

Übungen zu Moderne Experimentalphysik II, Teil 2 (Kern- und Teilchenphysik) Wintersemester 2023/24

Übungsblatt Nr. 5: Musterlösungen

Vervielfältigung und Veröffentlichung nicht gestattet!

Aufgabe 1: Erhaltungssätze und Wechselwirkungen

Erhaltungssätze gelten für

- a) **(0,5 Punkte)** pro Teilaufgabe, sodass sich insgesamt **(3 Punkte)** ergeben.
S = starke WW, E = elektromagnetischer Teil (oder Photonenaustausch) der elektroschwachen WW, W = schwacher Teil (oder W/Z-Austausch) der elektroschwachen WW.
- i) Leptonzahlerhaltung: S, E, W
 - ii) Leptonenfamilienzahlerhaltung: S, E, (W nur bei masselosen Neutrinos)
 - iii) Erhaltung des starken Isospins T_3 : S, E
W nicht, da z.B. der Zerfall des Neutrons über die schwache Wechselwirkung einer Änderung des starken Isospins entspricht.
 - iv) Erhaltung der Strangeness S : S, E
Die schwache Ww kann den Quark-Flavor ändern, also W nicht.
 - v) Paritäts-Erhaltung: S, E
Schwache Ww. ist maximal paritätsverletzend.
 - vi) CP-Erhaltung: S, E, und in guter Näherung aber nicht exakt in W (z.B. ca. 0.2% CP-verletzende Zerfälle des K_L -Mesons). Diskutieren Sie in der Übung, warum die CP-Verletzung der schwachen Wechselwirkung relevant ist (Materieüberschuss im Universum).
- b) Je **(0,5 Punkte)** pro Prozess, also **(2 Punkte)** insgesamt.
- i) erlaubt
 - ii) nicht erlaubt, da Baryonzahl verletzt

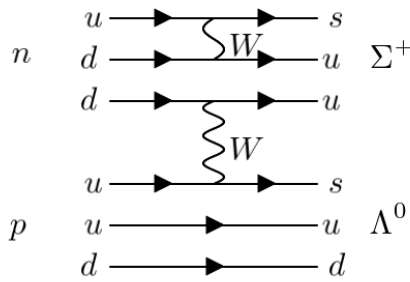


Abbildung 1: Feynman-Diagramm des Übergangs von Proton und Neutron zu Λ^0 und Σ^+ .

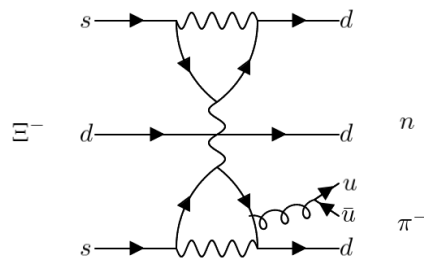


Abbildung 2: Feynman-Diagramm des Übergangs eines Ξ^- in ein Neutron und Pion.

- iii) nicht in erster Ordnung erlaubt, da $|\Delta S| = 2$ und $|\Delta T_3| = 1$. (In höherer Ordnung allerdings schon, d.h. wenn mehrere Interaktionen erlaubt sind, kann der Prozess durch gleichzeitigen Austausch von 2 W-Bosonen stattfinden. Ein Beispiel-Feynman-Diagramm in niedrigstmöglicher Ordnung ist in Abb. 1 dargestellt. Punkte gibt es hierfür allerdings nur bei entsprechender Begründung.)
- iv) nicht erlaubt, da T_3 und Topness nicht erhalten (stark unterdrückt möglich durch $\bar{u} \rightarrow W^- + \bar{d} \rightarrow \bar{t}$)
- c) Je **(0,5 Punkte)** pro Prozess, also **(3 Punkte)** insgesamt.
 - i) nicht erlaubt, da Leptonenzahl verletzt
 - ii) erlaubt
 - iii) nicht erlaubt, da Energie nicht erhalten
 - iv) nicht erlaubt, da $|\Delta S| = 2$ und $|\Delta T_3| = 1$. (Auch hier wieder Prozess in höherer Ordnung erlaubt, Punkte dafür allerdings nur bei Begründung, dass zwei W-Bosonen benötigt werden. Solche Prozesse sind sehr stark unterdrückt aber durch sog. Pinguin-Diagramme möglich, siehe Abb. 2.)
 - v) nicht erlaubt, da Lepton und Baryonzahl nicht erhalten
 - vi) in starker WW nicht erlaubt, da $\Delta S = 1$ und $T_3 = -1/2$, allerdings in der schwachen WW möglich (siehe Hinweis auf Übungsblatt).

