

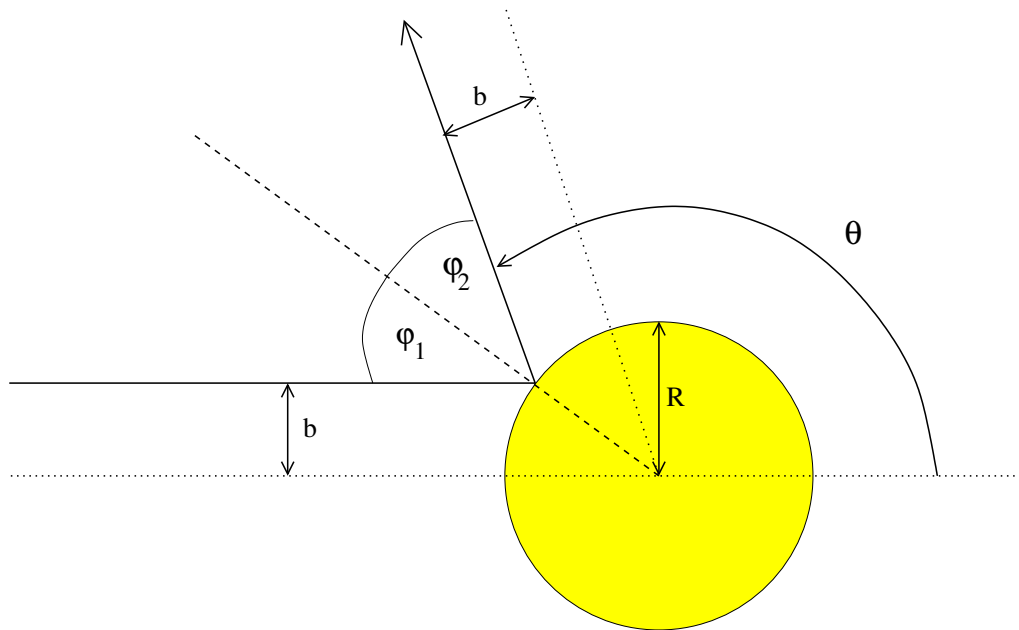
Übungen zu
Moderne Experimentalphysik II, Teil 2
(Kern- und Teilchenphysik)
Wintersemester 2023/24

Übungsblatt Nr. 4: Musterlösungen

Vervielfältigung und Veröffentlichung nicht gestattet!

Aufgabe 1: Streuung an einer Kugel: Wirkungsquerschnitt

a) (1 Punkt)



b) (1 Punkt) Der Drehimpuls $L_1 = |\vec{r}_1 \times \vec{p}_1|$ vor dem Stoß muss gleich dem Drehimpuls L_2 nach dem (elastischen) Stoß sein:

$$\begin{aligned} L_1 &= L_2 \\ \Rightarrow p R \sin \phi_1 &= p R \sin \phi_2 \\ \Rightarrow \phi_1 &= \phi_2 := \phi \end{aligned}$$

- c) (2 Punkt) Aus der Skizze ist zu sehen, dass $\phi = (\pi - \theta)/2$ ist. Damit ergibt sich für den Stoßparameter b :

$$b = R \sin \phi = R \sin \frac{\pi - \theta}{2} = R \cos \frac{\theta}{2}$$

Die Ableitung nach θ ist:

$$\frac{db}{d\theta} = -\frac{R}{2} \sin \frac{\theta}{2}$$

Die differentielle Fläche, an der die Teilchen mit einem Winkel θ gestreut werden, ist $d\sigma = 2\pi b db$. Das entsprechende differentielle Raumwinkelement ist $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$. Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist also:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \theta} \cdot \left| \frac{db}{d\theta} \right| = \frac{R \cos \frac{\theta}{2}}{\sin \theta} \cdot \frac{R}{2} \sin \frac{\theta}{2}$$

Mit $\sin \theta = 2 \sin \theta/2 \cos \theta/2$ ergibt sich:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R^2}{4} \quad (1)$$

- d) (1 Punkt) Durch Integration über den Raumwinkel erhält man den totalen Wirkungsquerschnitt:

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{R^2}{4} \int d\Omega = \frac{R^2}{4} \cdot 4\pi = \pi R^2 \quad (2)$$

Dies entspricht der Querschnittsfläche der Kugel.

