

Übungen zu Moderne Experimentalphysik II, Teil 2 (Kern- und Teilchenphysik) Wintersemester 2023/24

Übungsblatt Nr. 6

Abgabe bis 06.02.2024

Tutorium: 08.02.2024

Saalübung: 07.02.2024

Link zur ILIAS-Hauptseite:

https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_2198626&client_id=produktiv

In diesem Übungsblatt geht es um die Oszillationen von neutralen Kaonen und B-Mesonen sowie einen Teil der CP-Verletzung. Außerdem wird ein Quarkonium-Zustand näher betrachtet.

Aufgabe 1: K^0 - und B^0 -Oszillation

(2+2+2+1+2=9 Punkte)

Zum Zeitpunkt $t = 0$ werden am Ort $x = 0$ $N_0 = 10000$ K^0 -Mesonen erzeugt, die sich mit einem Impuls von $p = p_x = 1$ GeV/c durch das Vakuum bewegen. Durch Prozesse zweiter Ordnung der schwachen Wechselwirkung wird aus dem reinen K^0 -Strahl für Zeiten $t > 0$ eine Mischung aus K^0 - und $\bar{K}^0$ -Mesonen. Im Folgenden soll die CP-Verletzung vernachlässigt werden, d.h. $|K_S^0\rangle \equiv |K_1^0\rangle$ und $|K_L^0\rangle \equiv |K_2^0\rangle$.

- a) Zeigen Sie, dass die Anzahl von K_S^0 -, K_L^0 -, K^0 - und $\bar{K}^0$ -Mesonen als Funktion der Zeit t im Kaon-Ruhesystem gegeben ist durch ($\hbar = c = 1$):

$$\begin{aligned} N_{K_S^0}(t) &= \frac{N_0}{2} e^{-\Gamma_S t} \\ N_{K_L^0}(t) &= \frac{N_0}{2} e^{-\Gamma_L t} \\ N_{K^0}(t) &= \frac{N_0}{4} [e^{-\Gamma_S t} + e^{-\Gamma_L t} + 2 \cos(\Delta m t) e^{-\Gamma t}] \\ N_{\bar{K}^0}(t) &= \frac{N_0}{4} [e^{-\Gamma_S t} + e^{-\Gamma_L t} - 2 \cos(\Delta m t) e^{-\Gamma t}] \end{aligned}$$

mit

$$\Delta m = |m_S - m_L| \quad , \quad \Gamma_{S/L} = \frac{1}{\tau_{S/L}} \quad , \quad \Gamma = \frac{\Gamma_S + \Gamma_L}{2}$$

Dabei ist $m_{S/L}$ die Masse und $\tau_{S/L}$ die Lebensdauer von K_S^0 - bzw. K_L^0 -Mesonen.

Verwenden Sie für die Herleitung folgenden Ansatz für die Wellenfunktion von K_S^0 - bzw. K_L^0 -Mesonen

$$|K_{S/L}^0\rangle(t) = A_{S/L} \cdot e^{-im_{S/L}t} \cdot e^{-\Gamma_{S/L}t/2}$$

mit $A_{S/L}$ als konstantem Normierungs- und Phasenfaktor.

- b) Stellen Sie die Anzahl von K_S^0 -, K_L^0 -, K^0 - und $\bar{K}^0$ -Mesonen grafisch dar für das Zeitintervall von 0 bis $2 \cdot 10^{-9}$ s. Welcher Flugstrecke der Kaonen entspricht dieser Zeitraum? Verwenden Sie $\Delta m = 5,3 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$.
- c) Wie K^0 -Mesonen können auch B^0 - und B_s^0 -Mesonen über die schwache Wechselwirkung in ihre Antiteilchen oszillieren. Ein B^0 -Meson ist ein gebundener Zustand aus einem Down-Quark und einem Bottom-Antiquark ($d\bar{b}$), ein B_s^0 -Meson besteht aus einem Strange-Quark und einem Bottom-Antiquark ($s\bar{b}$). Zeichnen Sie die Feynman-diagramme für B^0 - und B_s^0 -Oszillation.
- d) Für B^0 - und B_s^0 -Mesonen ist näherungsweise $\tau := \tau_S = \tau_L = 1,5 \cdot 10^{-12}$ s. Geben Sie die Anzahl von B^0 - und $\bar{B}^0$ - bzw. B_s^0 - und $\bar{B}_s^0$ -Mesonen sowie die Asymmetrie

$$A(t) = \frac{N_{B^0}(t) - N_{\bar{B}^0}(t)}{N_{B^0}(t) + N_{\bar{B}^0}(t)}$$

als Funktion der Zeit t an. Nehmen Sie dabei an, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Anzahl von N_0 B^0 - bzw. B_s^0 -Mesonen erzeugt wurden.

