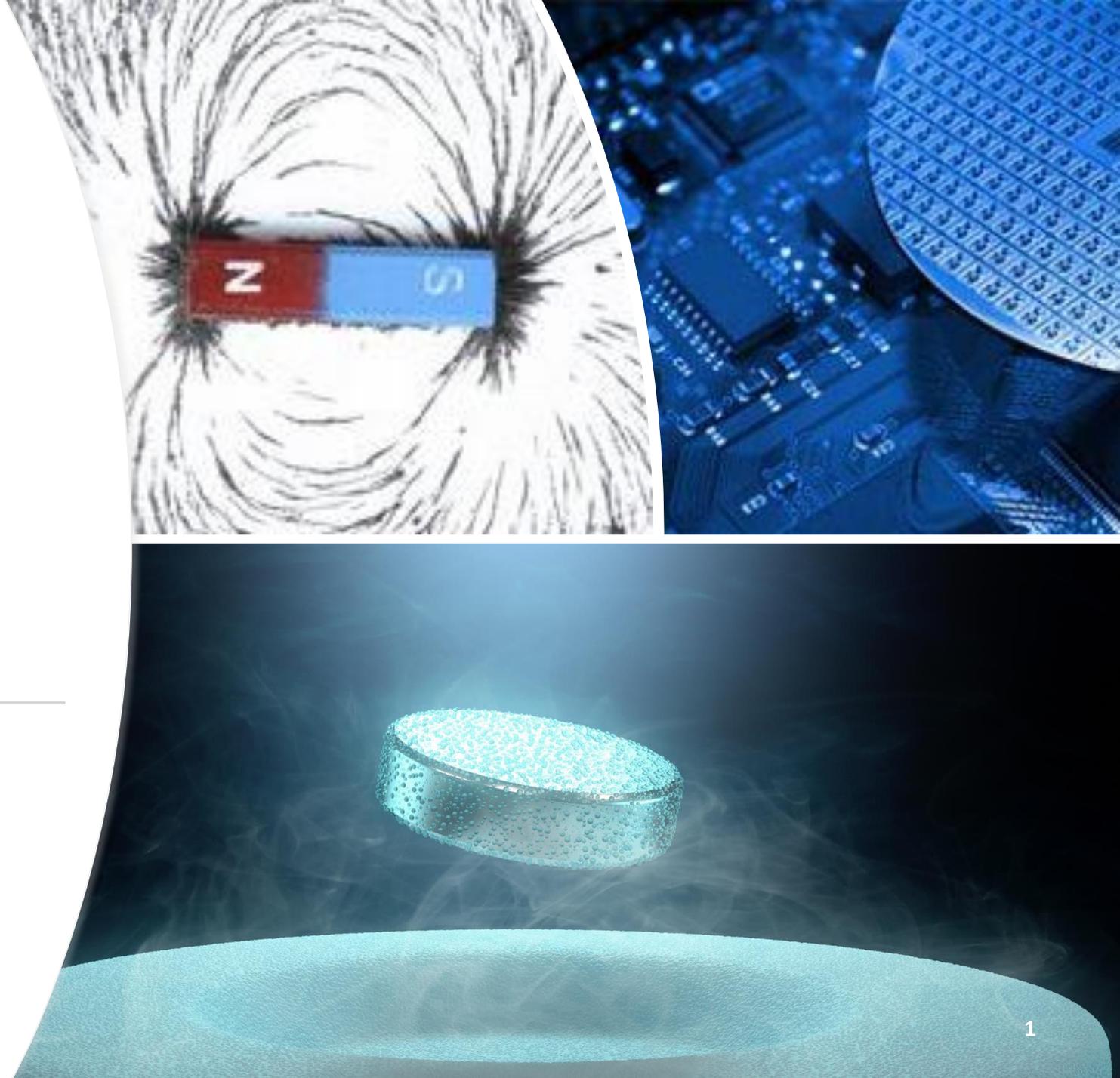




Moderne Experimentalphysik III

*Experimentelle
Festkörperphysik*

M-PHYS-106295, SoSe 2024



Letzte Vorlesung

■ Anmeldung für die Prüfung!!

■ Nächste Vorlesung:

Wiederholung / Labortours

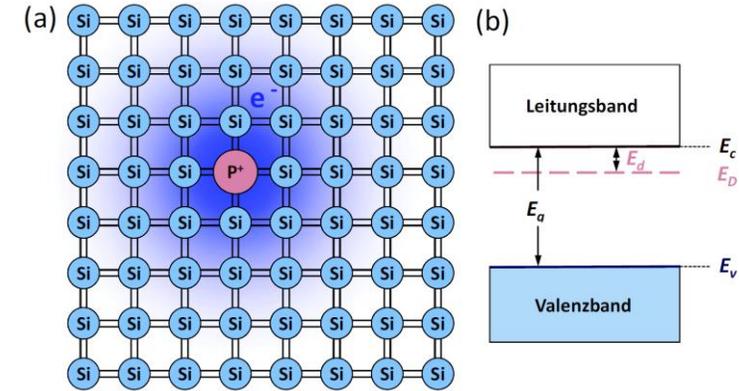
- Halbleiter-Spin Qubits (AG Wernsdorfer)
- Supraleitende Qubits & SQUID (AG Wernsdorfer / AG Pop)
- Rastertunnelmikroskopie-Labor, Spins on Surfaces / Supraleiter (AG Willke)

Wiederholung

Eigenschaften von dotierten Halbleitern

Wasserstoffmodell der Dotieratome

Temperaturabhängigkeit



$$r_d = \frac{4\pi\epsilon\epsilon_0\hbar^2}{m_e^*e^2}$$

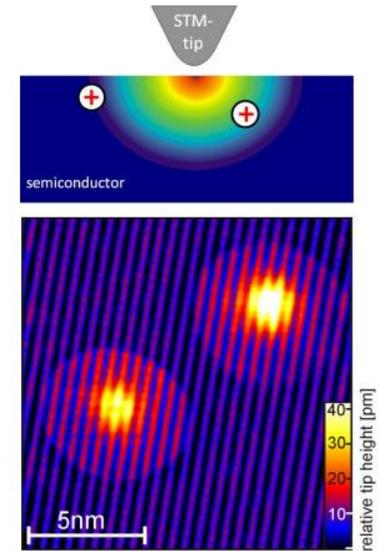
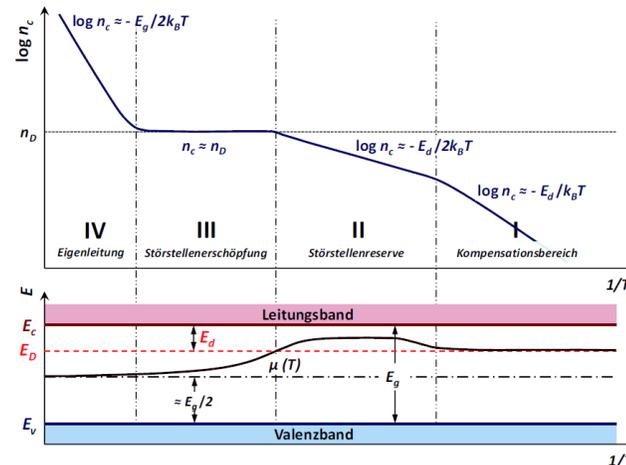


Figure 1.2: The upper image sketches two donors in GaAs and the STM tip. The colored area indicates the space charge region. The lower image shows a constant current topography of two donors. The charge switching is visible by the disk-shape of enhanced topographic height.

Lernziele

- pn-Übergang
- pn-Übergang mit angelegter Spannung
- Solarzelle
- Halbleiterheterostrukturen

Inhalt

- Dielektrische Eigenschaften von Isolatoren
- Halbleiter
- p-n-Übergang
- Niedrigdimensionale Elektronensysteme
- 1D- und 2D-Elektronengas
- Quanten-Hall Effekt
- Magnetische Eigenschaften
- Magnetismus der Leitungselektronen.
- Atomarer Magnetismus
- Magnetische Wechselwirkungen
- Ferro- und Antiferromagnetismus
- Grundbegriffe der Supraleitung
- London-Gleichungen
- Cooper-Paare
- Supraleiter 1. und 2. Art
- Josephson-Effekte

Ladungsträgerdichte in dotierten Halbleitern

- Näherungen des Ausdrucks für die LT-Dichte

$$\frac{n_c(n_c + n_A)}{n_D - n_A - n_c} = n_c^{\text{eff}} e^{-E_d/k_B T}$$

iii. Störstellenerschöpfung: $k_B T \gtrsim E_d \Rightarrow n_c \gg n_A$, $\exp(-E_d/k_B T) \simeq 1 \Rightarrow n_c^2/n_c^{\text{eff}} \simeq (n_D - n_c) \simeq 0$, da $n_c \ll n_c^{\text{eff}}$

$k_B T$ ist so groß, dass alle Elektronen von Donatoren frei gesetzt sind \rightarrow "Störstellenerschöpfung"

$$\frac{n_c(n_c + \cancel{n_A})}{n_D - \cancel{n_A} - n_c} = n_c^{\text{eff}} e^{\cancel{-E_d/k_B T}}$$

+

$$n_c \ll n_c^{\text{eff}}$$



$$n_c \simeq n_D$$



$$n_c^{\text{eff}} = 2 \left(\frac{m_{e,\text{DOS}}^* k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2}$$

