

**ÜBUNGSAUFGABEN VIII**

Abgabe am: 28.06.2023, 10:00 Uhr

**Aufgabe 1: Basis aus Eigenfunktionen (4 Punkte)**

Jede beliebige Wellenfunktion lässt sich darstellen als Linearkombination eines vollständigen Satzes orthogonaler Eigenfunktionen:

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Psi_n(x).$$

Das Betragsquadrat der Koeffizienten  $a_n$  entspricht dann der Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung das von  $\Phi(x)$  beschriebene Teilchen im Zustand  $n$  vorzufinden. Zeigen Sie, dass für die Eigenfunktionen gilt

$$a_n = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n^*(x) \Phi(x) dx.$$

**Aufgabe 2: Ionisationsenergie (4 Punkte)**

Schätzen Sie das minimale elektrische Feld ab, das benötigt wird, um ein Elektron aus einem Wasserstoffatom ( $Z=1$ ) zu entfernen - in der Zeit, die es braucht, um einmal den Kern zu umrunden.

**Aufgabe 3: Hyperfeinaufspaltung (7 Punkte)**

Hat ein Atom einen nicht-verschwindenden Kernspin  $I$ , so koppelt dieser an den Gesamtdrehimpuls  $J$  der Elektronenhülle. Diese Kopplung (Wechselwirkung) führt zu einer zusätzlichen Aufspaltung der atomaren Eigenzustände  $\Psi_{n,l,j}$  in mehrere Hyperfeinzustände. Die Hyperfeinenergien  $\Delta E_{HFS}$  dieser Zustände sind durch

$$\Delta E_{HFS} = \frac{A}{2} [f(f+1) - j(j+1) - i(i+1)]$$

gegeben, wobei  $j$  die Drehimpulsquantenzahl des Gesamtdrehimpulses der Elektronenhülle,  $i$  die des Kerns und  $f$  des gesamten Atoms darstellt.

- a) Zeigen Sie, dass für die Energiedifferenz zweier benachbarter Hyperfeinstrukturniveaus gilt

$$\Delta E_{F+1} - \Delta E_F = A(f+1).$$

*Hinweis:* Alle anderen Quantenzahlen sind identisch.

- b) Ein atomarer Zustand mit  $j = 5/2$  zeigt eine Hyperfeinaufspaltung in sechs verschiedene Komponenten. Die gemessene Energiedifferenz benachbarter Komponenten sei  $0.19 \text{ cm}^{-1}$ ,  $0.251 \text{ cm}^{-1}$ ,  $0.318 \text{ cm}^{-1}$ ,  $0.378 \text{ cm}^{-1}$  und  $0.439 \text{ cm}^{-1}$ . Berechnen Sie die Kernspinquantenzahl  $i$  und die Hyperfeinstrukturkonstante  $A$ .

*Hinweis:* Die Wellenzahl  $\tilde{\nu} = 1/\lambda$  (Einheit  $\text{cm}^{-1}$ ) ist eine gängige Einheit in der Spektroskopie. Beachten Sie, dass die gemessenen Werte mit Messfehlern behaftet sind.

- c) Skizzieren Sie die Lage der Hyperfeinniveaus relativ zum unaufgespaltenen Niveau in Einheiten von  $A$ .

**Aufgabe 4: Lamb-Rutherford-Experiment (5 Punkte)**

Als Willis E. Lamb und Robert C. Rutherford 1947 das Spektrum des Wasserstoffatoms untersuchten, entdeckten Sie die sogenannte Lamb-Verschiebung, für deren Entdeckung Lamb 1955 den Nobelpreis erhielt. Skizzieren Sie den Versuchsaufbau und erklären Sie die Versuchsdurchführung. Erläutern Sie den entdeckten Effekt und wie er sich im Versuch zeigte.