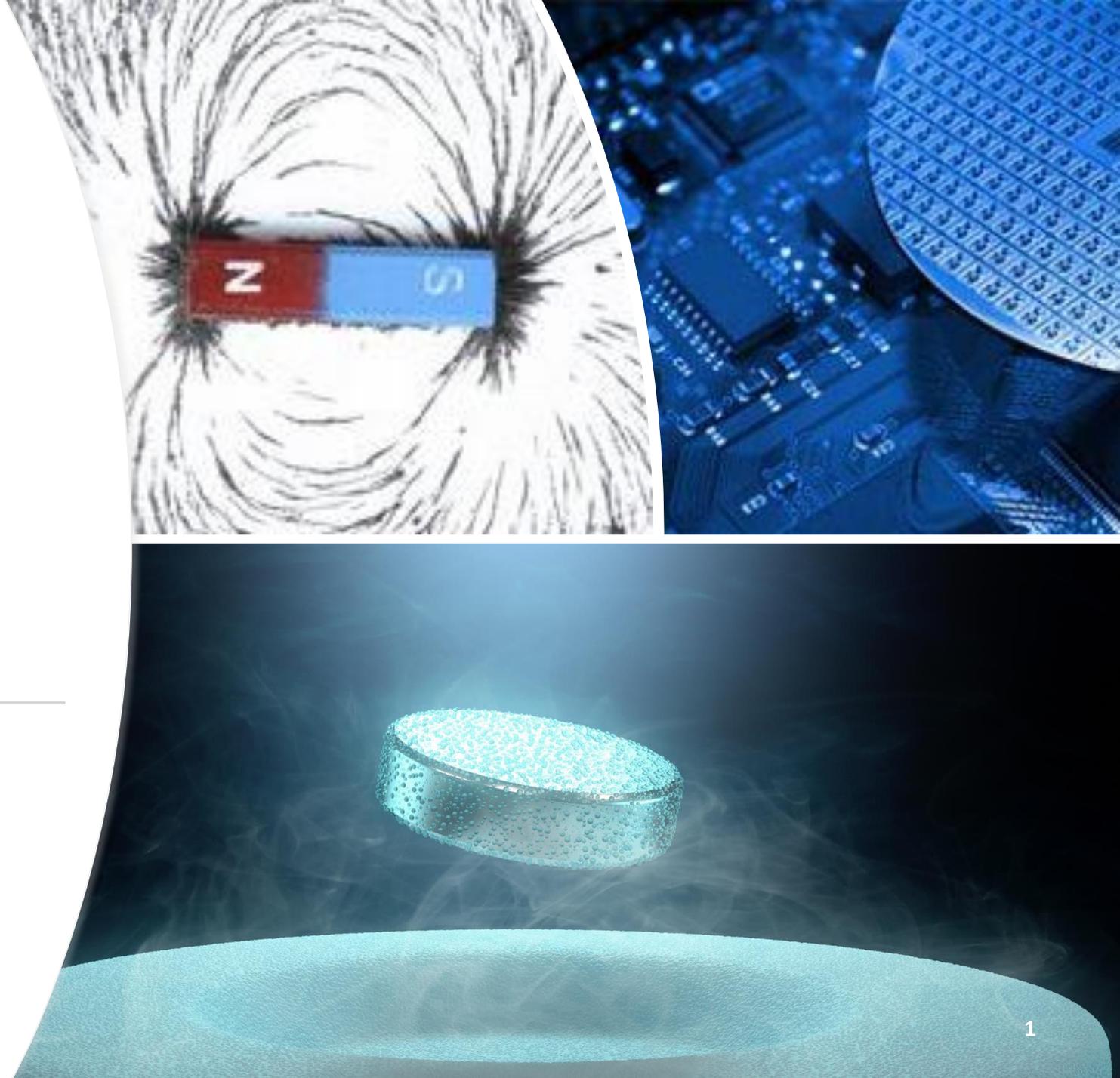




Moderne Experimentalphysik III

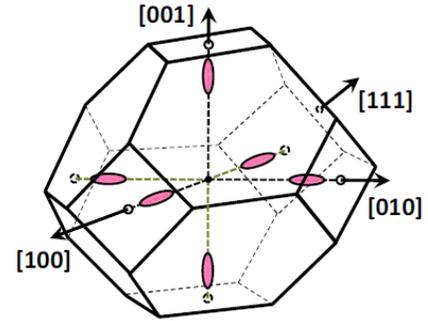
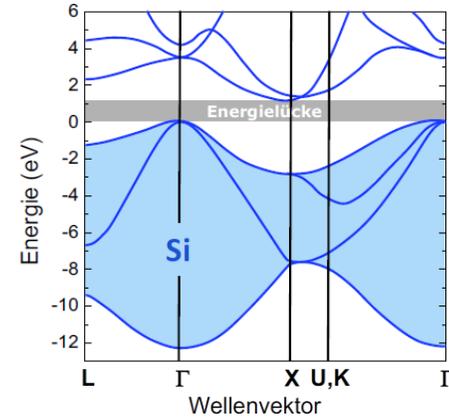
*Experimentelle
Festkörperphysik*

M-PHYS-106295, SoSe 2024



Wiederholung

Eigenschaften von Halbleitern



Leitungsband und Valenzband

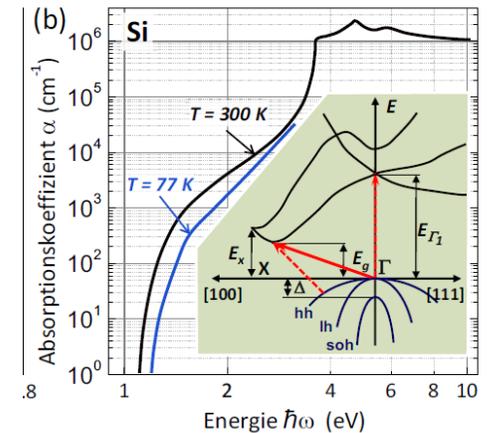
$$E(\mathbf{k}) = E_c + \frac{\hbar^2}{2} \sum_{ij} k_i \left(\frac{1}{m^*} \right)_{ij} k_j \quad (\text{Elektronen})$$

$$E(\mathbf{k}) = E_v + \frac{\hbar^2}{2} \sum_{ij} k_i \left(\frac{1}{m^*} \right)_{ij} k_j \quad (\text{Löcher}) .$$

Ladungsträgerdichte von intrinsischen Halbleitern

$$\mu = E_v + \frac{1}{2} E_g + \frac{3}{4} k_B T \ln \frac{m_{h,\text{DOS}}^*}{m_{e,\text{DOS}}^*} .$$

$$n_i = \sqrt{n_c \cdot p_v} = \sqrt{n_c^{\text{eff}} p_v^{\text{eff}}} e^{-E_g/2k_B T}$$