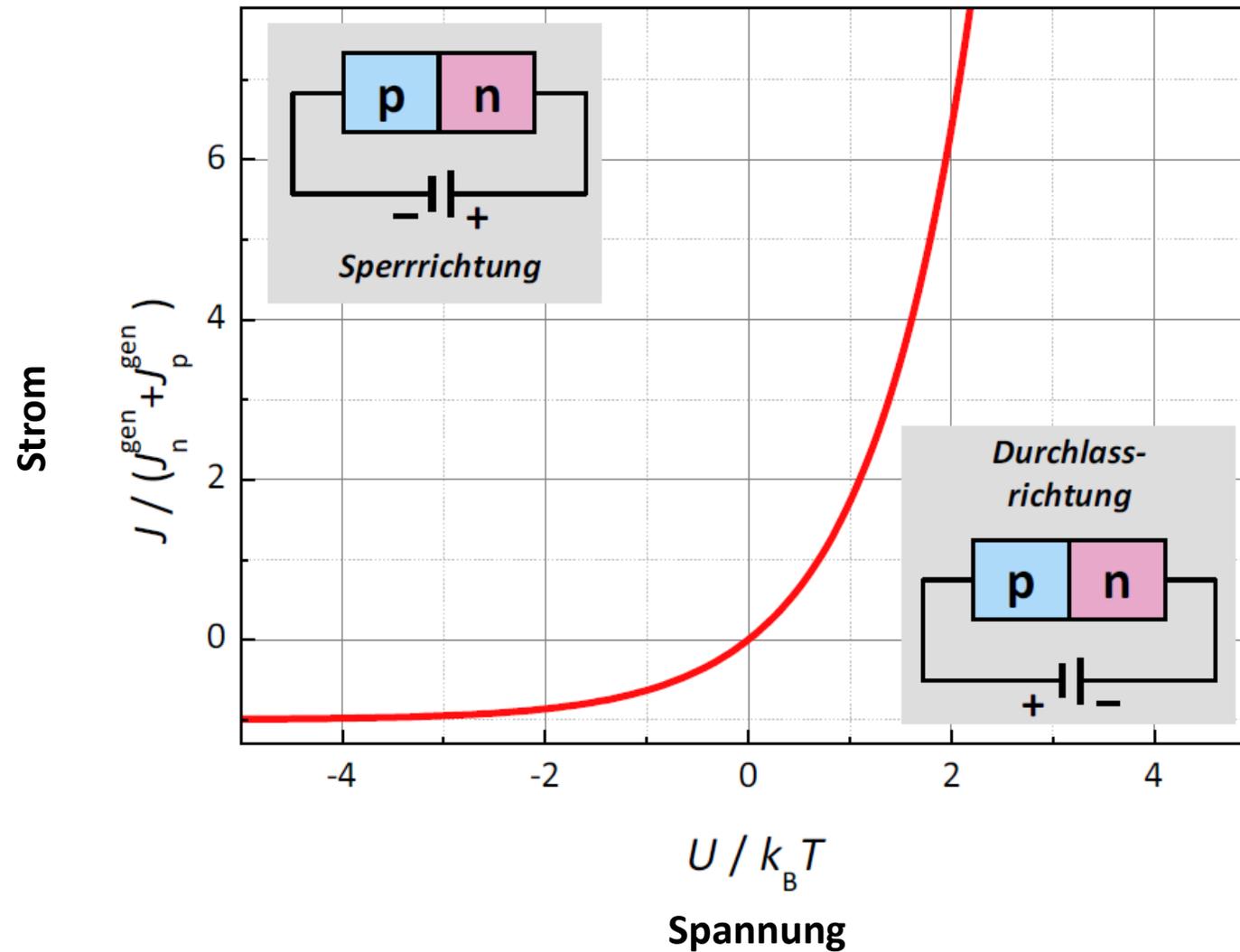
$$n_c = n_c^{\text{eff}} e^{-(E_c - \mu)/k_B T}$$

Si mit einer Phosphor-Dotierung

von $n_D = 3 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$:

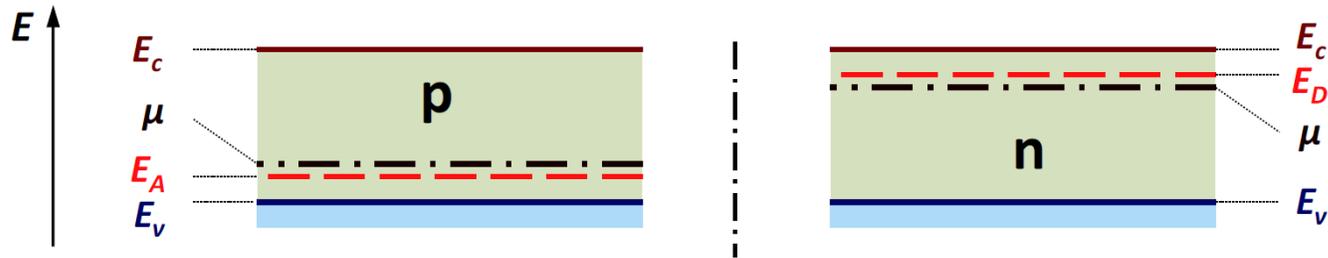
- Störstellen-Erschöpfung geht von etwa 45 K bis 500 K
- \rightarrow bei RT sind alle Donatoratome ionisiert.

pn-Übergang



pn-Übergang im thermischen Gleichgewicht

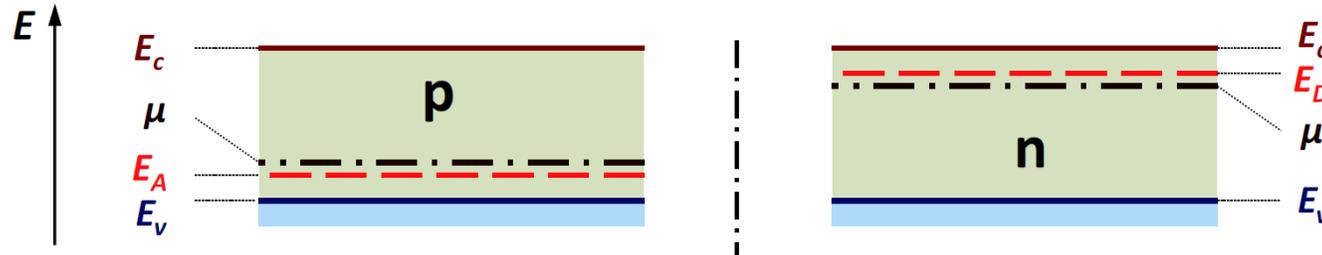
- Was passiert an Kontakt von n -Typ und p -Typ Halbleiter (z.B. n -Typ und p -Typ Silizium)



Nomenklatur:

- Majoritätsladungsträger:**
Elektronen im n -Typ und Löcher im p -Typ HL
- Minoritätsladungsträger:**
Löcher im n -Typ und Elektronen im p -Typ HL

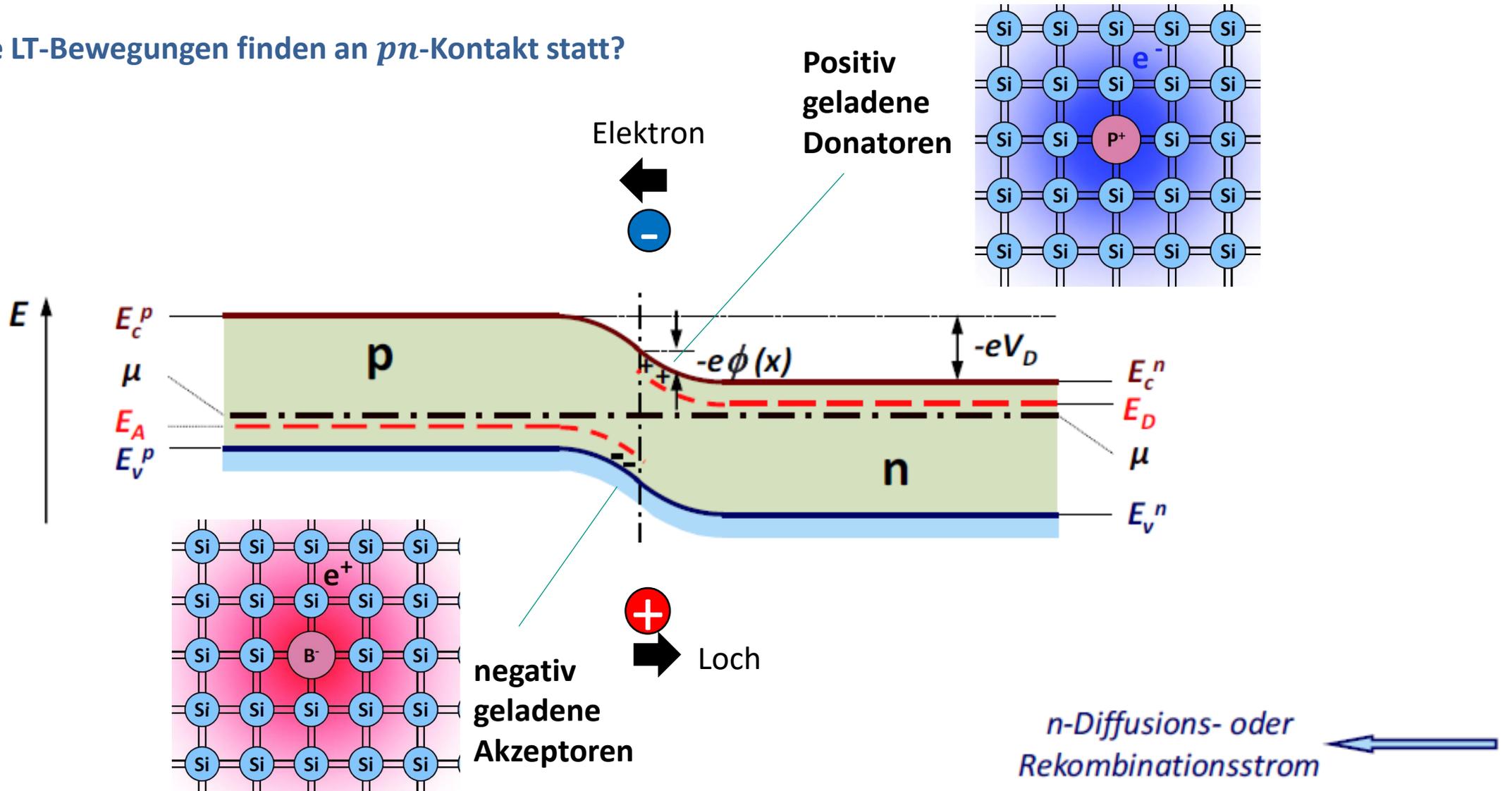
pn-Übergang im thermischen Gleichgewicht