- e) (1 Punkt) In der Rechnung muss überall R durch $(r + R)$ ersetzt werden, da dies dem neuen Mindestabstand entspricht. Dann erhält man:

$$\sigma = \pi(r + R)^2. \quad (3)$$

Dies entspricht der Streuung eines punktförmigen Teilchens an einer Kugel mit dem Gesamtradius $r + R$.

- f) (1 Punkt) Der geometrische Wirkungsquerschnitt beträgt mit der Formel aus dem vorigen Aufgabenteil:

$$\sigma_{\text{pp,geom.}} = \pi \cdot 4r_p^2 = 8,87 \times 10^{-30} \text{ m}^2 = 88,7 \text{ mb}. \quad (4)$$

Die sich hieraus ergebende Ereigniszahl ist:

$$N = \sigma_{\text{pp,geom.}} \mathcal{L} = 2,78 \times 10^{14}. \quad (5)$$

- g) (2 Punkte) Hier ist in der Aufgabe leider ein kleiner Fehler unterlaufen. Der tatsächliche Wirkungsquerschnitt beträgt ungefähr 60 pb. Die in der Aufgabenstellung angegebenen 60 fb entsprechen eher dem Wirkungsquerschnitt der

Produktion von Higgs-Bosonen, welche über eine W oder t Schleife in 2 Photonen zerfallen. Dieser Prozess ist zwar aufgrund der Schleife stark unterdrückt, aber wegen des gut bestimmten Untergrunds dennoch wichtig für die Higgs-Vermessung. Die Punkte können hier bei entsprechend richtiger Rechnung unabhängig von dem gewählten Wirkungsquerschnitt gegeben werden. Im Folgenden wird mit dem korrekten Wirkungsquerschnitt von 60 pb gerechnet: Die Wahrscheinlichkeit ergibt sich aus dem Verhältnis der Wirkungsquerschnitte:

$$P(\text{Higgs Event}|\text{pp Kollision}) = \frac{\sigma_{\text{H}}}{\sigma_{\text{pp,geom.}}} = 0,67 \times 10^{-9} \approx 1 : 10^9 \quad (6)$$

Das Beispiel sollte das Größenverhältnis korrekt widerspiegeln. Der Fantasie sollten hier keine Grenzen gesetzt sein. Mögliche Beispiele sind:

- Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Personen jeweils einen beliebigen Baum (mit mehr als 7 cm Durchmesser in einer Höhe von 1.3 m) in Baden-Württemberg aussuchen und dabei zufällig denselben wählen.
- Zufällig eine bestimmte 100-Dollar-Note erhalten.
- Eine Nadel in einem Heuhaufen finden, dessen Größe sich wie folgt abschätzen lässt: Zunächst wird angenommen, dass die Dichte von lose gepresstem Heu ca. 100 kg/m^3 beträgt. Ferner wird die Masse eines Heuhalms mit ca. 2 g abgeschätzt. Dann ergibt sich:

$$V = \frac{Nm}{\rho} = 2 \times 10^4 \text{ m}^3. \quad (7)$$

Um dies noch weiter zu veranschaulichen, ein typisches 50m Olympiaschwimmbecken hat ein Volumen von $50 \times 25 \times 2 \text{ m}^3 = 2.5 \times 10^3 \text{ m}^3$. Entsprechend könnten 16 dieser Schwimmbecken gefüllt werden.

Aufgabe 2: Rutherford-Streuung

- a) (2 Punkte) Rutherford führte zu Beginn des 20. Jahrhunderts mit Hilfe von Geiger und Marsden seine Streuversuche an der Universität Manchester durch. Die wesentlichen zwei Beobachtungen, die sie dabei machten, sind:

- Es gibt Vorwärtsstreuung, viele α -Teilchen passieren die Goldfolie **ohne Ablenkung**.
- Die Streuung tritt mit großen Winkeln auf, sogar Rückstreuung wurde beobachtet.