Aufgabe 2: Pion-Zerfall

- a) (**1 Punkt**) Maximal verletzend bedeutet in diesem Zusammenhang, dass W-Bosonen ausschließlich mit linkshändigen Teilchen und rechtshändigen Antiteilchen wechselwirken. Wenn die Parität in geladenen Strömen der schwachen Wechselwirkung bereits maximal verletzt ist, so muss das gleiche für die Ladungskonjugation gelten. Durch Ladungskonjugation werden nämlich nur aus Teilchen Antiteilchen und umgekehrt - die Händigkeit wird hingegen nicht verändert. Somit ist beispielsweise die Kopplung eines W-Bosons an ein linkshändiges Neutrino erlaubt, nach Ladungskonjugation wird daraus allerdings ein linkshändiges Antineutrino, welches aufgrund der maximalen Paritätsverletzung der schwachen Wechselwirkung nicht an ein W-Boson (unabhängig von dessen Ladung) koppeln kann. Die gemeinsame Anwendung einer Ladungskonjugation und Paritätsoperation macht hingegen aus einem linkshändigen Teilchen ein rechtshändiges Antiteilchen und ist somit nicht aus diesem Grund verboten. Nichtsdestotrotz wurde von u.a. Cronin und Fitch gefunden, dass die schwache Wechselwirkung nicht CP-invariant ist. Im Gegensatz zur C- und P-Invarianz ist diese Invarianz allerdings nicht maximal ausgeprägt.
- b) (**2 Punkte**) Ziel des Wu-Experiments war die Überprüfung der Paritätsinvarianz der schwachen Wechselwirkung. Dazu wurde eine Probe aus ^{60}Co in einem Magnetfeld so heruntergekühlt, dass die Kernspins eine Vorzugsrichtung erhielten. Die z-Komponente des Kernspins beträgt dabei in natürlichen Einheiten +5. ^{60}Co zerfällt über den β -Zerfall in ^{60}Ni (Spin +4), sowie ein Elektron und ein Elektron-Antineutrino. Aufgrund der Gesamtdrehimpulserhaltung müssen die Spins von Elektron und Neutrino (jeweils $+\frac{1}{2}$) in dieselbe Richtung zeigen. Wegen der Impulserhaltung müssen deren Impulse hingegen in unterschiedliche Richtungen weisen. Mit der Definition der Helizität als Projektion des Spins auf den Impuls $\vec{s} \cdot \vec{p}$ folgt, dass stets eines der beiden Teilchen linkshändig und das andere rechtshändig ist. Es wurde beobachtet, dass die bevorzugt Elektronen entgegengesetzt der durch das Magnetfeld festgelegten Spin-Ausrichtung der Kobalt-Kerne freigesetzt wurden. Dies widerspricht der Hypothese, dass die Parität erhalten ist, da bevorzugt linkshändige Elektronen freigesetzt wurden. Als Skizze kann der Aufbau des Wu-Experiments oder auch die Spinkonfiguration gewählt werden. Beispiele finden sich im Internet, z.B. auf Wikipedia.
- c) (**1 Punkt**) Der Zerfall im Ruhesystem des Pions ist in Abb. 3 dargestellt. Der Zerfall findet über die schwache Wechselwirkung statt. Das W^+ -Boson koppelt nur an linkshändige Teilchen und rechtshändige Antiteilchen (Paritätsverletzung). Das Neutrino wird als masselos angesehen, daher entspricht die Chiralität (linkshändig) hier der Helizität (Spin- und Impulsrichtung entgegengesetzt). Das geladene Lepton hat die gleiche Helizität, ist aber aufgrund