- im getrennten Fall sind Bandkanten der beiden Halbleiter auf gleichem Niveau
- im p -Typ HL liegt chemisches Potenzial μ nahe an VB-Kante, im n -Typ HL nahe an LB-Kante, da Besetzungswahrscheinlichkeit der Loch- bzw. Elektronenzustände groß sein muss
- was passiert bei Kontakt?
 - aufgrund des **Konzentrationsgradienten** diffundieren Elektronen vom n - in den p -Typ HL und Löcher vom p - in den n -Typ HL → **Diffusionsströme**
 - die zurückbleibenden positiv (negativ) geladenen Donatoren (Akzeptoren) bilden **Raumladungszone**
 - ➔ **Driftströme** durch den damit verbundenen **elektrischen Potenzialgradienten**
 - nachdem thermisches Gleichgewicht erreicht ist, muss das chemische Potenzial μ horizontal verlaufen
 - ➔ **wie sieht dann der Verlauf der Bandkanten aus?**

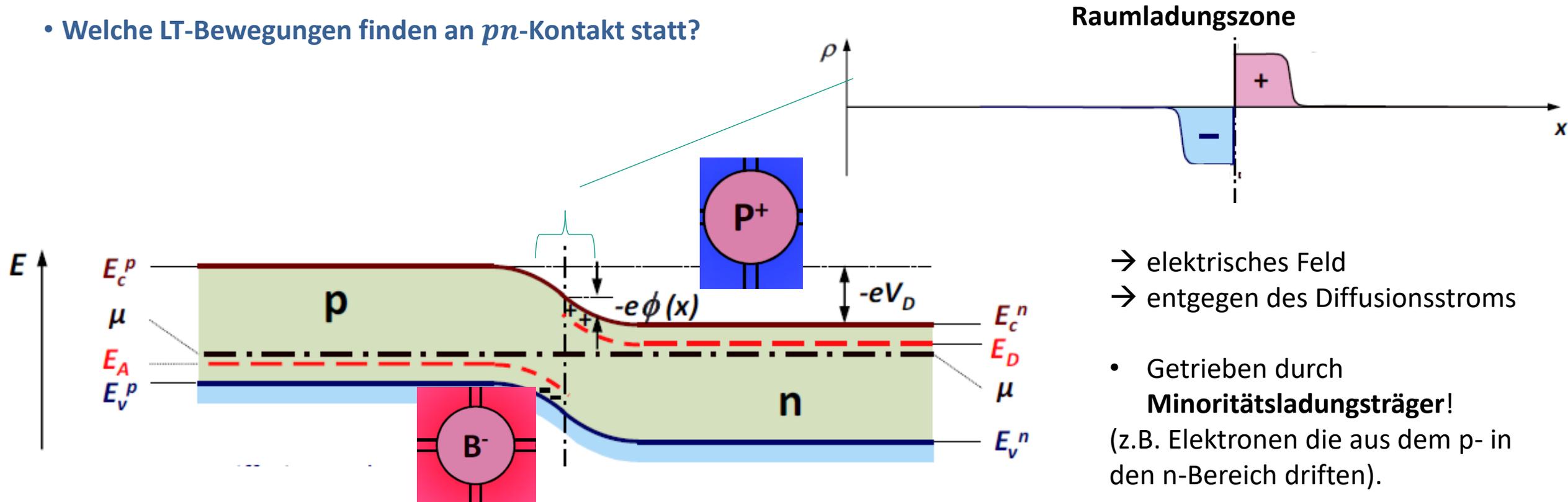
pn-Übergang im thermischen Gleichgewicht

- Welche LT-Bewegungen finden an *pn*-Kontakt statt?



pn-Übergang im thermischen Gleichgewicht

- Welche LT-Bewegungen finden an *pn*-Kontakt statt?

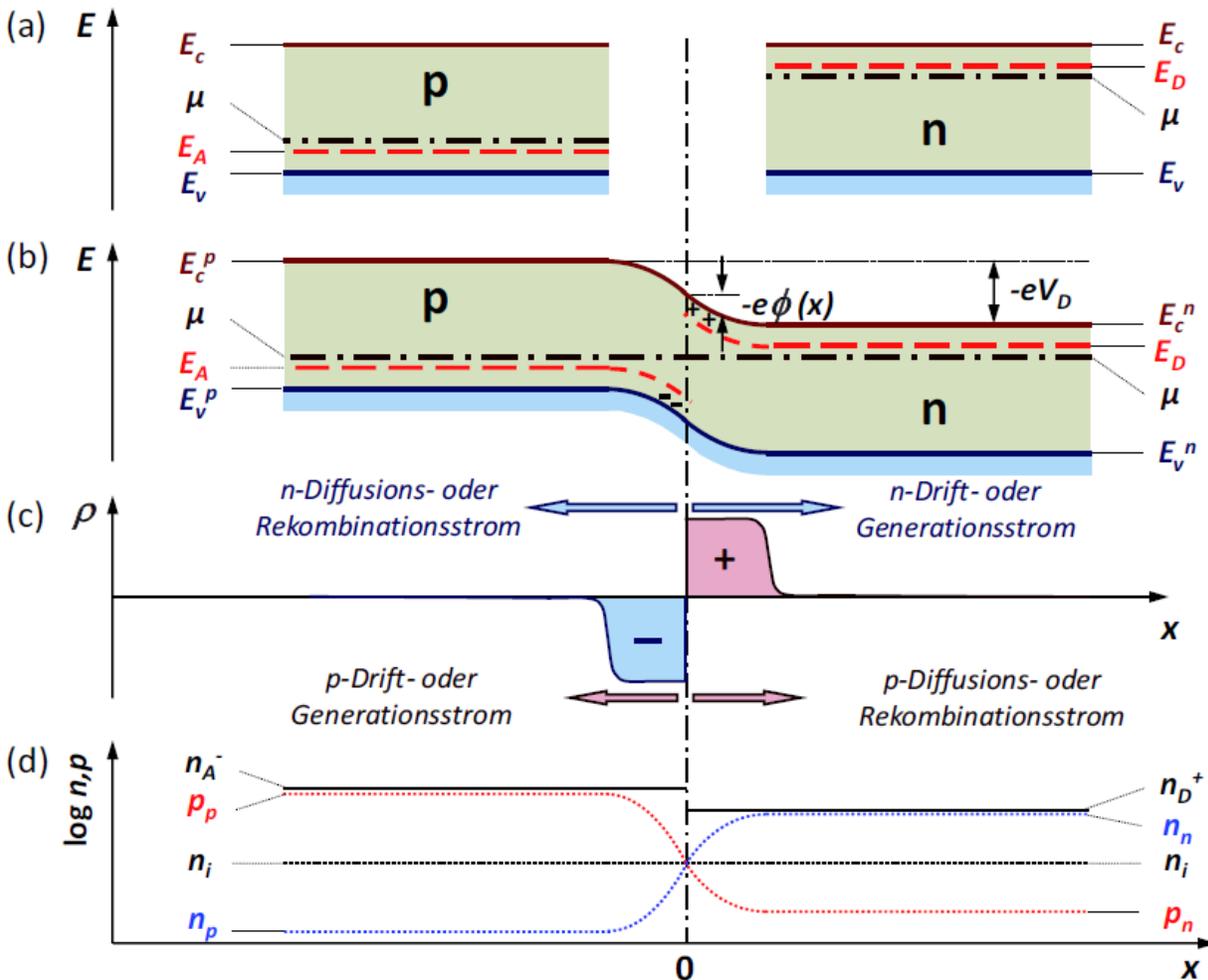


- Durch das Abwandern von Elektronen aus der Grenzschicht des n-Halbleiters entsteht dort eine positive Raumladungszone, da die ortsfesten ionisierten Donatoren dort zurückbleiben
- Entsprechend für p-Halbleiter mit Löchern

\rightarrow *n*-Drift- oder Generationsstrom

pn-Übergang im thermischen Gleichgewicht

- Welche LT-Bewegungen finden an *pn*-Kontakt statt?