Bandstruktur von GaAs

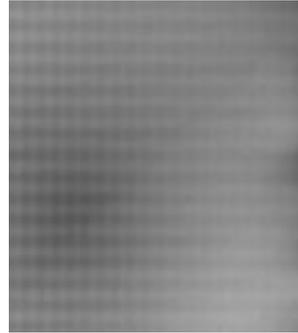
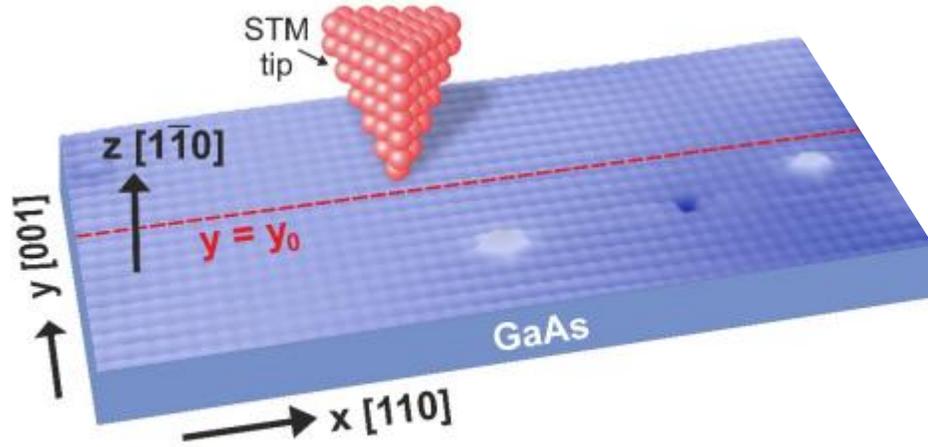
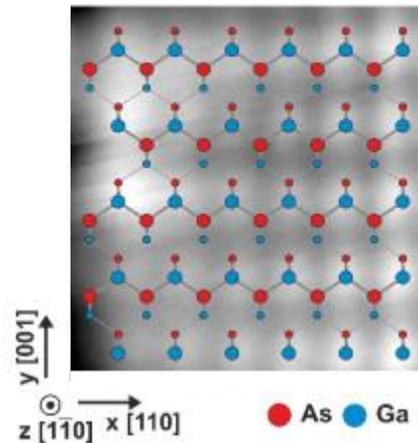
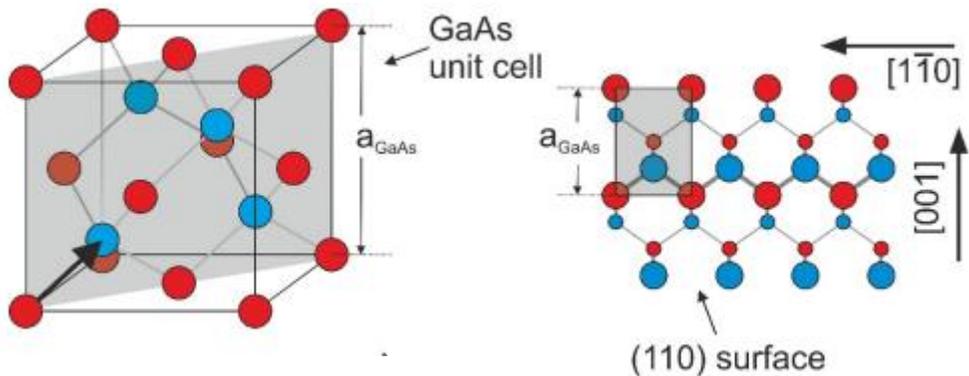
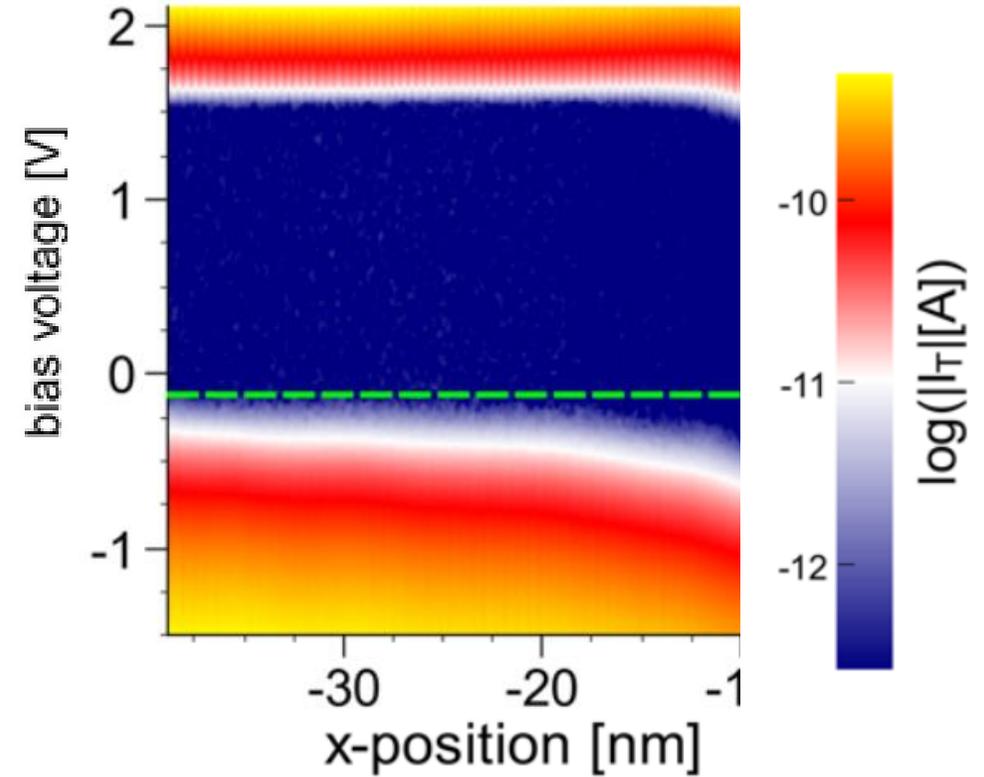


Figure 3.1: $20 \times 10 \text{ nm}^2$ constant current topography ($V_{bias} = +2 \text{ V}$, $I_T = 100 \text{ pA}$) of an n -type Fe/GaAs($\bar{1}10$) interface in cross-sectional geometry [47, 121]. Data was taken at room temperature. The interface is located at $x = 0$ indicated by the green solid line.



PhD Thesis, Tim Iffländer

<https://journals.aps.org/prl/pdf/10.1103/PhysRevLett.114.146804>

Lernziele

- Dotieratome
- Dotierte Halbleiter

Inhalt

- Dielektrische Eigenschaften von Isolatoren
- Halbleiter
- p-n-Übergang
- Niedrigdimensionale Elektronensysteme
- 1D- und 2D-Elektronengas
- Quanten-Hall Effekt
- Magnetische Eigenschaften
- Magnetismus der Leitungselektronen.
- Atomarer Magnetismus
- Magnetische Wechselwirkungen
- Ferro- und Antiferromagnetismus
- Grundbegriffe der Supraleitung
- London-Gleichungen
- Cooper-Paare
- Supraleiter 1. und 2. Art
- Josephson-Effekte

Dotierung

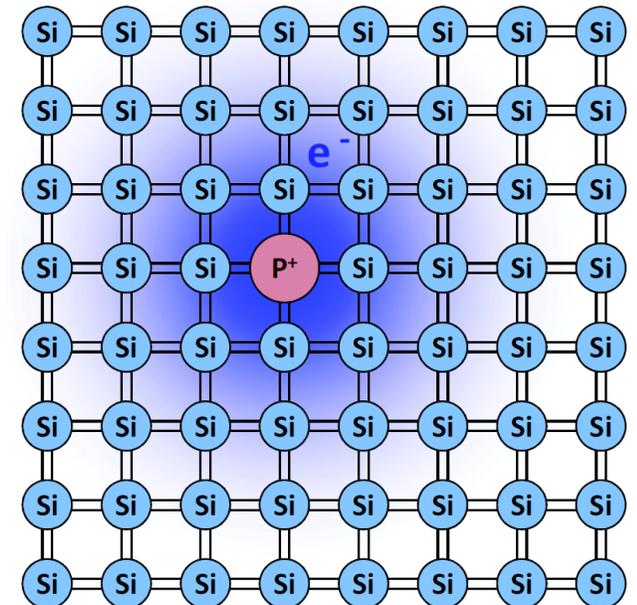
- **intrinsische Ladungsträgerdichte ist für die meisten Anwendungen zu gering** → zu geringe Leitfähigkeit

Dotierung:

- Erzeugung von zusätzlichen Ladungsträgern durch Einbringen von Verunreinigungen
- gezielte Dotierung von HL ist Grundlage für HL-Technologie
- bei Metallen ist Dotierung nicht (kaum) möglich (intrinsisch hohe LT-Dichte), auch kein elektrischer Feldeffekt

• Verunreinigungen in Halbleitern:

- **Donatoren:** → haben im Vergleich zu HL-Atomen zu viele Elektronen
 - geben zusätzliche Ladungsträger an Gitter ab
 - Beispiele: P, As, Sb, Bi für Si und Ge
- **Akzeptoren:** → haben im Vergleich zu HL-Atomen zu wenige Elektronen
 - nehmen fehlende Elektronen von Gitter auf, es bleiben Löcher zurück
 - Beispiele: B, Al, Ga, In für Si und Ge



Dotierte Halbleiter

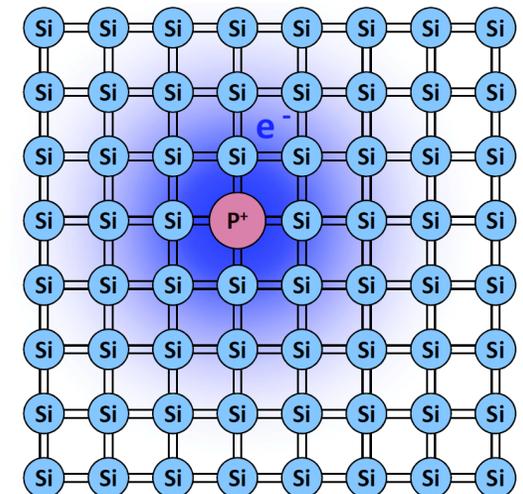
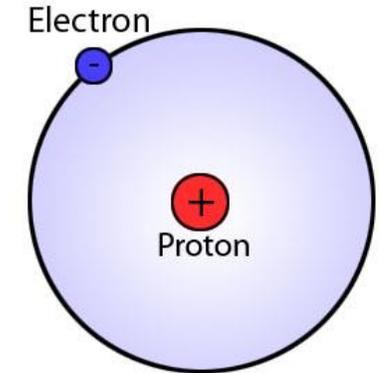
- Donator- und Akzeptor-Niveaus, wie groß ist die Bindungsenergie der überschüssigen/fehlenden Elektronen