Die gemachten Beobachtungen stehen im Widerspruch zu dem was man aus dem Thomson-Atommodell erwartet hätte. In diesem, auch "Rosinenkuchen"

genannten Modell, besteht das Atomvolumen aus gleichmäßig verteilten negativen und positiven Ladungen: Ein positiv geladener “Klumpen” mit darin eingebetteten negativen Ladungen. In solch einem Modell würde die elastische Streuung das Verhalten der α -Teilchen bestimmen und da diese viel schwerer als die Streuzentren (negative Ladungen, also Elektronen) wären, würde man Ablenkwinkel nicht größer als 90° erwarten. Dies steht im Widerspruch zu den von Rutherford beobachteten großen Streuwinkeln. Rutherford schloss aus seinen Beobachtungen, dass das Atom aus einem positiv geladenen massiven Kern besteht, der von einer Elektronenwolke umgeben ist. Der Kern musste schwer sein, aber nur einen Bruchteil des Volumens einnehmen, so lässt sich erklären, dass ein Großteil der α -Teilchen die Goldfolie ablenkungsfrei passiert, einige wenige Teilchen aber auch unter teils sehr großen Winkeln gestreut werden, bis hin zur Rückstreuung.

b) (2 Punkte) Folgende Werte sind gegeben:

Energie der α -Teilchen: $E_\alpha = 27 \text{ MeV}$

Stromstärke: $I_0 = 2 \text{ nA}$

Ladungszahl der α -Teilchen: $z = 2$

Massenbelegung: $dM/dA = 2 \text{ mg/cm}^2$

Masse eines Goldkerns: $m_{\text{Au}} = 197 \text{ u}$ ($A = 197$, $u = 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}$)

Streuwinkel: $\theta = 60^\circ$

Abstand des Zählers: $r = 20 \text{ cm}$

Aktive Fläche: $A = 4 \text{ cm}^2$

Zusätzlich benötigt man noch:

Kernladungszahl eines Goldkerns: $Z = 79$

Permittivität: $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$

Elementarladung: $e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Streuung von α -Teilchen an Goldatomen ist durch die Rutherford-Streuformel gegeben:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 e^4}{64\pi^2 \epsilon_0^2 E_\alpha^2 \sin^4 \theta/2}$$

Die Anzahl der Goldatome pro Fläche ist gegeben durch:

$$\frac{dN_{\text{Au}}}{dA} = \frac{1}{m_{\text{Au}}} \frac{dM}{dA}$$

Der vom Zähler abgedeckte Raumwinkel $\Delta\Omega$ ist:

$$\Delta\Omega = \frac{A}{r^2}$$

Aus dem im Zähler registrierten Strom I

$$I = I_0 \cdot \frac{dN_{\text{Au}}}{dA} \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega} \cdot \Delta\Omega$$

ergibt sich folgende Rate:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{I}{q} = \frac{I_0}{2em_{\text{Au}}} \cdot \frac{dM}{dA} \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega} \cdot \frac{A}{r^2} = 271 \text{ Hz}$$

c) (1 Punkt) Es gilt:

$$\begin{aligned} r_{\min}(\theta) &= \frac{zZe^2}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{E_\alpha} \cdot \left[1 + \frac{1}{\sin \theta/2} \right] = R(\alpha) + R(\text{Au}) = r_0 \cdot (A_\alpha^{1/3} + A_{\text{Au}}^{1/3}) \\ &= 12.5 \text{ fm} \\ \Rightarrow r_0 &= \frac{\frac{zZe^2}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{E_\alpha} \cdot \left[1 + \frac{1}{\sin \theta/2} \right]}{A_\alpha^{1/3} + A_{\text{Au}}^{1/3}} = 1.7 \text{ fm} \\ \Rightarrow R(\text{Au}) &= r_0 \cdot A_{\text{Au}}^{1/3} = 9.9 \text{ fm} \end{aligned}$$