- **Majoritätsladungsträger:**

- diffundieren in den jeweils anderen HL-Typ und rekombinieren dort

- ➔ **Diffusion- oder Rekombinationsstrom**

- zurückbleibende geladene Störstellen bilden Raumladungszone $\rho(x)$

- $\rho(x)$ ist mit Makropotenzial $\phi(x)$ verbunden:

$$-\nabla^2 \phi = -\frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} = \frac{\rho(x)}{\epsilon \epsilon_0}$$

- potentielle Energie der Elektronen/Löcher: $\mp e\phi(x)$

- Diffusionsspannung: $V_D = \phi(\infty) - \phi(-\infty)$

- **Minoritätsladungsträger:**

- driften in Potentialgradient (E -Feld) in Raumladungszone

- ➔ **Drift- oder Generationsstrom**

- **thermisches Gleichgewicht:**

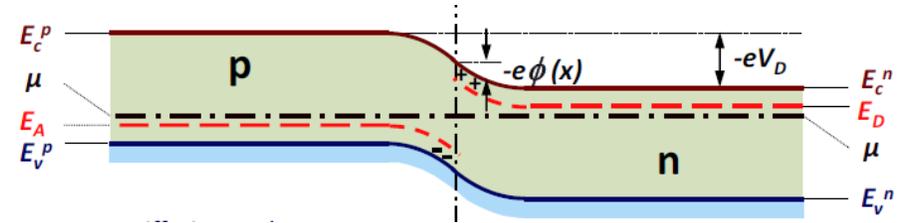
Diffusionsstrom = Driftstrom

pn-Übergang im thermischen Gleichgewicht

- Räumlicher Verlauf der Ladungsträgerkonzentration und des Makropotenzials $\phi(x)$

$$n_n(\infty) = n_c^{\text{eff}} \exp\left(-\frac{E_C^n(\infty) - \mu}{k_B T}\right)$$

$$p_p(-\infty) = p_v^{\text{eff}} \exp\left(-\frac{\mu - E_V^p(-\infty)}{k_B T}\right)$$



- Massenwirkungsgesetz (der Maj. LT im n- und p-Bereich):

$$n_i^2 = n_n \cdot p_p = n_c^{\text{eff}} p_v^{\text{eff}} \exp\left(-\frac{E_C^n - E_V^p}{k_B T}\right) = n_c^{\text{eff}} p_v^{\text{eff}} \exp\left(-\frac{[E_C - E_V] - [e\phi(\infty) - e\phi(-\infty)]}{k_B T}\right) = n_c^{\text{eff}} p_v^{\text{eff}} \exp\left(-\frac{E_g - eV_D}{k_B T}\right).$$



Diffusionsspannung:

$$eV_D = E_g + k_B T \ln\left(\frac{n_i^2}{n_c^{\text{eff}} p_v^{\text{eff}}}\right) = E_g + k_B T \ln\left(\frac{n_n p_p}{n_c^{\text{eff}} p_v^{\text{eff}}}\right)$$

pn-Übergang im thermischen Gleichgewicht

- Ladungsträgerkonzentrationen, ortsabhängig:

$$n_n(x) = n_c^{\text{eff}} \exp\left(-\frac{\overbrace{E_c^n(\infty) - e\phi(x) - \mu}^{\tilde{E}_c^n(x)}}{k_B T}\right)$$

$$p_p(x) = p_v^{\text{eff}} \exp\left(-\frac{\mu - \overbrace{E_v^p(-\infty) + e\phi(x)}^{\tilde{E}_v^p(x)}}{k_B T}\right)$$

Berechnung von $\phi(x)$ mittels Schottky-Model (Homework)

- **Einstein-Relationen** (Zusammenhang zwischen Diffusionskonstanten und Beweglichkeiten)

– Diffusionsströme: $J^{\text{diff}} = J_n^{\text{diff}} + J_p^{\text{diff}} = e \left(D_n \frac{\partial n}{\partial x} - D_p \frac{\partial p}{\partial x} \right)$

– Driftströme: $J^{\text{drift}} = J_n^{\text{drift}} + J_p^{\text{drift}} = e (n\mu_n + p\mu_p) E_x$ mit $E_x = -\partial\phi/\partial x$

- Strombeiträge der Elektronen und Löcher müssen sich einzeln kompensieren, da sonst lokale Ansammlung von Ladungen möglich wäre

$$\Rightarrow eD_n \frac{\partial n}{\partial x} = en\mu_n \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \text{und} \quad -eD_p \frac{\partial p}{\partial x} = ep\mu_p \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

pn-Übergang im thermischen Gleichgewicht

- **Schottky-Modell** der Raumladungszone

- **Annahme:**

alle Donatoren und Akzeptoren sind ionisiert

→ $n_A = n_A^-$ und $n_D = n_D^+$

→ $\rho(x) = e [n_D(x) - n_A(x) - n(x) + p(x)]$

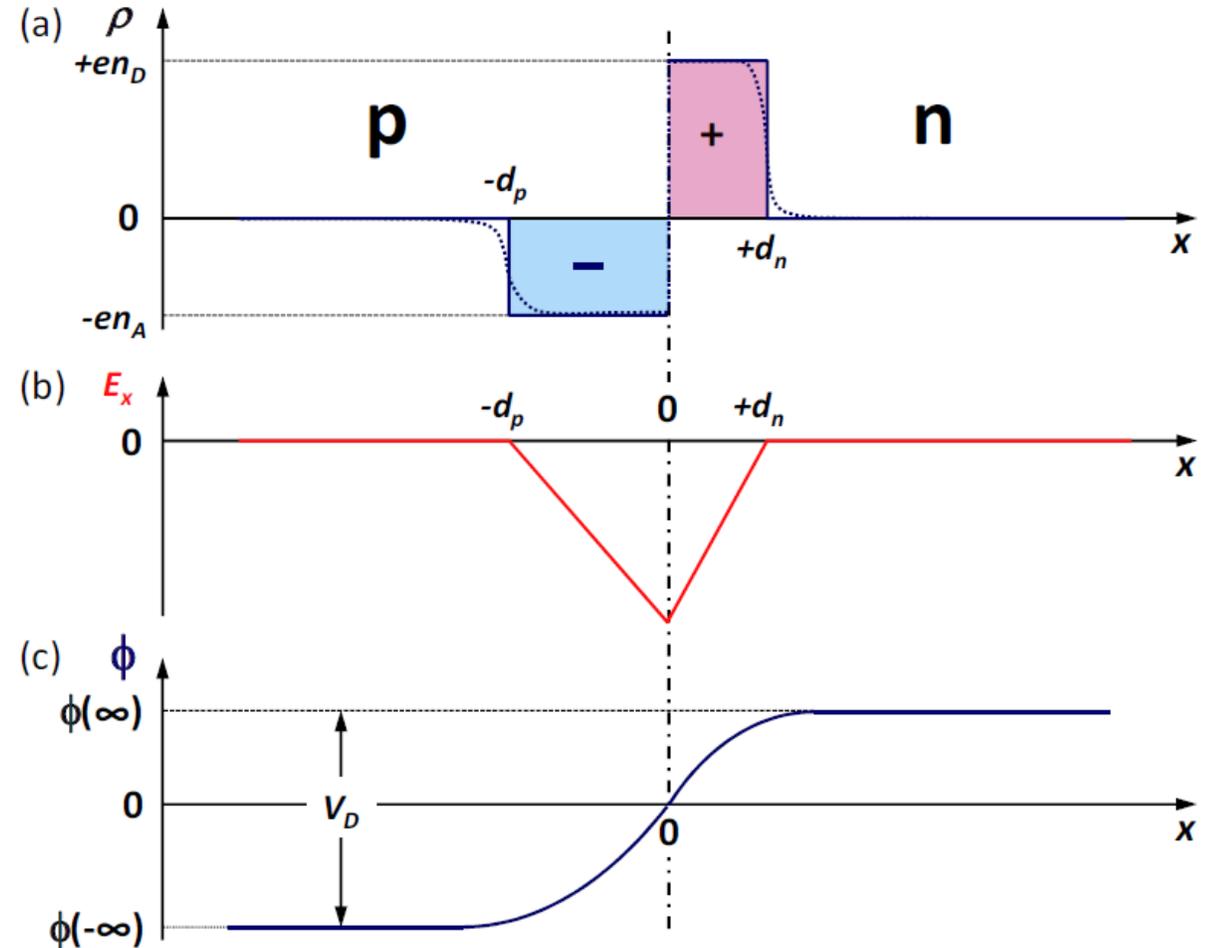
→ Berechnung von $\phi(x)$ mit Poisson-Gleichung

$$-\frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} = \frac{\rho(x)}{\epsilon \epsilon_0}$$

Problem:

Poisson-Gleichung muss numerisch gelöst werden, da $\phi(x)$ durch $\rho(x)$ bestimmt wird, $\rho(x)$ aber selbst wiederum von $\phi(x)$ abhängt

→ **selbstkonsistente Lösung**

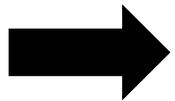


pn-Übergang im thermischen Gleichgewicht

- Schottky-Modell der Raumladungszone

Annahme 1: abrupter pn -Übergang $n_D(x)$ und $n_A(x)$ ändern sich an Grenzfläche abrupt