Wasserstoffatom-Modell für Donatoren:

→ zusätzliches Elektron ist an einfach geladenes Donatoratom gebunden

Energieniveaus von H-Atom:

$$E_n^H = \frac{m_e e^4}{2(4\pi\epsilon_0 \hbar)^2} \frac{1}{n^2}$$

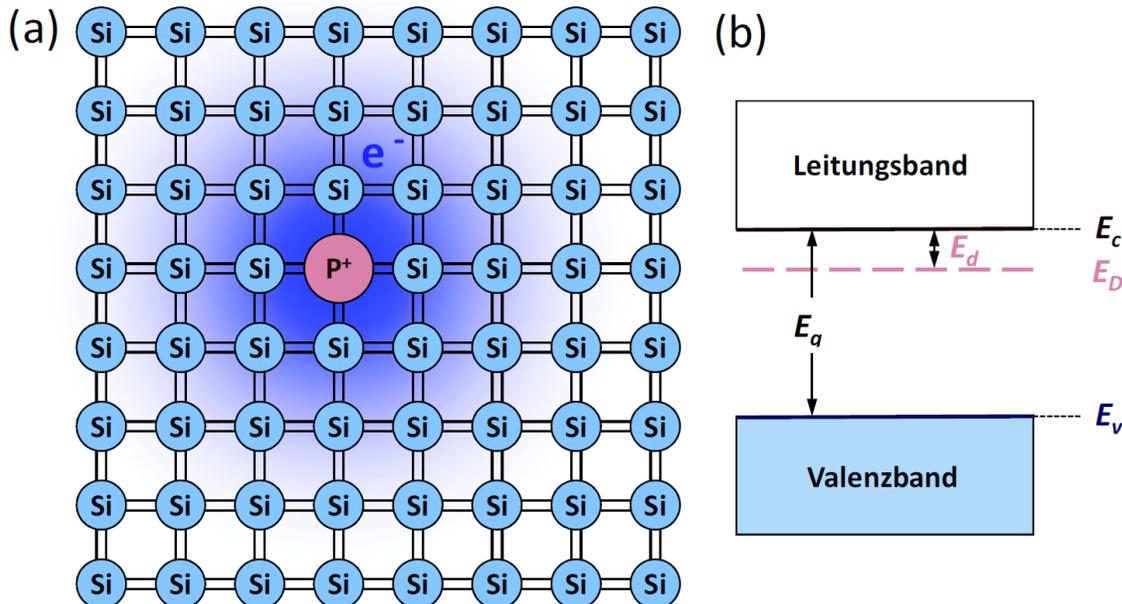


Dotierte Halbleiter

- Donator- und Akzeptor-Niveaus, wie groß ist die Bindungsenergie der überschüssigen/fehlenden Elektronen

Wasserstoffatom-Modell für Donatoren:

→ zusätzliches Elektron ist an einfach geladenes Donatoratom gebunden



Energieniveaus von H-Atom:

$$E_n^H = \frac{m_e e^4}{2(4\pi\epsilon_0 \hbar)^2} \frac{1}{n^2}, \quad E_1^H = 13.6 \text{ eV}$$

Was ändert sich im Festkörper?

- Coulomb-Potenzial ist abgeschirmt
→ Berücksichtigung mit Dielektrizitätskonstante
 $\epsilon_{Si} = 11.7, \epsilon_{Ge} = 15.8$

Bandelektroden statt freie Elektronen

→ $m_e \rightarrow m_e^*$

Donatorniveaus

$$E_{n,d} = \frac{m_e^* e^4}{2(4\pi\epsilon\epsilon_0 \hbar)^2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

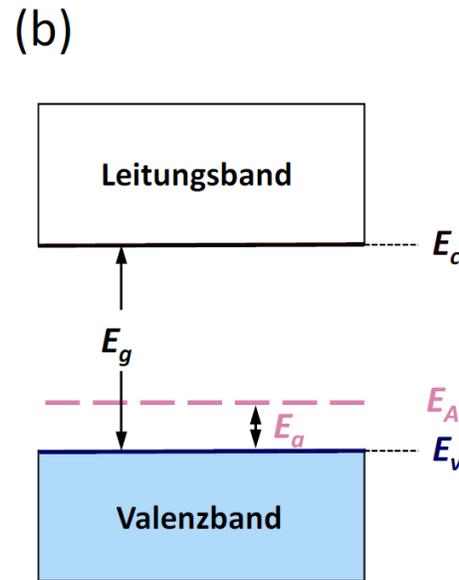
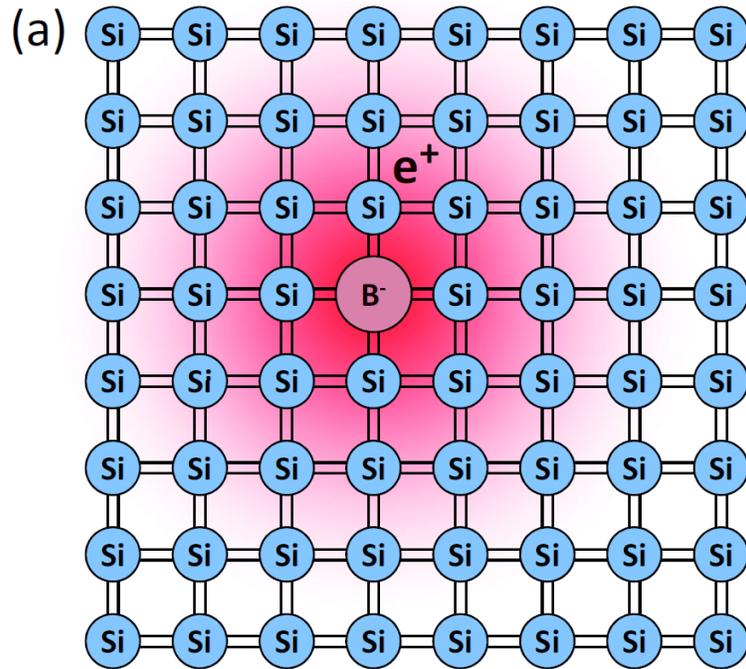
$E_{1,D} \sim 10 - 100 \text{ meV}$ (für Si und Ge)

Dotierte Halbleiter

- Donator- und Akzeptor-Niveaus, wie groß ist die Bindungsenergie der überschüssigen/fehlenden Elektronen

Wasserstoffatom-Modell für Akzeptoren:

→ fehlendes Elektron (positiv geladenes Loch) ist an einfach negativ geladenes Akzeptoratom gebunden



Akzeptorniveaus

$$E_{n,A} = \frac{m_h^* e^4}{2(4\pi\epsilon_0 \hbar)^2} \frac{1}{n^2}$$

$$E_{1,A} \sim 10 - 100 \text{ meV (für Si und Ge)}$$

Bohrscher Radius für Akzeptoren und Donatoren

$$r_d = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e^* e^2}$$

$$r_{A,D} \sim 5 - 50 \text{ \AA (für Si und Ge)}$$

→ $r_{A,D} \gg \text{Atomabstand}$

Dotierte Halbleiter

Bohrscher Radius für Akzeptoren und Donatoren

$$r_{A,D} \sim 5 - 50 \text{ \AA}$$

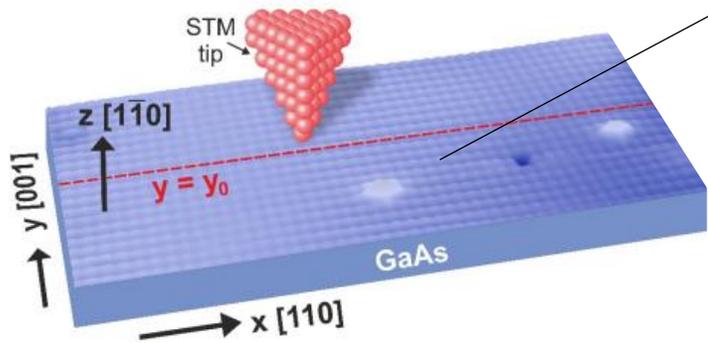
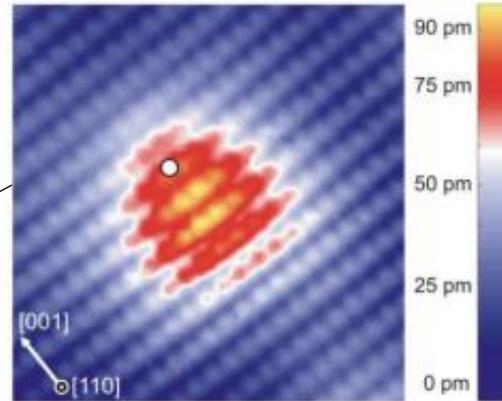