Aufgabe 3: Formfaktor

Je (2 Punkte) für Teil a) und b), je (1 Punkt) für die Teile c-e).

a) Der Formfaktor ist für eine auf 1 normierte Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ definiert als

$$F(\vec{q}) = \int \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}/\hbar} d^3r.$$

Für die Integration werden hier Kugelkoordinaten verwendet. Dabei wird die z -Achse ($\theta = 0$) in Richtung von $\vec{q}$ gewählt, so dass $\vec{q} \cdot \vec{r} = qr \cos \theta$ ist:

$$\begin{aligned} F(\vec{q}) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \rho(r) e^{iqr \cos \theta/\hbar} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (\text{Subst. } x = \cos \theta) \\ &= -2\pi \int_{-1}^1 \int_0^\infty \rho(r) e^{iqr x/\hbar} r^2 dr dx \\ &= 2\pi \int_0^\infty \rho(r) \left[\frac{\hbar}{iqr} e^{iqr x/\hbar} \right]_{-1}^1 r^2 dr \\ &= 2\pi \int_0^\infty \rho(r) \frac{\hbar}{iqr} (e^{iqr/\hbar} - e^{-iqr/\hbar}) r^2 dr \\ &= 4\pi \int_0^\infty \rho(r) \frac{\sin(qr/\hbar)}{qr/\hbar} r^2 dr \end{aligned} \tag{8}$$

b) Da das Volumen einer Kugel mit Radius R gleich $\frac{4}{3}\pi R^3$ ist, ist die normierte Ladungsverteilung einer homogen geladenen Kugel gegeben durch:

$$\rho(r) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi R^3} & \text{für } r \leq R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases}$$

Daraus folgt nach Gleichung 8 für den Formfaktor:

$$\begin{aligned}
F(q) &= 4\pi \frac{3}{4\pi R^3} \int_0^R \frac{\sin(qr/\hbar)}{qr/\hbar} r^2 dr \\
&= \frac{3\hbar}{qR^3} \int_0^R r \sin(qr/\hbar) dr \\
&= \frac{3\hbar}{qR^3} \left(\left[-r \frac{\hbar}{q} \cos(qr/\hbar) \right]_0^R - \int_0^R -\frac{\hbar}{q} \cos(qr/\hbar) dr \right) \\
&= \frac{3\hbar^2}{q^2 R^3} \left[-r \cos(qr/\hbar) + \frac{\hbar}{q} \sin(qr/\hbar) \right]_0^R \\
&= \frac{3\hbar^2}{q^2 R^3} \left(-R \cos(qR/\hbar) + \frac{\hbar}{q} \sin(qR/\hbar) \right) \\
&= \frac{3\hbar^3}{q^3 R^3} (\sin(qR/\hbar) - qR/\hbar \cdot \cos(qR/\hbar)) \\
F(x) &= \frac{3}{x^3} (\sin x - x \cos x) \quad \text{mit} \quad x = \frac{qR}{\hbar}
\end{aligned}$$