Annahme 2: Annäherung der Raumladungszone durch Stufenfunktion



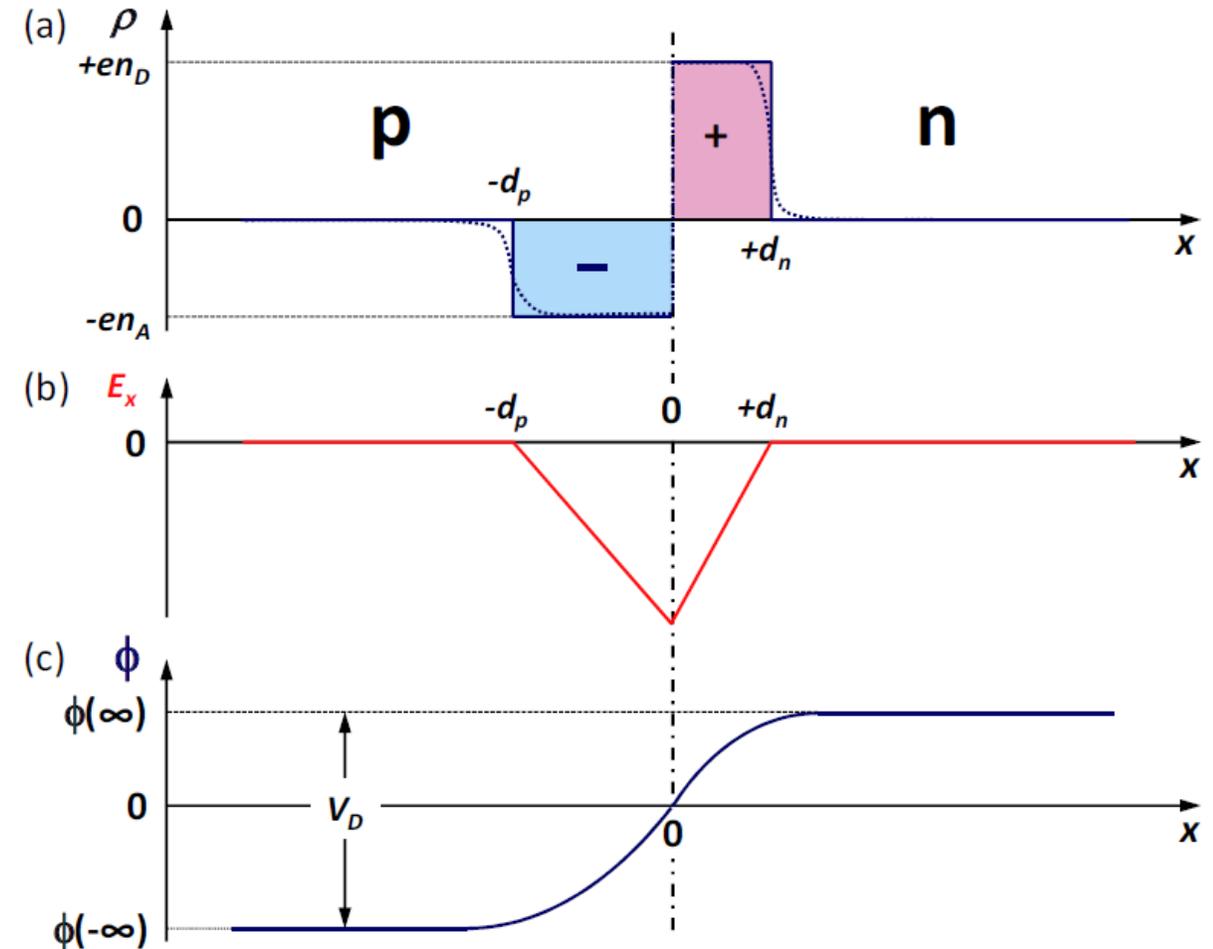
Lösung als Übungsaufgabe

- **Resultat:**

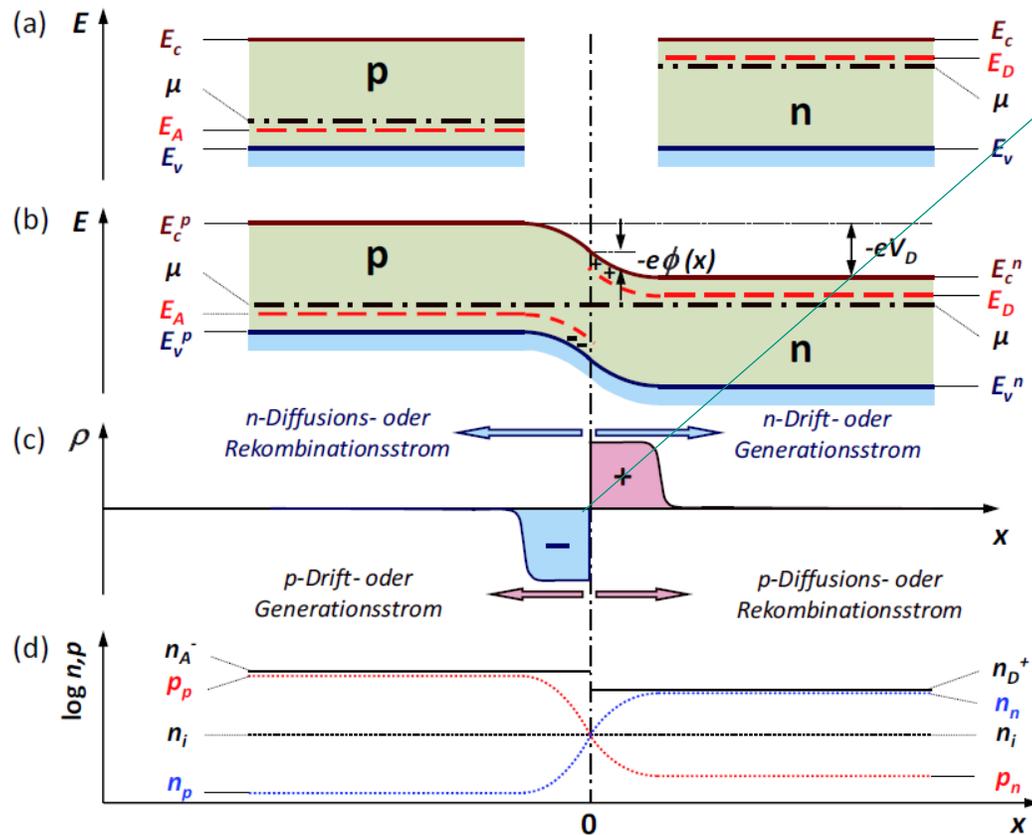
$$d_n = \left(\frac{2\epsilon\epsilon_0 V_D}{e} \frac{n_A/n_D}{n_A + n_D} \right)^{1/2}$$

$$d_p = \left(\frac{2\epsilon\epsilon_0 V_D}{e} \frac{n_D/n_A}{n_A + n_D} \right)^{1/2}$$

- Typ. zwischen 10 und 1000 nm.



pn-Übergang im thermischen Gleichgewicht



Verarmungszone

- im thermischen Gleichgewicht entsteht am p-n Übergang eine Verarmungszone mit einer Breite zwischen 10 und 1000 nm.
- Die Majoritätsladungsträger wandern in den jeweils anderen Bereich, in denen ihre Konzentration geringer ist (z.B. Die Elektronen des n-Kristalls streben in den p-Kristall und rekombinieren dort mit Löchern).
- Durch diese Ladungsträgerbewegung und -rekombination fehlen nun auf beiden Seiten Ladungsträger,
 → die Bereiche „**verarmen**“ an Ladungsträgern.
 → Fast die gesamte angelegte Spannung fällt über die Verarmungszone ab

pn-Übergang mit angelegter Spannung

Wie ändert sich Breite der Raumladungszone mit angelegter Spannung U ?

- **Annahme:** gesamte Spannung fällt über Raumladungszone ab, außerhalb ist $\phi(x) = \text{const.}$
- Potenzialänderung über Raumladungszone: $\phi(+\infty) - \phi(-\infty) = V_D - U$
- Dies ändert die Lösung des Schottky-Models:

$$V_D \rightarrow V_D - U$$

$$d_n = \left(\frac{2\epsilon\epsilon_0 V_D}{e} \frac{n_A/n_D}{n_A + n_D} \right)^{1/2}$$