- e) Im B^0 -System ist $\Delta m = 0,5 \cdot 10^{12} \text{ s}^{-1}$. Im B_s^0 -System wurde ein Δm -Wert (hier Δm_s genannt) von $17,8 \cdot 10^{12} \text{ s}^{-1}$ gemessen. Skizzieren Sie die Anzahl von B^0 -, $\bar{B}^0$ -, B_s^0 - und $\bar{B}_s^0$ -Mesonen für $N_0 = 10000$ sowie die Asymmetrie in beiden Systemen für den Zeitraum $0 \leq t \leq 10^{-11}$ s. Welcher Flugstrecke der B-Mesonen entspricht die Periodendauer einer B^0 - bzw. B_s^0 -Oszillation bei einem Impuls von 5 GeV/c?

Aufgabe 2: Materie-/Antimaterieasymmetrie

(2+5+1=8 Punkte)

Nun widmen wir uns der *indirekte CP-Verletzung* der schwachen Wechselwirkung im Kaon-System. Die physikalischen Zustände K_S^0 und K_L^0 sind also nicht identisch mit den CP-Eigenzuständen K_1^0 und K_2^0 , sondern als deren Superpositionen

$$\begin{aligned} |K_S^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}} (|K_1^0\rangle + \epsilon |K_2^0\rangle) \\ |K_L^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}} (|K_2^0\rangle + \epsilon |K_1^0\rangle) \end{aligned}$$

gegeben, mit dem komplexen Mischungsparameter ϵ , wobei $|\epsilon| = 2,228 \cdot 10^{-3}$.

Die CP-Verletzung führt zu einer beobachtbaren Asymmetrie zwischen Materie- und Antimaterie. Neben dem Zerfall in Pionen¹ zerfällt das K_L^0 mit einem großen Verzweungsverhältnis von etwa 41% in Endzustände mit Elektronen („semileptonische“ Zerfälle), wobei

¹Das Verzweungsverhältnis für den Zerfall $K_L^0 \rightarrow \pi\pi\pi$ beträgt etwa 32%. Das Verzweungsverhältnis für $K_S^0 \rightarrow \pi\pi$ beträgt dagegen fast 100%.

die beiden Prozesse

$$\begin{aligned} K^0 &\rightarrow \pi^- + e^+ + \nu_e & (+) \\ \bar{K}^0 &\rightarrow \pi^+ + e^- + \bar{\nu}_e & (-) \end{aligned}$$

beitragen. Man kann nun die Raten $R^+ = R(K^0 \rightarrow \pi^- e^+ \nu_e)$ und $R^- = R(\bar{K}^0 \rightarrow \pi^+ e^- \bar{\nu}_e)$ der beiden Zerfälle messen und daraus die Ladungsasymmetrie

$$\delta_C = \frac{R^+ - R^-}{R^+ + R^-}$$

berechnen. Das Ergebnis einer solchen Messung ist in Abb. 1 in Abhängigkeit der Zeit t dargestellt. Der ursprüngliche K^0 -Strahl besteht aufgrund der geringeren Lebensdauer der

