bahndrehimpulses (in Einheiten von $\hbar$) für dieses Elektron?
c) Unter der Annahme, dass das Atom ursprünglich stationär war, bestimmen Sie die Rückstoßgeschwindigkeit des Wasserstoffatoms ($m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg), wenn es dieses Photon emittiert. Erklären Sie, warum diese Situation ein Beispiel für die Teilchennatur des Lichts ist.

Aufgabe 2: Kugelflächenfunktionen (4 Punkte)

Der Winkelanteil des 3d (m=0) Orbitals sieht wie folgt aus:



Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Elektron sich in der mittleren Keule aufhält, die um die x/y-Ebene herum zentriert ist (gelber Bereich).

Hinweis: überlegen Sie sich zuerst den Integrationsbereich, der die gelbe Keule begrenzt.

Aufgabe 3: Dynamik im Wasserstoffatom (7 Punkte)

Die Wellenfunktionen von drei Eigenzuständen im Wasserstoffatom sind gegeben durch

$$\psi_{100}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{a_0^{\frac{3}{2}}} \cdot e^{-\frac{r}{a_0}}$$

$$\psi_{210}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{4\sqrt{2}\sqrt{\pi}}\frac{1}{a_0^{\frac{5}{2}}} \cdot r \cdot e^{-\frac{r}{2a_0}} \cdot \cos(\theta)$$

$$\psi_{211}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{8\sqrt{\pi}}\frac{1}{a_0^{\frac{5}{2}}} \cdot r \cdot e^{-\frac{r}{2a_0}} \cdot \sin(\theta)\, e^{i\phi}$$

Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle x\rangle(t)$, $\langle y\rangle(t)$ und $\langle z\rangle(t)$ für die Zustände

a) $|\Psi_a\rangle(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi_{100}\rangle + e^{-i\omega t}|\psi_{210}\rangle\right)$

b) $|\Psi_b\rangle(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi_{100}\rangle + e^{-i\omega t}|\psi_{211}\rangle\right)$

Aufgabe 4: Wellenfunktionen (4 Punkte)

Ermitteln Sie für die dargestellten Wellenfunktionen des Wasserstoffatoms die Haupt- und Nebenquantenzahl n, l und benennen Sie die Orbitale. Die magnetische Quantenzahl ist $m = 0$ für alle drei Beispiele. Die farbigen Flächen stellen die Grenzen dar, wo die Wellenfunktion $\psi_{n,l,m}(r,\theta,\phi)$ einen bestimmten positiven Wert überschreitet (blau) bzw. negativen Wert unterschreitet (orange). D.h. innerhalb der blauen Volumina gilt $\psi_{n,l,m}(r,\theta,\phi) > c$, innerhalb der orangefarbenen $\psi_{n,l,m}(r,\theta,\phi) < -c$. Prinzipiell können bei solcher Darstellung mehrere „verschiedenfarbige“ Volumina ineinander geschachtelt sein, dies ist jedoch bei den gegebenen Beispielen nicht der Fall.

Hinweise: Die Wellenfunktion ist gegeben durch

$$\psi_{n,l,m}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot e^{-\frac{r}{n\,a_0}} \cdot \left(\frac{2r}{na_0}\right)^l \cdot L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2r}{na_0}\right) \cdot Y_l^m(\theta,\phi)$$

Für die Kugelflächenfunktionen gilt $Y_l^m(\theta,\phi) \propto e^{im\phi} \cdot P_l^m\big(cos(\theta)\big)$. Die zugeordneten Laguerre-Polynome $L_{n-l-1}^{2l+1}(r)$ haben $n-l-1$ verschiedene positive Nullstellen. Die zugeordneten Legendre-Polynome $P_l^m(x)$ haben $l-m$ Nullstellen innerhalb des Intervalls $]-1{,}1[$.