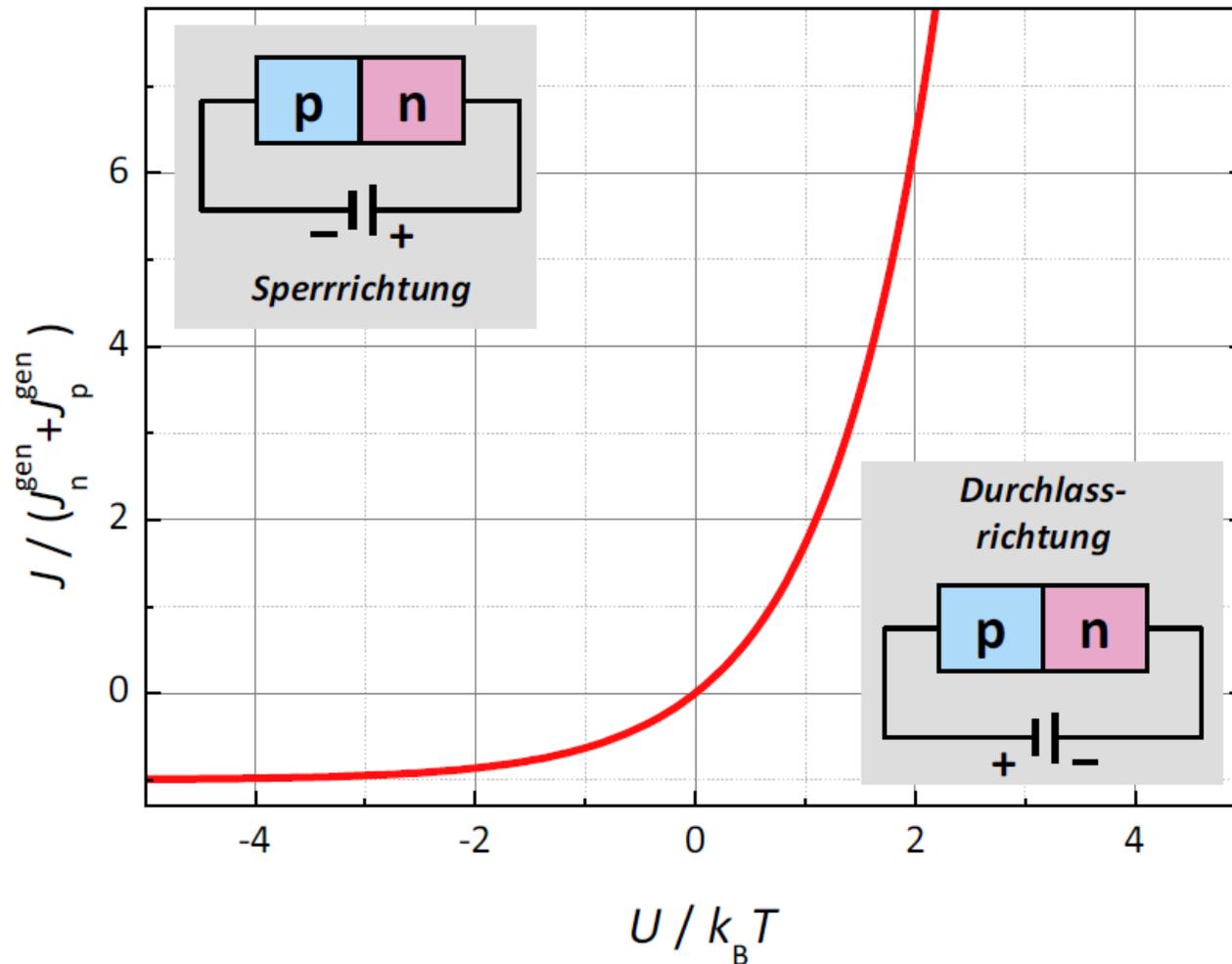
$$d_n = d_n(U=0) \left(1 - \frac{U}{V_D} \right)^{1/2}$$

$$d_p = \left(\frac{2\epsilon\epsilon_0 V_D}{e} \frac{n_D/n_A}{n_A + n_D} \right)^{1/2}$$

$$d_p = d_p(U=0) \left(1 - \frac{U}{V_D} \right)^{1/2}$$

- d_n und d_p werden **klein** für **positive Spannungen** \rightarrow **Durchlass-Richtung**
- d_n und d_p werden **groß** für **negative Spannungen** \rightarrow **Sperr-Richtung**

Strom-Spannungs-Kennlinie von pn-Kontakten



Strom-Spannungs-
Charakteristik eines p-n-Kontakts.
Der maximale Strom in
Sperrichtung ist durch die Summe
der Generationsströme für die
Elektronen und Löcher gegeben.

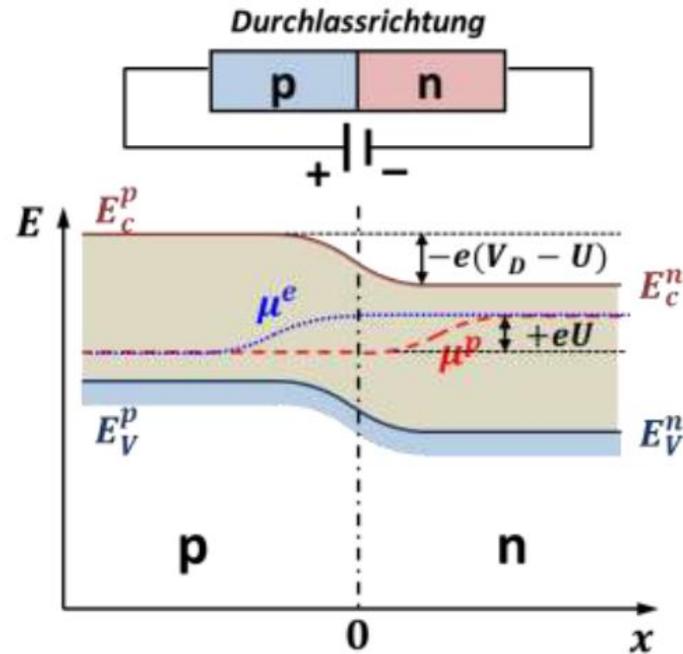
pn-Übergang mit angelegter Spannung

Wie ändert sich Breite der Raumladungszone mit angelegter Spannung U ?

- **Annahme:** gesamte Spannung fällt über Raumladungszone ab, außerhalb ist $\phi(x) = const.$
- Potenzialänderung über Raumladungszone: $\phi(+\infty) - \phi(-\infty) = V_D - U$

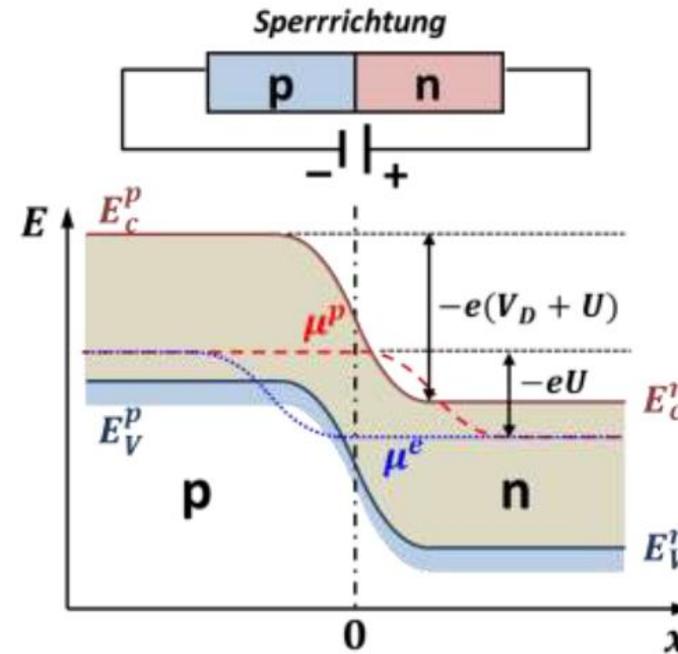
$U > 0$: + Pol an p -Typ HL

- pot. Energie der Elektronen wird im p -Gebiet um $(-e)(+U)$ abgesenkt bzw. im n -Gebiet um $(-e)(-U)$ angehoben



$U < 0$: – Pol an p -Typ HL

- pot. Energie der Elektronen wird im p -Gebiet um $(-e)(-U)$ angehoben bzw. im n -Gebiet um $(-e)(+U)$ abgesenkt



Strom-Spannungs-Kennlinie von pn-Kontakten

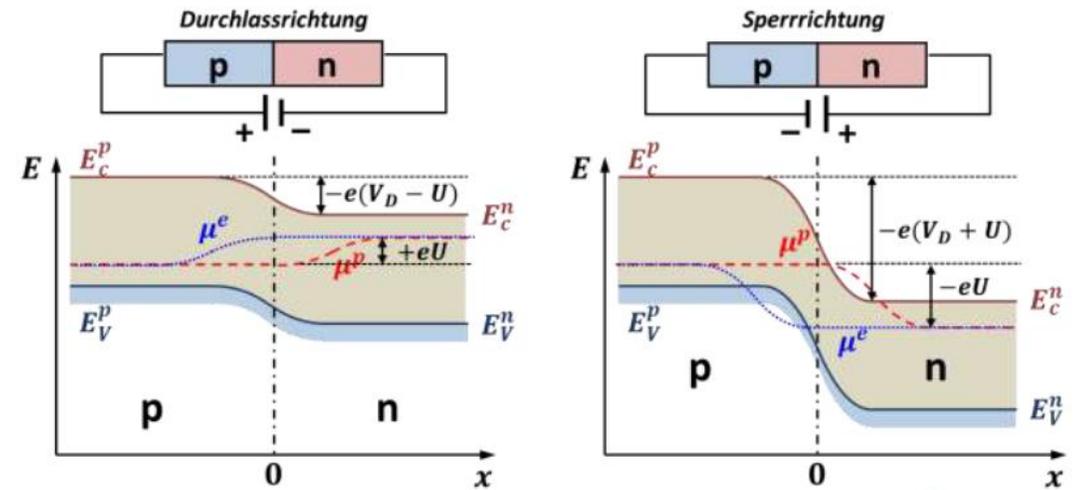
- Strom-Spannungs-Kennlinie von *pn*-Kontakt

i. Majoritätsladungsträger:

abhängig vom Vorzeichen von U wird Potentialschwelle $eV_D - U$ für *Diffusions- bzw. Rekombinationsstrom* der Majoritäts-LT erniedrigt (+) oder erhöht (-)