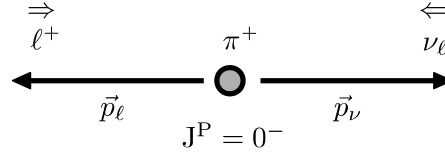


Abbildung 3: Zerfall eines π^+ in ein geladenes Lepton und ein Neutrino. Die Pfeile über den Teilchennamen geben die Spinrichtung an, welche bei den Zerfallsteilchen entgegengesetzt sein muss aufgrund der Spinerverhaltung, die Pfeile darunter geben die Impulsrichtung an.

seiner Masse nicht automatisch auch linkshändig, sondern besitzt auch einen rechtshändigen Anteil. Dies folgt aus der Lorentztransformation von Dirac-Spinoren:

$$\begin{aligned} |\psi_{h=-1}\rangle &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{p}{E+m} \right) |\psi_L\rangle + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{p}{E+m} \right) |\psi_R\rangle \\ &\approx \frac{1}{2} (1 + \beta) |\psi_L\rangle + \frac{1}{2} (1 - \beta) |\psi_R\rangle . \end{aligned}$$

Falls $m \rightarrow 0$, folgt daraus $\beta \rightarrow 1$ und damit der oben beschriebene Fall beim Neutrino. Aus obiger Gleichung folgt für das geladene Lepton, dass der entsprechend notwendig rechtshändige Anteil für das W-Boson umso größer wird, je langsamer sich das geladene Lepton bewegt. Entsprechen ist der Zerfall in Myonen häufiger als in Positronen aufgrund der höheren Masse der Myonen. Dies widerspricht etwas der Erwartung, da das Phasenraumelement bei Fermis Goldener Regel für Positronen größer ist als für Myonen.

d) (**1 Punkt**) Energie- und Impulserhaltung im Ruhesystem des Pions:

$$\begin{aligned} E_\pi &= m_\pi = E_\ell + E_\nu \\ p &= p_\ell = p_\nu \end{aligned}$$

Daraus folgt für den Impuls:

$$\begin{aligned} m_\pi &= p + \sqrt{p^2 + m_\ell^2} \\ (m_\pi - p)^2 &= p^2 + m_\ell^2 \\ m_\pi^2 - 2m_\pi p + p^2 &= p^2 + m_\ell^2 \\ p &= \frac{m_\pi^2 - m_\ell^2}{2m_\pi} . \end{aligned}$$

Und für die Energie:

$$\begin{aligned}
E &= \sqrt{p^2 + m_\ell^2} \\
&= \frac{1}{2m_\pi} \sqrt{m_\pi^4 - 2m_\pi^2 m_\ell^2 + m_\ell^4 + 4m_\pi^2 m_\ell^2} \\
&= \frac{1}{2m_\pi} \sqrt{(m_\pi^2 + m_\ell^2)^2} \\
&= \frac{m_\pi^2 + m_\ell^2}{2m_\pi}.
\end{aligned}$$

e) (**2 Punkte**) Aus den Ergebnissen aus der d) folgt

$$\beta_f = \frac{p}{E_\ell} = \frac{m_\pi^2 - m_\ell^2}{m_\pi^2 + m_\ell^2},$$

und damit

$$\begin{aligned}
\frac{|\mathcal{M}_{\pi \rightarrow e \nu}|^2}{|\mathcal{M}_{\pi \rightarrow \mu \nu}|^2} &\propto \frac{1 - \beta_e}{1 - \beta_\mu} \\
&\propto \frac{1 - \frac{m_\pi^2 - m_e^2}{m_\pi^2 + m_e^2}}{1 - \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{m_\pi^2 + m_\mu^2}} \\
&\propto \frac{\frac{m_\pi^2 + m_e^2}{m_\pi^2 + m_e^2} - \frac{m_\pi^2 - m_e^2}{m_\pi^2 + m_e^2}}{\frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{m_\pi^2 + m_\mu^2} - \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{m_\pi^2 + m_\mu^2}} \\
&\propto \frac{\frac{2m_e^2}{m_\pi^2 + m_e^2}}{\frac{2m_\mu^2}{m_\pi^2 + m_\mu^2}} \\
&\propto \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \cdot \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{m_\pi^2 + m_e^2}.
\end{aligned}$$

