

**ÜBUNGSAUFGABEN X**

Abgabe am: 12.07.2023, 10:00 Uhr

**Aufgabe 1: Darstellung von Wellenfunktionen (6 Punkte)**

Zeichnen Sie für die Zustände 1s, 3s und 4d des Wasserstoffatoms den Radialteil der Wellenfunktion  $R_{n,l}(r)$  als Funktion von  $r$  in Einheiten von  $a_0$ . Berechnen Sie dazu die Lage der Nullstellen und Werte der Funktion für  $r = 0$ .

**Aufgabe 2: Zweiniveau-Atom im Strahlungsfeld (6 Punkte)**

Betrachten Sie ein Zweiniveau-Atom, das mit einer zum atomaren Übergang resonanten klassischen elektromagnetischen Welle der Amplitude  $E_0$  wechselwirkt. Der atomare Grundzustand sei  $|g\rangle$ , der angeregte Zustand  $|a\rangle$ . In der sog. Rotating-Wave-Approximation kann der Hamiltonoperator des Systems (Atom + Strahlungsfeld) als

$$\hat{H} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \Omega_0 \\ \Omega_0 & 0 \end{pmatrix}$$

geschrieben werden, wobei die Kopplungsstärke dieser Dipolwechselwirkung durch die Rabi-Frequenz  $\Omega_0 := \frac{-eE_0}{\hbar} \langle a|r|g\rangle$  beschrieben wird.

- Berechnen Sie die beiden Eigenenergien  $\lambda_{1,2}$  sowie die zugehörigen Eigenzustände  $|e_1\rangle$  und  $|e_2\rangle$  in der Basis der atomaren Zustände  $\{|g\rangle, |a\rangle\}$ .
- Geben Sie den Hamiltonoperator in der Basis seiner Eigenzustände an.
- Das Atom sei zum Zeitpunkt  $t = 0$  im Grundzustand  $|\psi(t=0)\rangle = |g\rangle$ . Nun strahlen Sie resonantes Laserlicht ein. Zeigen Sie, dass die zeitliche Dynamik des Zustands durch

$$|\psi(t)\rangle = \cos\left(\frac{\Omega_0 t}{2}\right) |g\rangle - i \sin\left(\frac{\Omega_0 t}{2}\right) |a\rangle$$

gegeben ist. Skizzieren Sie die Besetzungen der beiden atomaren Niveaus  $|g\rangle$  und  $|a\rangle$  als Funktion der Zeit. *Hinweis:* Stellen Sie den Anfangszustand  $|g\rangle$  in der Basis der neuen Eigenzustände  $|e_1\rangle$  und  $|e_2\rangle$  dar.

- In welchem Zustand befindet sich das Atom, wenn die Wechselwirkung nach einer Zeit  $t_p$  abgeschaltet wird, für die die Beziehung  $\Omega_0 \cdot t_p = \pi$  gültig ist?

**Aufgabe 3:** Auswahlregeln atomarer Dipolübergänge (8 Punkte)

Interessiert man sich für die Wechselwirkung von Licht in Form einer klassischen elektromagnetischen Welle  $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \sin(\omega t)$  mit einem Atom, so kann man mit Hilfe des Korrespondenzprinzips die Kopplungsstärke in Dipolnäherung berechnen. Aus der Energie  $W = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}$  eines induzierten klassischen Dipols  $\mathbf{d} = -e \mathbf{r}$  im induzierenden elektrischen Feld  $\mathbf{E}(t)$  erhält man in Analogie dem Wechselwirkungsoperator  $\hat{H} = e \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}(t)$ . Ist das angreifende E-Feld entlang der z-Achse linear polarisiert, so erhält man für den Wechselwirkungsoperator  $\hat{H}' = e \hat{z} E(t)$ .

Für zwei atomare Niveaus  $a$  und  $b$  mit den Eigenzuständen  $|\psi_a\rangle$  und  $|\psi_b\rangle$  lässt sich dieser als

$$\hat{H}' = e \hat{z} E(t) = (d_{ab} |\psi_a\rangle \langle \psi_b| + d_{ba} |\psi_b\rangle \langle \psi_a|) E(t)$$

Schreiben, wobei  $d_{ab} = d_{ba}^* = -e \langle \psi_a | \hat{z} | \psi_b \rangle$  das Matrixelement des elektrischen Dipolmoments entlang  $z$ , und  $E(t)$  das elektrische Feld am Ort des Atoms ist. Die Kopplungsstärke eines Dipolübergangs zwischen den Zuständen  $|\psi_a\rangle \rightarrow |\psi_b\rangle$  wird so durch das Dipolmatrixelement  $d_{ab}$  bestimmt.

- a) Berechnen Sie die vier Dipolmatrixelemente für die Übergänge  $1s(n=1, l=0, m_l=0) \rightarrow 2s(n=2, l=0, m_l=0)$  und  $1s(n=1, l=0, m_l=0) \rightarrow 2p(n=2, l=1, m_l=0, \pm 1)$  eines Wasserstoffatoms unter Vernachlässigung der Fein- und Hyperfeinstruktur.

*Hinweis:* Es werden nur Matrixelemente von  $z = r \cos(\theta)$  benötigt. Außerdem kann man die Rechenzeit beim Lösen der Integrale durch geschicktes Ausnutzen von Symmetrieüberlegungen enorm verkürzen.

- b) Skizzieren Sie das Levelschema und kennzeichnen Sie die in a) berechneten Übergänge.