→ Beschreibung mit **Boltzmann-Faktor**

$$J_n^{\text{rec}} = C \cdot \exp\left(-\frac{e(V_D - U)}{k_B T}\right)$$



ii. Minoritätsladungsträger:

Generationstrom der Minoritäts-LT ist unabhängig von U : $J_n^{\text{gen}}(U) = J_n^{\text{gen}}(0)$ (LT fließen Potentialschwelle hinunter)

für $U = 0$ muss gelten: $|J_n^{\text{gen}}(0)| = |J_n^{\text{rec}}(0)| = C \cdot \exp\left(-\frac{eV_D}{k_B T}\right) \rightarrow C = |J_n^{\text{gen}}| \exp\left(+\frac{eV_D}{k_B T}\right)$

→ $J_n^{\text{rec}}(U) = |J_n^{\text{gen}}| \exp\left(+\frac{eU}{k_B T}\right)$

→ $J_n = J_n^{\text{rec}} - J_n^{\text{gen}} = J_n^{\text{gen}} \left(e^{eU/k_B T} - 1 \right)$

gleiches Ergebnis für $J_p(U)$

Strom-Spannungs-Kennlinie von pn-Kontakten

- Strom-Spannungs-Kennlinie

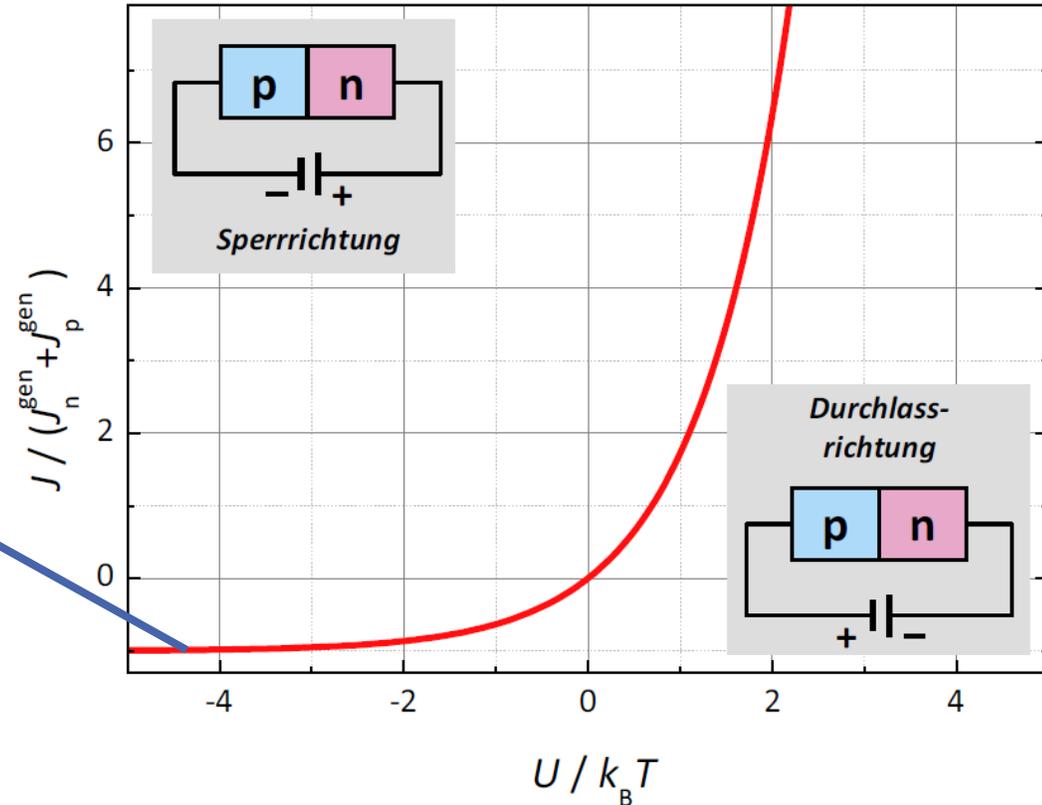
- Gesamtstromdichte $J(U) = J_n(U) + J_p(U)$

$$J(U) = \underbrace{(|J_n^{\text{gen}}| + |J_p^{\text{gen}}|)}_{\text{Sättigungsstrom } J_s \text{ in Sperrrichtung}} \left[\exp\left(+\frac{eU}{k_B T}\right) - 1 \right]$$

Sättigungsstrom J_s in Sperrrichtung

- ohne Herleitung:

$$J_s = |J_n^{\text{gen}}| + |J_p^{\text{gen}}| = \frac{eD_n}{L_n} n_p + \frac{eD_p}{L_p} p_n$$



Die Solarzelle

Aufbau und prinzipielle Funktionsweise

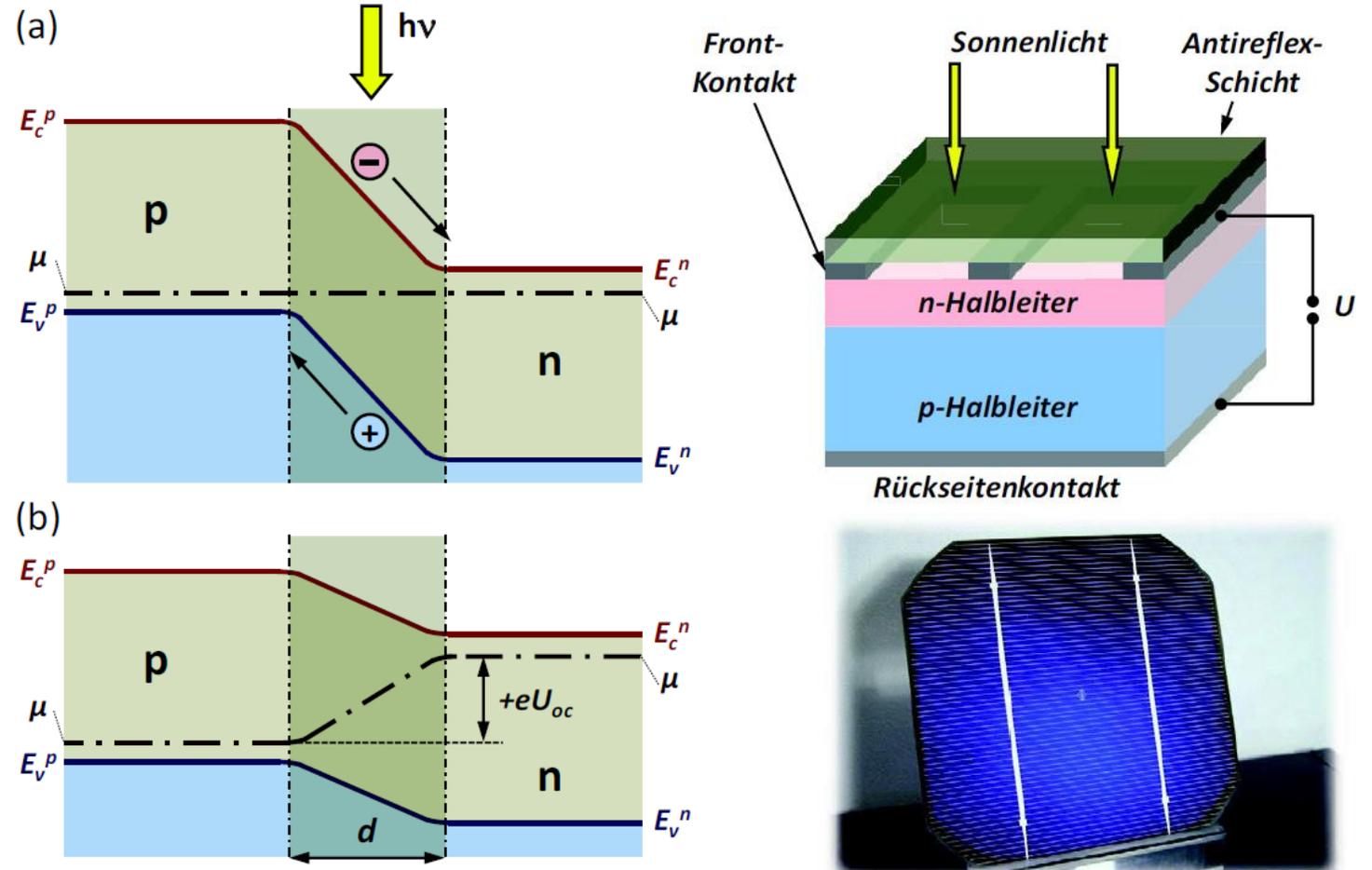
typischer Aufbau einer Si-Solarzelle

- dünne hochdotierte ($\approx 10^{19} \text{cm}^{-3}$) n -Schicht
- dicke niedrigdotierte p -Schicht (RL sollte breiter als Absorptionslänge sein)
- Anti-Reflexionsschicht
- Vorder- und Rückseitenkontakt