f) (**3 Punkte**) Aufgrund des Zweikörperzerfalls lässt sich der Phasenraumfaktor schreiben als:

$$\begin{aligned}
\rho_f &= \frac{d}{dE_f} \int \frac{d^3 \vec{p}_f d^3 \vec{x}_f}{(2\pi)^3} \\
&= \frac{d}{dE_f} \int \frac{d^3 \vec{p}_\ell d^3 \vec{x}_\ell}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \vec{p}_\nu d^3 \vec{x}_\nu}{(2\pi)^3} \delta^3(\vec{p}_\ell + \vec{p}_\nu) \\
&\propto p_\ell^2 \frac{dp_\ell}{dE_f},
\end{aligned}$$

wobei $E_f = m_\pi$, da das Pion in Ruhe ist und somit die Masse des Pions die

gesamte für den Endzustand verfügbare Energie ist. Ausrechnen liefert

$$\begin{aligned}
\rho_f &\propto p^2 \frac{dp}{dE_f} \\
&= p^2 \frac{dp}{dm_\pi} \\
&= \left(\frac{m_\pi^2 - m_\ell^2}{2m_\pi} \right)^2 \frac{d}{dm_\pi} \left(\frac{m_\pi^2 - m_\ell^2}{2m_\pi} \right) \\
&= \frac{(m_\pi^2 - m_\ell^2)^2}{4m_\pi^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{m_\ell^2}{2m_\pi^2} \right) \\
&= \frac{(m_\pi^2 - m_\ell^2)^2 \cdot (m_\pi^2 + m_\ell^2)^2}{8m_\pi^4},
\end{aligned}$$

womit man nach Einsetzen der entsprechenden Größen für Elektronen/Positronen und Myonen auf die geforderte Relation kommt:

$$\frac{\rho_e}{\rho_\mu} = \left(\frac{m_\pi^2 - m_e^2}{m_\pi^2 - m_\mu^2} \right)^2 \cdot \left(\frac{m_\pi^2 + m_e^2}{m_\pi^2 + m_\mu^2} \right).$$

g) (**2 Punkte**) Das Verhältnis der Zerfallsbreiten ist dann einfach:

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma(\pi^+ \rightarrow e^+ \nu)}{\Gamma(\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu)} &= \frac{|\mathcal{M}_{\pi \rightarrow e \nu}|^2 \cdot \rho_e}{|\mathcal{M}_{\pi \rightarrow \mu \nu}|^2 \cdot \rho_\mu} \\
&= \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \cdot \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{m_\pi^2 + m_e^2} \cdot \left(\frac{m_\pi^2 - m_e^2}{m_\pi^2 - m_\mu^2} \right)^2 \cdot \left(\frac{m_\pi^2 + m_e^2}{m_\pi^2 + m_\mu^2} \right) \\
&= \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \cdot \left(\frac{m_\pi^2 - m_e^2}{m_\pi^2 - m_\mu^2} \right)^2.
\end{aligned}$$

Mit den Zahlenwerten aus der Aufgabe folgt ein Wert von

$$\frac{\Gamma(\pi^+ \rightarrow e^+ \nu)}{\Gamma(\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu)} = \frac{|\mathcal{M}_{\pi \rightarrow e \nu}|^2 \cdot \rho_e}{|\mathcal{M}_{\pi \rightarrow \mu \nu}|^2 \cdot \rho_\mu} = 1.283 \times 10^{-4},$$

was noch ganz gut mit dem gemessenen Wert von $(1.2327 \pm 0.0023) \times 10^{-4}$ [?] übereinstimmt.