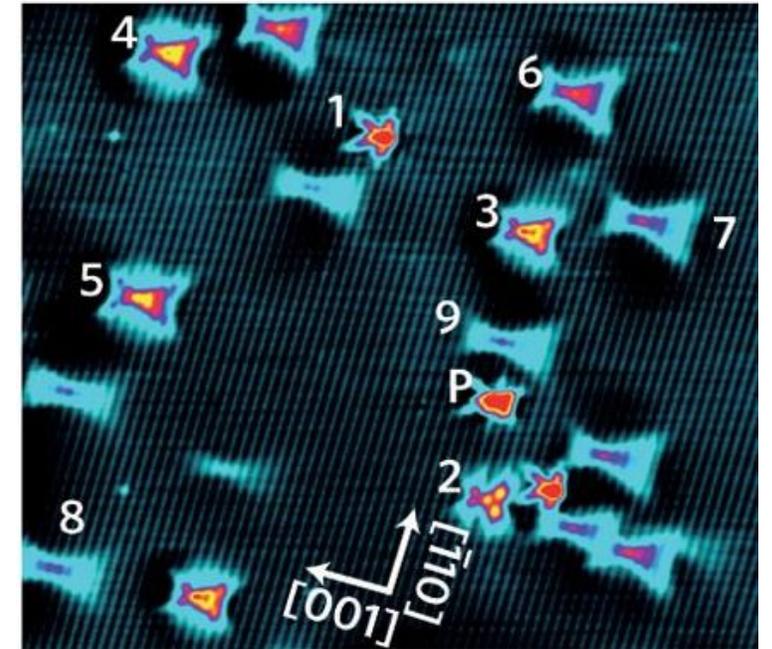
Figure 3.1: 20x10 nm² constant current topography ($V_{bias} = +2 \text{ V}$, $I_T = 100 \text{ pA}$) of an *n*-type Fe/GaAs($\bar{1}10$) interface in cross-sectional geometry [47, 121]. Data was taken at room temperature. The interface is located at $x = 0$ indicated by the green solid line.

Carbon acceptors in GaAs



PhD Thesis, Karen Teichmann

Mn acceptors in GaAs

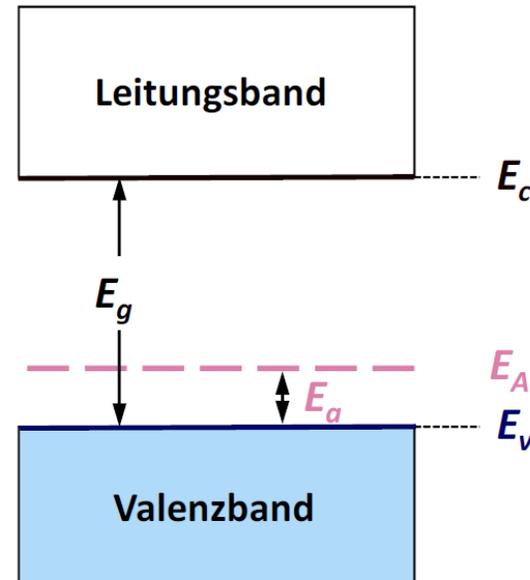
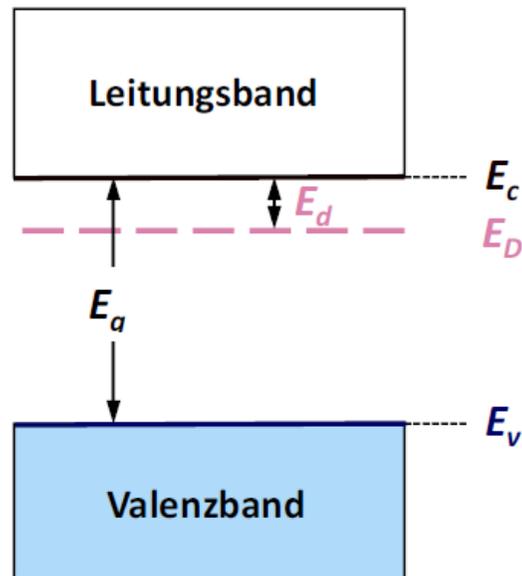


Nature Materials volume 10
Pages 91–100 (2011)

Ionisierungsenergien

- Ionisierungsenergien einiger Donatoren und Akzeptoren in Si und Ge

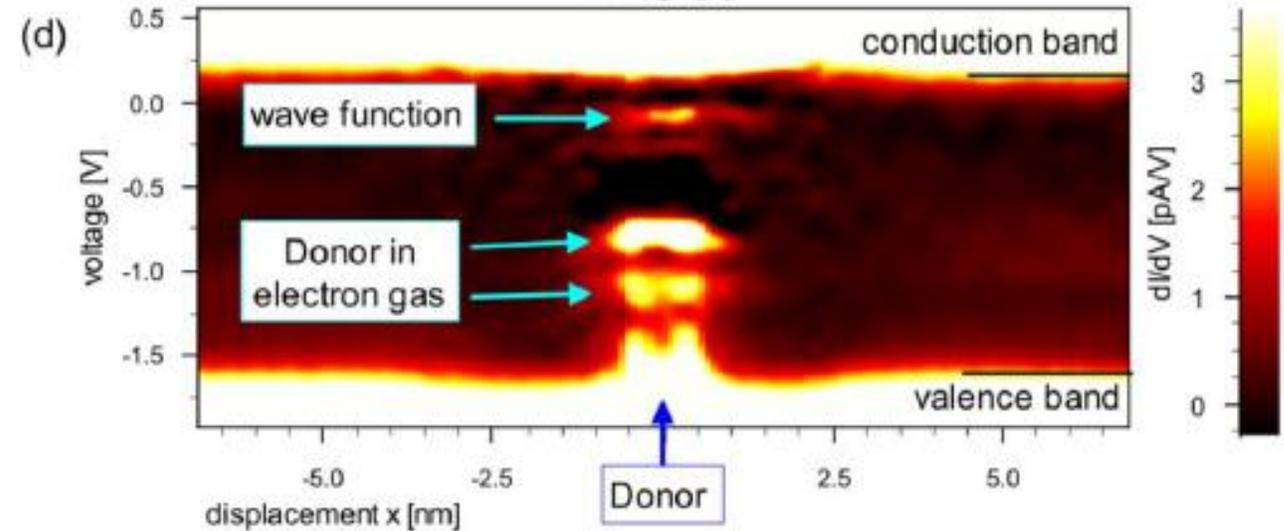
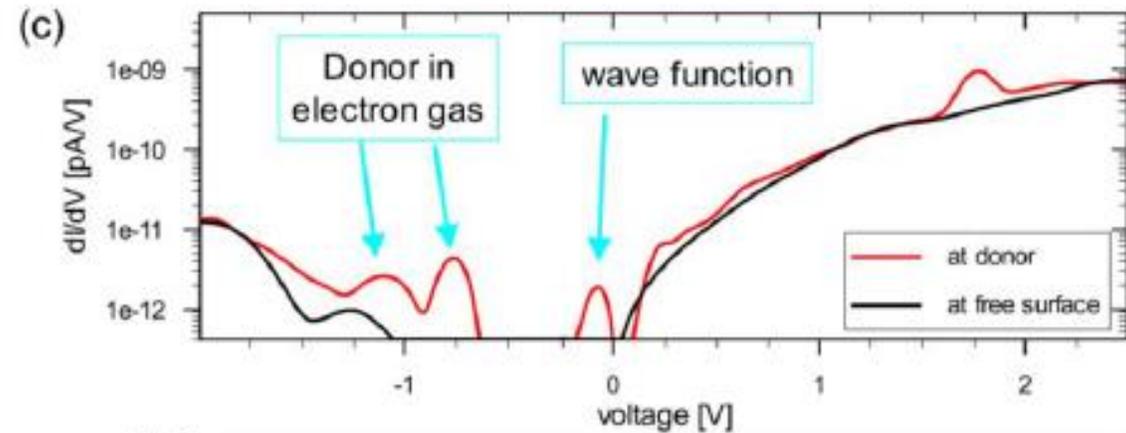
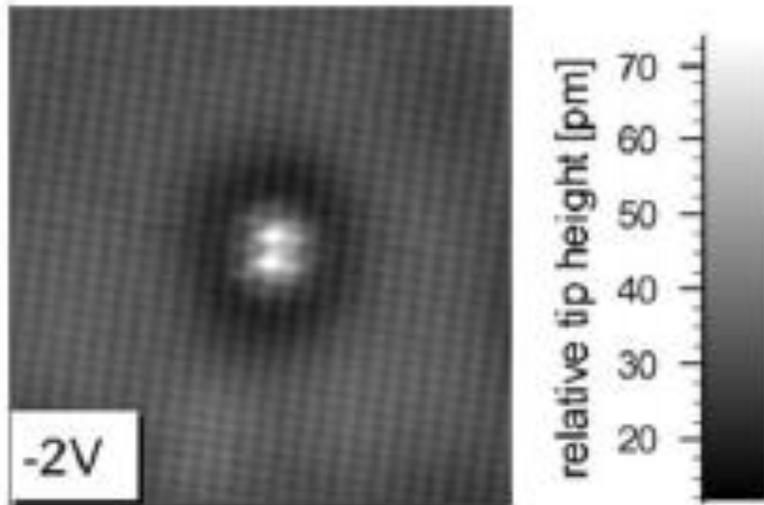
Halbleiter	Donatoren					Akzeptoren			
	P	As	Sb	Bi		B	Al	Ga	In
E_d	(meV)	(meV)	(meV)	(meV)	E_a	(meV)	(meV)	(meV)	(meV)
Si	45	54	43	69		45	72	74	157
Ge	13	14	9.6	13		11	11	11	12