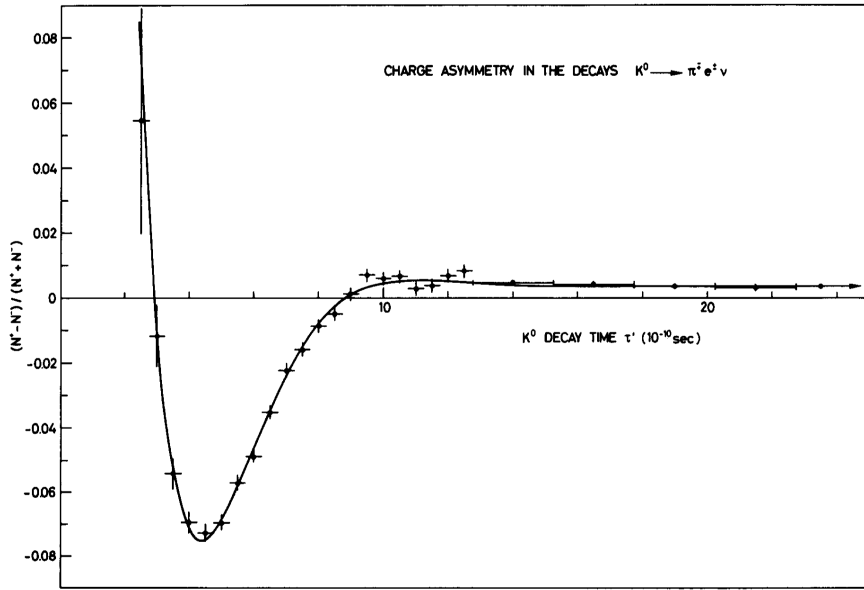


Abbildung 1: Ladungsasymmetrie δ_C in semileptonischen Zerfällen neutraler K-Mesonen als Funktion der Zeit t . Entnommen aus [1].

K_S^0 -Mesonen nach einer „Einschwingphase“ vollständig aus K_L^0 -Mesonen. Die Ladungsasymmetrie ist aber auch für große t nicht null sondern nimmt einen positiven Wert an.

- Zeichnen Sie die Feynmandiagramme der semileptonischen Zerfälle (+) und (−) der K^0 - und $\bar{K}^0$ -Mesonen.
- Zeigen Sie, dass für große Zeiten $t \gtrsim 20 \cdot 10^{-10} \text{ s}$ für die Ladungsasymmetrie gilt

$$\delta_C = 2 \cdot \text{Re}(\epsilon).$$

Machen Sie dazu den Ansatz

$$\begin{aligned} R^+ &\propto |\langle \pi^- e^+ \nu_e | T | K_L^0 \rangle|^2 \\ R^- &\propto |\langle \pi^+ e^- \bar{\nu}_e | T | K_L^0 \rangle|^2, \end{aligned}$$

wobei T den Operator des semileptonischen Zerfalls bezeichne. Wie ist dieser Ansatz motiviert? Nutzen Sie dann, dass

$$\begin{aligned} (i) \quad & \langle \pi^- e^+ \nu_e | T | K^0 \rangle = \langle \pi^+ e^- \bar{\nu}_e | T | \bar{K}^0 \rangle \\ (ii) \quad & \langle \pi^- e^+ \nu_e | T | \bar{K}^0 \rangle = \langle \pi^+ e^- \bar{\nu}_e | T | K^0 \rangle = 0. \end{aligned}$$

Wie lassen sich diese Beziehungen begründen? Vernachlässigen Sie bei der Rechnung ferner Terme $\mathcal{O}(|\epsilon|^2)$.

- c) Aus Abb. 1 entnimmt man, dass für große Zeiten gilt $\delta_C = 3,3 \cdot 10^{-3}$. Welcher Wert für die Phase des Mischungsparameters ϵ folgt daraus?

Aufgabe 3: Quarkonium

(1+2=3 Punkte)

Als Quarkonium bezeichnet man einen gebundenen Zustand eines schweren Quarks der Masse m_q und seines Antiquarks mit derselben Masse m_q . Das Potenzial zwischen den Quarks besitzt die Form

$$V(r) = -\frac{a}{r} + br.$$

Dabei wird der Abstand zwischen Quark und Antiquark mit r bezeichnet, a und b sind Konstanten. Betrachten Sie den Ausdruck für die Energieniveaus von Wasserstoff im Bohrschen Atommodell

$$E_n^{(0)} = -\frac{m}{2\hbar^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{n^2},$$

wobei m die reduzierte Masse des Systems aus Elektron und Proton darstellt.

- Leiten Sie in Analogie zu Wasserstoff einen Ausdruck für die Energieniveaus von Quarkonium unter Vernachlässigung des zweiten Terms in $V(r)$ ab.
- Welche Entartung erwarten Sie in obiger Näherung für die beiden niedrigsten Energieniveaus?

Literatur

- [1] S. Gjesdal et al., “A Measurement of the K_L - K_S Mass Difference from the Charge Asymmetry in Semileptonic Kaon Decays”, *Phys. Lett.* **B52** (1974) 113–118.
doi:10.1016/0370-2693(74)90734-5.