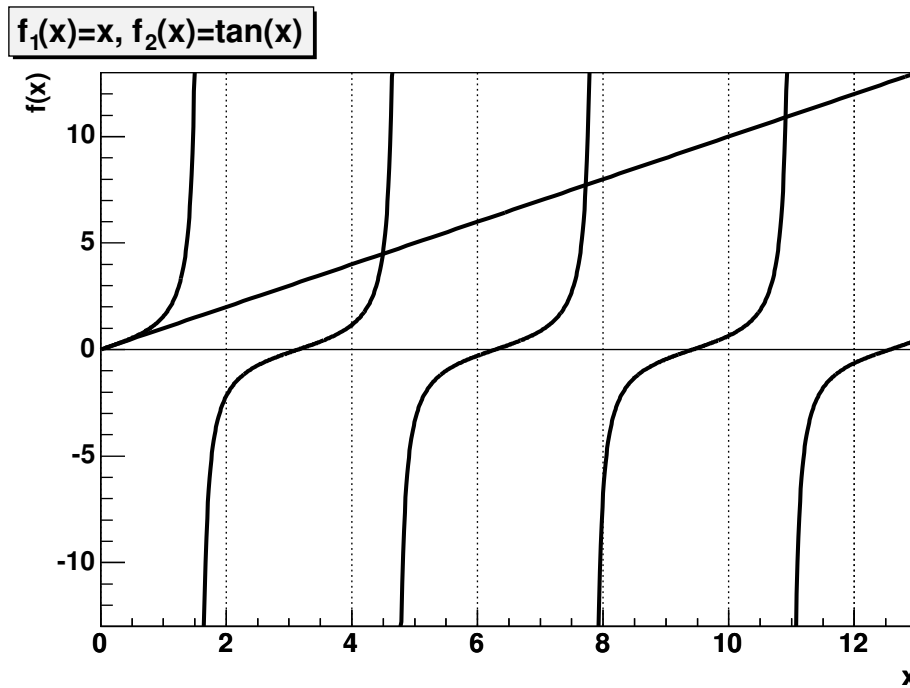
c) $F(q=0)$ lässt sich durch Taylorentwicklung von $\sin x$ und $\cos x$ berechnen:

$$\begin{aligned}
F(q=0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^3} (\sin x - x \cos x) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^3} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^5) - x \cdot \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \mathcal{O}(x^4) \right] \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^3} \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{2} + \mathcal{O}(x^5) \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} 3 \left(\frac{1}{3} + \mathcal{O}(x^5) \right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

d) Aus $F(x) = 0$ folgt:

$$\sin x - x \cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \tan x$$

Aus den Schnittpunkten der Funktionen $f_1(x) = x$ und $f_2(x) = \tan x$ lassen sich also die Nullstellen von $F(x)$ bestimmen.



Numerisch können die Nullstellen z.B. mit dem Newton-Verfahren bestimmt werden:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\sin x_n - x_n \cos x_n}{\cos x_n - \cos x_n + x_n \sin x_n} = x_n - 1/x_n + \cot x_n$$

Für die Startwerte 5, 7 und 11 (aus der graphischen Darstellung) ergeben sich nach drei Iterationen folgende Nullstellen:

$$\begin{aligned} x_1 &= 4.493 \\ x_2 &= 7.725 \\ x_3 &= 10.904 \end{aligned}$$

e) Aus $x = qR/\hbar$ folgt für $p \gg mc$:

$$R = \frac{\hbar}{q} \cdot x = \frac{\hbar c}{2pc \sin \theta/2} \cdot x = \frac{\hbar c}{2E \sin \theta/2} \cdot x$$

Der Zusammenhang

$$q = 2pc \sin \theta/2$$

wird im Povh (in der KIT Bib online verfügbar hier) auf Seite 63 hergeleitet. Da die lokalen Minima des Wirkungsquerschnitts den Nullstellen von $F(x)$ entsprechen, lässt sich aus ihnen der Radius R bestimmen.

Für ^{40}Ca :

$$\begin{aligned} \theta_1 = 18^\circ &\Rightarrow R_1 = 3.78 \text{ fm} \\ \theta_2 = 31^\circ &\Rightarrow R_2 = 3.80 \text{ fm} \\ \theta_3 = 47^\circ &\Rightarrow R_3 = 3.60 \text{ fm} \end{aligned}$$

Für ^{48}Ca :

$$\begin{aligned} \theta_1 = 17^\circ &\Rightarrow R_1 = 4.00 \text{ fm} \\ \theta_2 = 30^\circ &\Rightarrow R_2 = 3.93 \text{ fm} \\ \theta_3 = 45^\circ &\Rightarrow R_3 = 3.75 \text{ fm} \end{aligned}$$

Als mittleren Radius erhält man $R = 3.73$ fm für ^{40}Ca und $R = 3.89$ fm für ^{48}Ca .