Ionisierungsenergien

Si doped GaAs

- Donorzustände sind direkt sichtbar unterhalb der Leitungsbandkante
- Weitere Zustände aus für uns irrelevanten Gründen



Ladungsträgerdichte in dotierten Halbleitern

es gilt:

$$n_c = n_c^{\text{eff}} e^{-(E_c - \mu)/k_B T}$$

$$p_v = p_v^{\text{eff}} e^{-(\mu - E_v)/k_B T}$$

$$\Rightarrow n_c \cdot p_v = n_c^{\text{eff}} p_v^{\text{eff}} e^{-E_g/k_B T}$$

Dichte der Donatoren und Akzeptoren

$$n_A = n_A^0 + n_A^-$$

neutral geladen/ionisiert

$$n_D = n_D^0 + n_D^+$$

neutral geladen/ionisiert

Neue Neutralitätsbedingung:

$$n_c + n_A^- = p_v + n_D^+$$

Wie groß ist Anteil der neutralen und geladenen Donatoren/Akzeptoren?

Ladungsträgerdichte in dotierten Halbleitern

es gilt:

$$n_c = n_c^{\text{eff}} e^{-(E_c - \mu)/k_B T}$$

$$p_v = p_v^{\text{eff}} e^{-(\mu - E_v)/k_B T}$$

$$\Rightarrow n_c \cdot p_v = n_c^{\text{eff}} p_v^{\text{eff}} e^{-E_g/k_B T}$$

Dichte der Donatoren und Akzeptoren

$$n_A = n_A^0 + n_A^-$$

neutral geladen/ionisiert

$$n_D = n_D^0 + n_D^+$$

neutral geladen/ionisiert

Neue Neutralitätsbedingung:

$$n_c + n_A^- = p_v + n_D^+$$

Wie groß ist Anteil der neutralen und geladenen Donatoren/Akzeptoren?

$$\frac{n_D^0}{n_D} = 2 \frac{1}{e^{(E_D - \mu)/k_B T} + 1}$$

Spin-Entartung

$$\frac{n_A^0}{n_A} = 4 \frac{1}{e^{(\mu - E_A)/k_B T} + 1}$$

Spin-Entartung, Entartung von hh-, lh-Band

Ladungsträgerdichte in dotierten Halbleitern

- Berechnung der Ladungsträgerdichte in n -Typ Halbleiter ($n_D \gg n_A$)

Annahmen:

- $n_A^0 \simeq 0, n_A^- \simeq n_A$, da für $n_D \gg n_A$ alle Akzeptoren ein Elektron einfangen können
- $n_D^+ \gg p_v$, gilt immer bei genügend tiefen $T \rightarrow$ Wahrscheinlichkeit für VB \rightarrow LB Anregung gering
- Wir vernachlässigen Entartungsfaktoren

Neutralitätsbedingung:

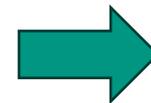
$$n_c = p_v + n_D^+ - n_A^- \simeq n_D^+ - n_A = n_D - n_D^0 - n_A \quad \Rightarrow n_c = n_D - n_D^0 - n_A$$

$$\frac{n_D^0}{n_D} = \frac{1}{e^{(E_D - \mu)/k_B T} + 1}$$

(Boltzmann)

$$n_c = n_c^{\text{eff}} e^{-(E_c - \mu)/k_B T}$$

(wie beim letzten Mal)



$$\frac{n_c(n_c + n_A)}{n_D - n_A - n_c} = n_c^{\text{eff}} e^{-E_d/k_B T}$$

(Homework)

Ladungsträgerdichte in dotierten Halbleitern

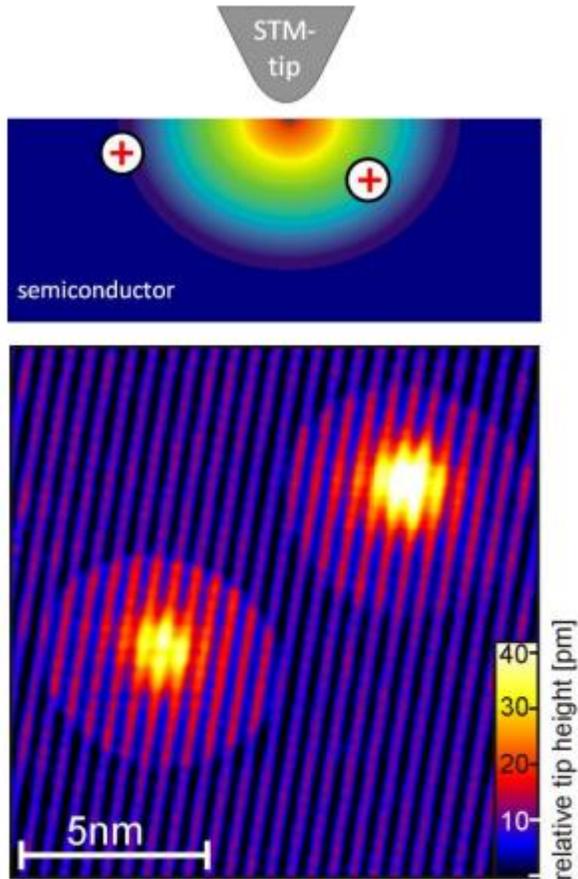


Figure 1.2: The upper image sketches two donors in GaAs and the STM tip. The colored area indicates the space charge region. The lower image shows a constant current topography of two donors. The charge switching is visible by the disk-shape of enhanced topographic height.

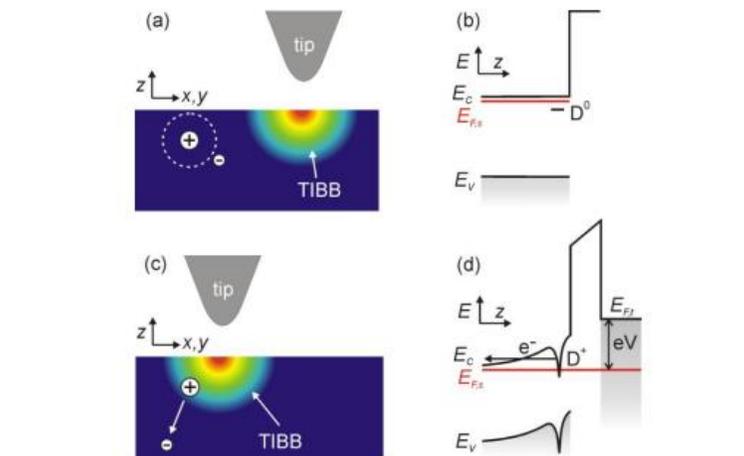
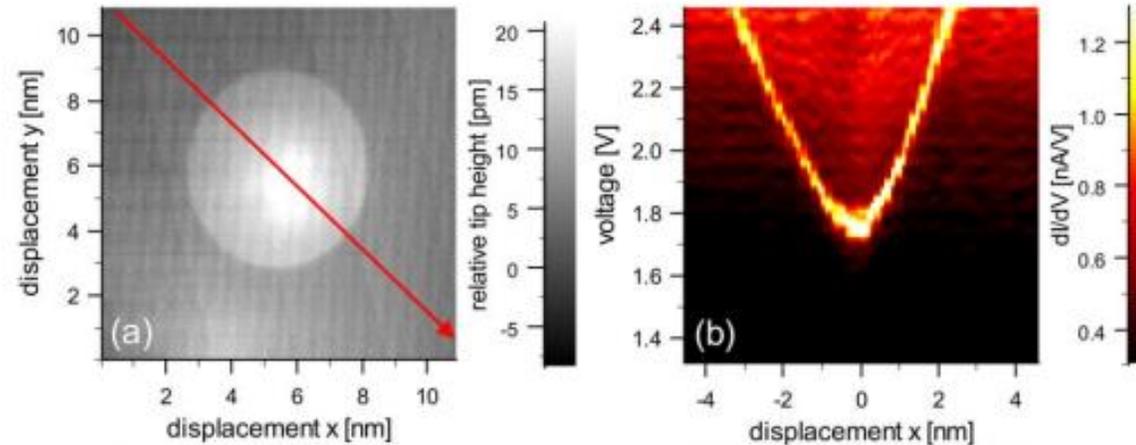
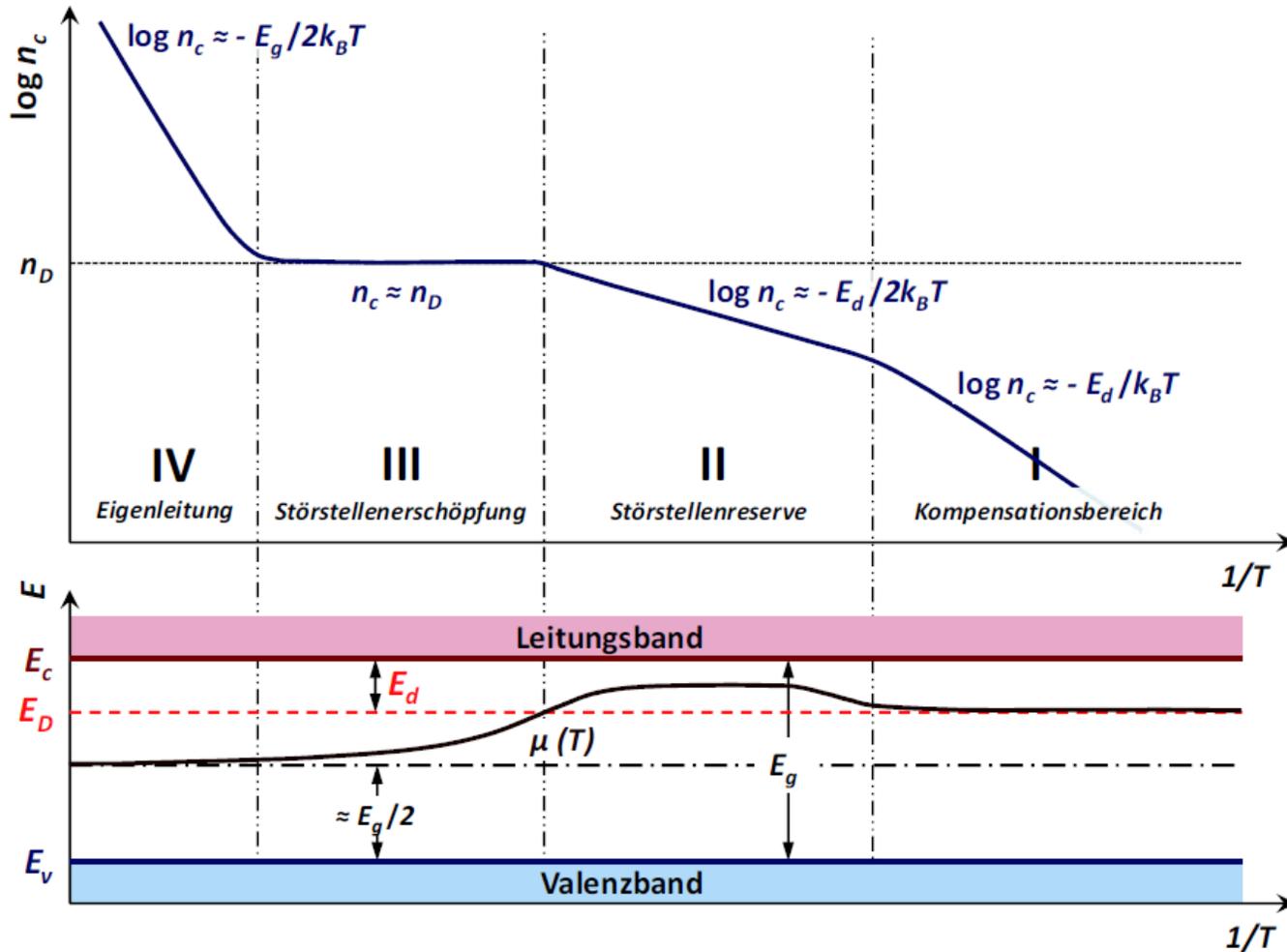


Figure 3.4: Schematic representation of the ionization mechanism: When the tip laterally far away from the donor (a), the bands on top of the donors are flat (b) and the donor will be neutral. As the tip approaches laterally the donor with a positive sample bias (c), the bands are lifted due to the TIBB (d). At a certain voltage the donor level aligns with the conduction band in the bulk and the electron can escape.

<https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.96.066403>

Ladungsträgerdichte in dotierten Halbleitern



$k_B T \lll E_d$ (**Kompensationsbereich**) $n_c \ll n_A \ll n_D$

$$n_c \approx \frac{n_D n_c^{\text{eff}}}{n_A} e^{-E_d/k_B T}$$

$k_B T \ll E_d$ (**Störstellenreserve**) $n_c \gg n_A, n_c \ll n_D$

$$n_c \approx \sqrt{n_D n_c^{\text{eff}}} e^{-E_d/2k_B T}$$

$k_B T \geq E_d$ (**Störstellenerschöpfung**) $n_c \gg n_A, e^{\frac{E_d}{k_B T}} \approx 1$

$$n_c \approx n_D$$

$k_B T \gg E_d$ (**Eigenleitung**) $n_c \gg n_A, n_c \gg n_D$

$$n_c \approx n_c^{\text{eff}} e^{-E_g/2k_B T}$$

Ladungsträgerdichte in dotierten Halbleitern

- Näherungen des Ausdrucks für die LT-Dichte

$$\frac{n_c(n_c + n_A)}{n_D - n_A - n_c} = n_c^{\text{eff}} e^{-E_d/k_B T}$$

i. Kompensationsbereich: $k_B T \ll E_d \Rightarrow n_c \ll n_A \ll n_D$

- für sehr tiefe T werden die sehr wenigen von Donatoren freigesetzten Elektronen alle von den Akzeptoren eingefangen → “Kompensation”

$$\frac{n_c(\cancel{n_c} + n_A)}{n_D - \cancel{n_A} - \cancel{n_c}} = n_c^{\text{eff}} e^{-E_d/k_B T}$$



$$n_c \simeq \frac{n_D n_c^{\text{eff}}}{n_A} e^{-E_d/k_B T}$$

Ladungsträgerdichte in dotierten Halbleitern

- Näherungen des Ausdrucks für die LT-Dichte

$$\frac{n_c(n_c + n_A)}{n_D - n_A - n_c} = n_c^{\text{eff}} e^{-E_d/k_B T}$$

ii. Störstellenreserve: $k_B T \ll E_d \Rightarrow n_c \gg n_A, n_c \ll n_D$

durch thermische Aktivierung werden mit steigendem $k_B T$ jetzt immer mehr Elektronen von Donatoren freigesetzt, so dass $n_c \gg n_A$

$k_B T$ ist aber immer noch niedrig genug, dass $n_c \ll n_D \rightarrow$ "Störstellenreserve"

$$\frac{n_c(n_c + \cancel{n_A})}{n_D - \cancel{n_A} - \cancel{n_c}} = n_c^{\text{eff}} e^{-E_d/k_B T}$$



$$n_c \simeq \sqrt{n_D n_c^{\text{eff}}} e^{-E_d/2k_B T}$$

Vergleich zum intrinsischen Halbleiter:

$$n_i = \sqrt{n_c \cdot p_v} = \sqrt{n_c^{\text{eff}} p_v^{\text{eff}}} e^{-E_g/2k_B T}$$

Ladungsträgerdichte in dotierten Halbleitern

- Näherungen des Ausdrucks für die LT-Dichte

$$\frac{n_c(n_c + n_A)}{n_D - n_A - n_c} = n_c^{\text{eff}} e^{-E_d/k_B T}$$

iii. Störstellenerschöpfung: $k_B T \gtrsim E_d \Rightarrow n_c \gg n_A$, $\exp(-E_d/k_B T) \simeq 1 \Rightarrow n_c^2/n_c^{\text{eff}} \simeq (n_D - n_c) \simeq 0$, da $n_c \ll n_c^{\text{eff}}$

$k_B T$ ist so groß, dass alle Elektronen von Donatoren frei gesetzt sind \rightarrow "Störstellenerschöpfung"

$$\frac{n_c(n_c + \cancel{n_A})}{n_D - \cancel{n_A} - n_c} = n_c^{\text{eff}} e^{\cancel{E_d/k_B T}}$$

+

$$n_c \ll n_c^{\text{eff}}$$



$$n_c \simeq n_D$$



$$n_c^{\text{eff}} = 2 \left(\frac{m_{e,\text{DOS}}^* k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2}$$

$$n_c = n_c^{\text{eff}} e^{-(E_c - \mu)/k_B T}$$

Si mit einer Phosphor-Dotierung

von $n_D = 3 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$:

- Störstellen-Erschöpfung geht von etwa 45 K bis 500 K
- \rightarrow bei RT sind alle Donatoratome ionisiert.

Ladungsträgerdichte in dotierten Halbleitern

- Näherungen des Ausdrucks für die LT-Dichte

$$\frac{n_c(n_c + n_A)}{n_D - n_A - n_c} = n_c^{\text{eff}} e^{-E_d/k_B T}$$

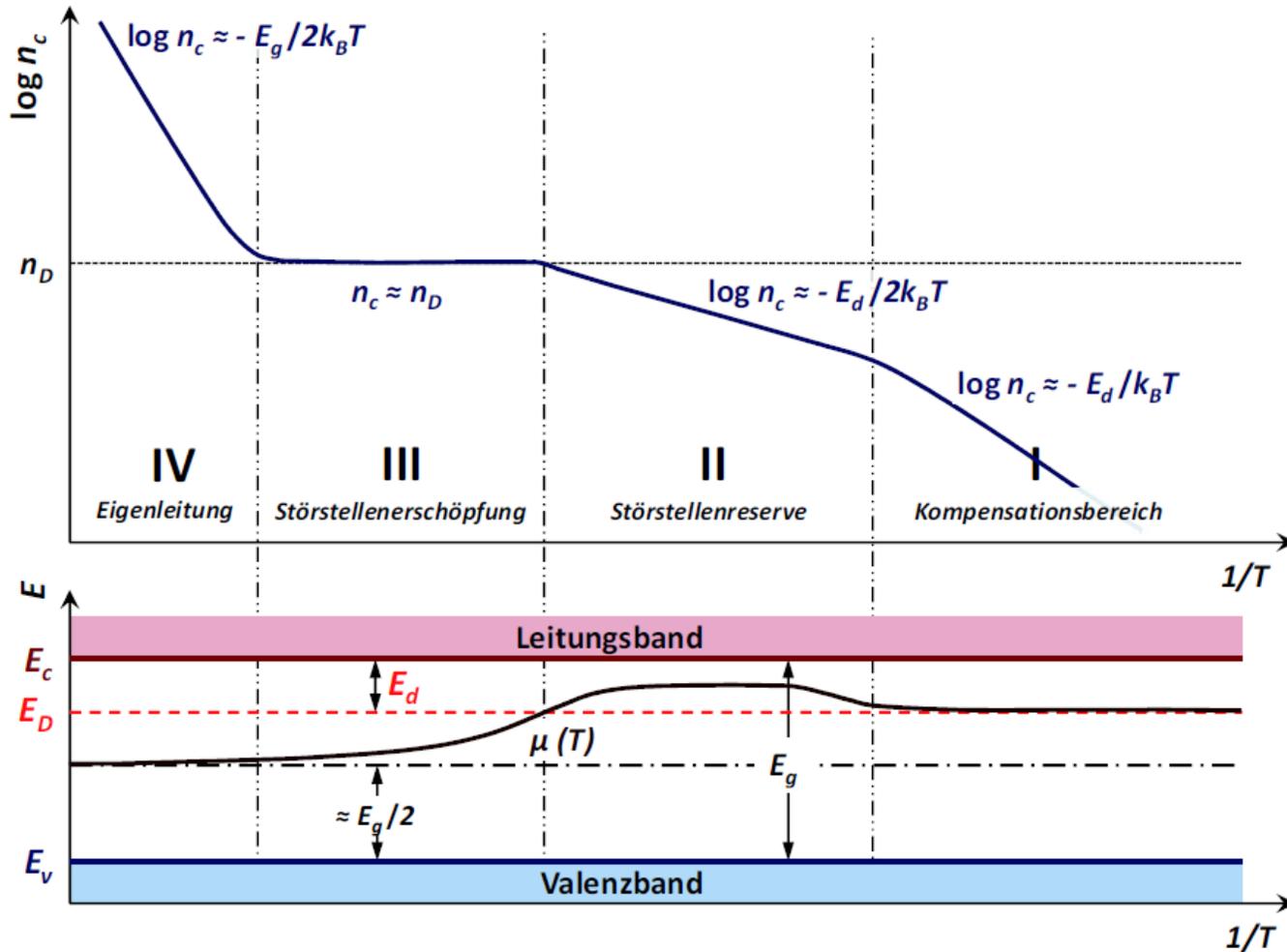
iv. Eigenleitung: $k_B T \gg E_d$, obiger Ausdruck für n_c gilt nicht mehr, da er unter Annahme $n_D^+ \gg p_v$ abgeleitet wurde

$$\frac{n_c(n_c + n_A)}{n_D - n_A - n_c} = n_c^{\text{eff}} e^{-E_d/k_B T}$$

$$n_c \simeq n_c^{\text{eff}} e^{-E_g/2k_B T}$$

$k_B T$ ist jetzt so groß, dass n_c durch die thermische Anregung aus dem VB dominiert wird, es gilt dann Ausdruck für intrinsischen HL → “Eigenleitung”

Ladungsträgerdichte in dotierten Halbleitern



$k_B T \lll E_d$ (Kompensationsbereich) $n_c \ll n_A \ll n_D$

$$n_c \approx \frac{n_D n_c^{\text{eff}}}{n_A} e^{-E_d/k_B T}$$

$k_B T \ll E_d$ (Störstellenreserve) $n_c \gg n_A, n_c \ll n_D$

$$n_c \approx \sqrt{n_D n_c^{\text{eff}}} e^{-E_d/2k_B T}$$

$k_B T \geq E_d$ (Störstellenerschöpfung) $n_c \gg n_A, e^{\frac{E_d}{k_B T}} \approx 1$

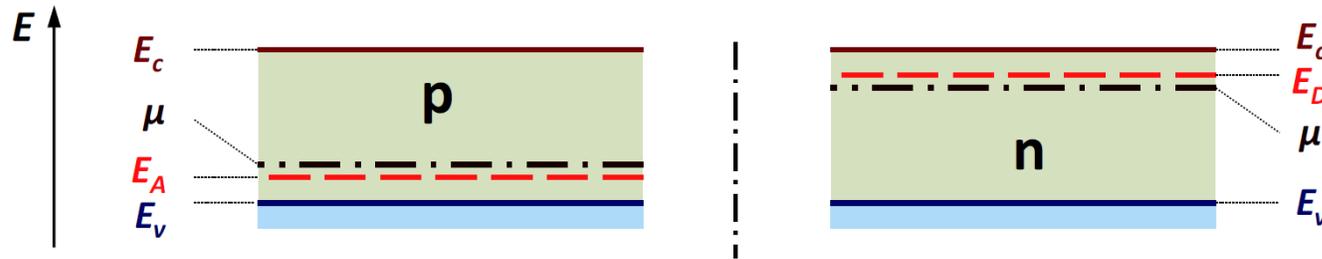
$$n_c \approx n_D$$

$k_B T \gg E_d$ (Eigenleitung) $n_c \gg n_A, n_c \gg n_D$

$$n_c \approx n_c^{\text{eff}} e^{-E_g/2k_B T}$$

pn-Übergang im thermischen Gleichgewicht

- Was passiert an Kontakt von n -Typ und p -Typ Halbleiter (z.B. n -Typ und p -Typ Silizium)



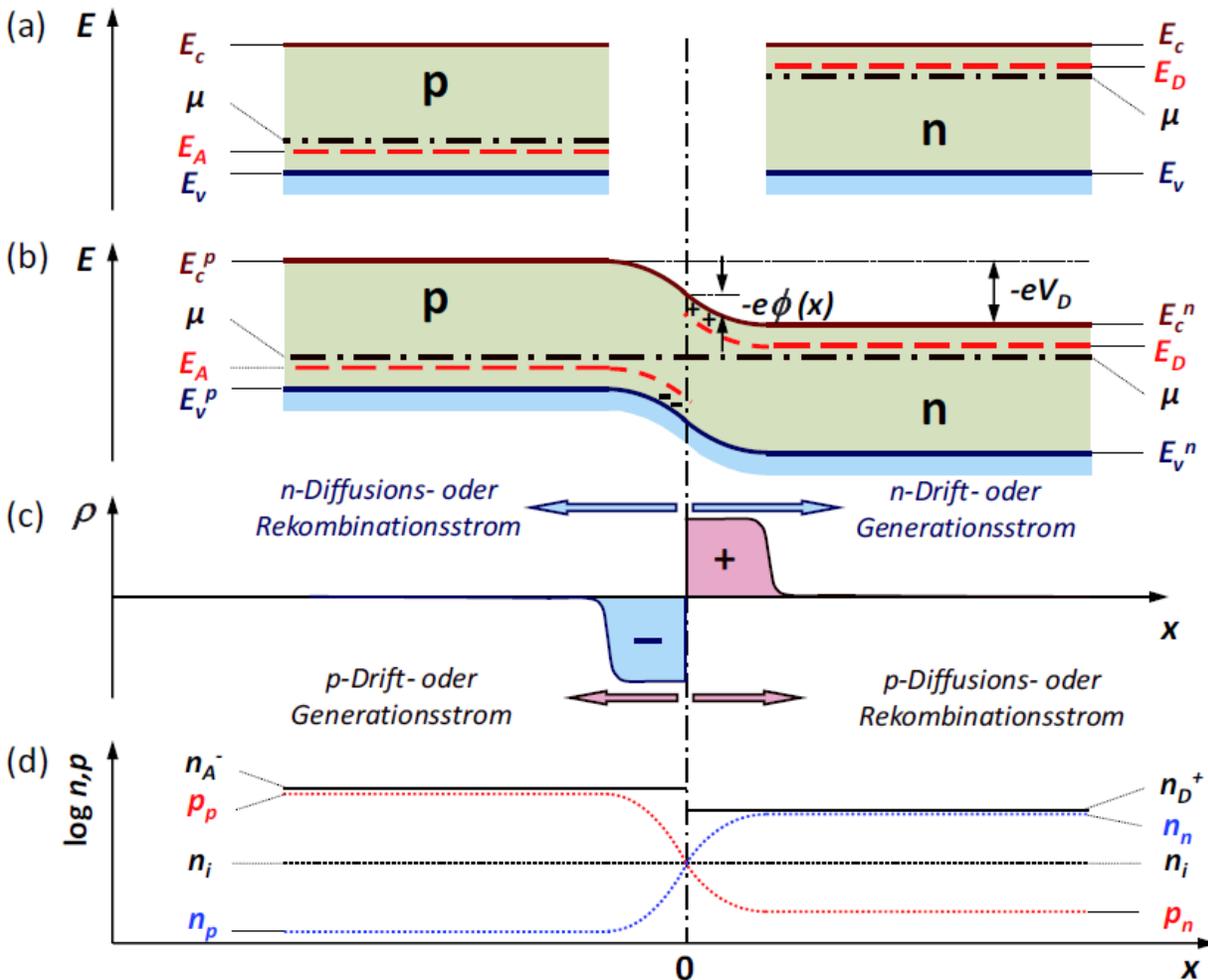
Nomenklatur:

- Majoritätsladungsträger:** Elektronen im n -Typ und Löcher im p -Typ HL
- Minoritätsladungsträger:** Löcher im n -Typ und Elektronen im p -Typ HL

- im getrennten Fall sind Bandkanten der beiden Halbleiter auf gleichem Niveau
- im p -Typ HL liegt chemisches Potenzial μ nahe an VB-Kante, im n -Typ HL nahe an LB-Kante, da Besetzungswahrscheinlichkeit der Loch- bzw. Elektronenzustände groß sein muss
- was passiert bei Kontakt?
 - aufgrund des **Konzentrationsgradienten** diffundieren Elektronen vom n - in den p -Typ HL und Löcher vom p - in den n -Typ HL ➔ **Diffusionsströme**
 - die zurückbleibenden positiv (negativ) geladenen Donatoren (Akzeptoren) bilden **Raumladungszone**
 - ➔ **Driftströme** durch den damit verbundenen **elektrischen Potenzialgradienten**
 - nachdem thermisches Gleichgewicht erreicht ist, muss das chemische Potenzial μ horizontal verlaufen
 - ➔ **wie sieht dann der Verlauf der Bandkanten aus ?**

pn-Übergang im thermischen Gleichgewicht

- Welche LT-Bewegungen finden an *pn*-Kontakt statt?



- **Majoritätsladungsträger:**

- diffundieren in den jeweils anderen HL-Typ und rekombinieren dort

- ➔ **Diffusion- oder Rekombinationsstrom**

- zurückbleibende geladene Störstellen bilden Raumladungszone $\rho(x)$

- $\rho(x)$ ist mit Makropotenzial $\phi(x)$ verbunden:

$$-\nabla^2 \phi = -\frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} = \frac{\rho(x)}{\epsilon \epsilon_0}$$

- potentielle Energie der Elektronen/Löcher: $\mp e\phi(x)$

- Diffusionsspannung: $V_D = \phi(\infty) - \phi(-\infty)$

- **Minoritätsladungsträger:**

- driften in Potentialgradient (E -Feld) in Raumladungszone

- ➔ **Drift- oder Generationsstrom**

- **thermisches Gleichgewicht:**

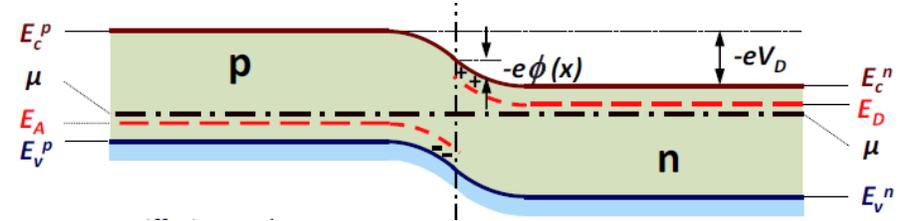
Diffusionsstrom = Driftstrom

pn-Übergang im thermischen Gleichgewicht

- Räumlicher Verlauf der Ladungsträgerkonzentration und des Makropotenzials $\phi(x)$

$$n_n(\infty) = n_c^{\text{eff}} \exp\left(-\frac{E_C^n(\infty) - \mu}{k_B T}\right) = n_c^{\text{eff}} \exp\left(-\frac{eV_n}{k_B T}\right)$$

$$p_p(-\infty) = p_v^{\text{eff}} \exp\left(-\frac{\mu - E_V^p(-\infty)}{k_B T}\right) = p_v^{\text{eff}} \exp\left(-\frac{eV_p}{k_B T}\right)$$



- Diffusionsspannung V_D

– es gilt: $E_g = eV_D + eV_n + eV_p$ $eV_n = -k_B T \ln\left(\frac{n_n}{n_c^{\text{eff}}}\right)$ $eV_p = -k_B T \ln\left(\frac{p_p}{p_v^{\text{eff}}}\right)$

– Einsetzen und auflösen nach V_D : $eV_D = E_g + k_B T \ln\left(\frac{n_n p_p}{n_c^{\text{eff}} p_v^{\text{eff}}}\right)$

– mit $n_i^2 = n_c^{\text{eff}} p_v^{\text{eff}} \exp\left(-\frac{E_g}{k_B T}\right)$ ergibt sich **Diffusionsspannung**: $eV_D = E_g + k_B T \ln\left(\frac{n_i^2}{n_c^{\text{eff}} p_v^{\text{eff}}}\right) = E_g + k_B T \ln\left(\frac{n_n p_p}{n_c^{\text{eff}} p_v^{\text{eff}}}\right)$

- Ladungsträgerkonzentrationen