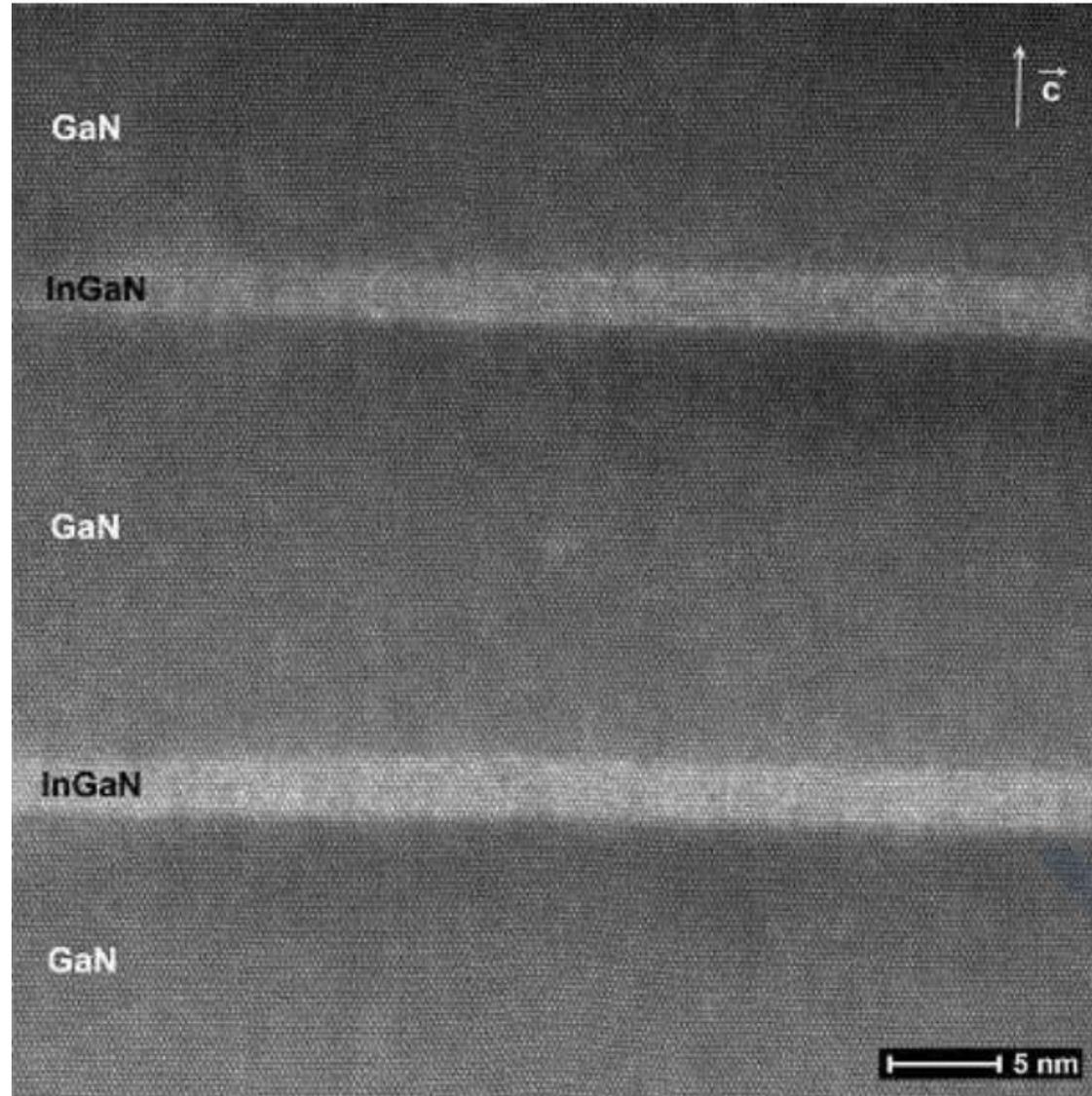
Funktionsweise

- Erzeugung von e-h-Paaren in RL-Zone
- Trennung von e und h durch E -Feld in RL-Zone \rightarrow zusätzlicher Driftstrom I_L von Minoritäts-LT
- angesammelte Ladung führt zu Potenzialdifferenz eU_{oc} ohne externe Last (open circuit Spannung)

positive Spannung U_{oc} über pn-Kontakt 

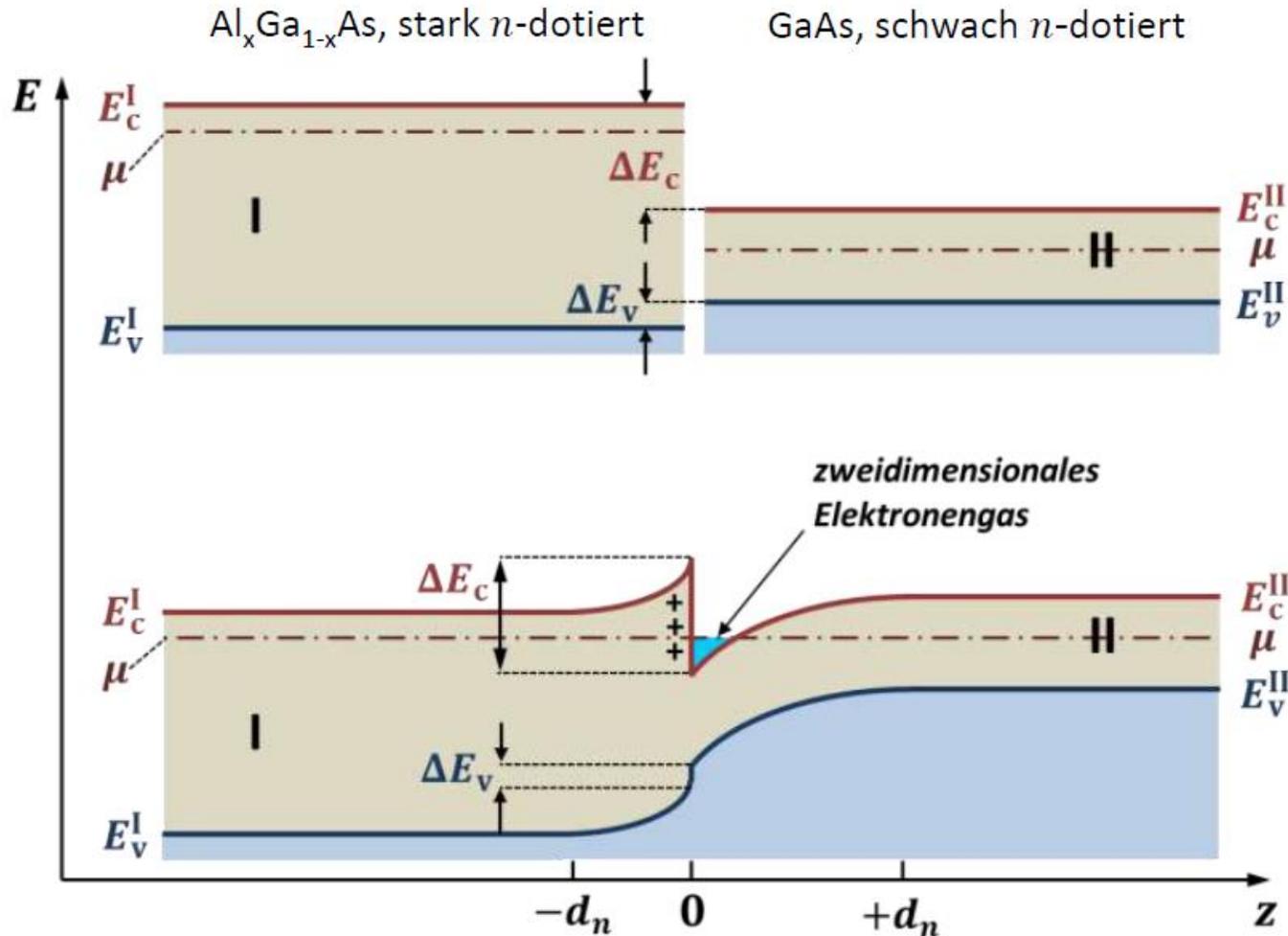


Halbleiter-Heterostrukturen



Halbleiter-Heterostrukturen

- Beispiel: isotypische Halbleiter-Heterostruktur (z.B. $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}/\text{GaAs}$)



- **Isotypisch**

Gleicher HL-Typ (n- oder p-Typ)

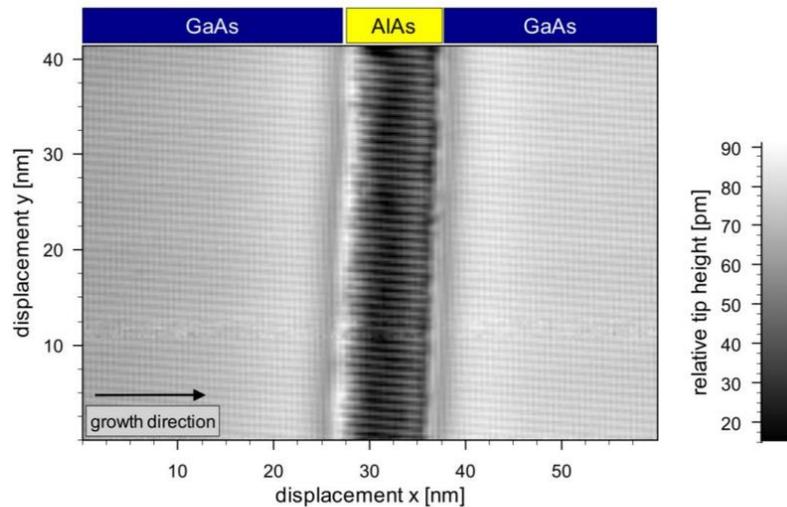
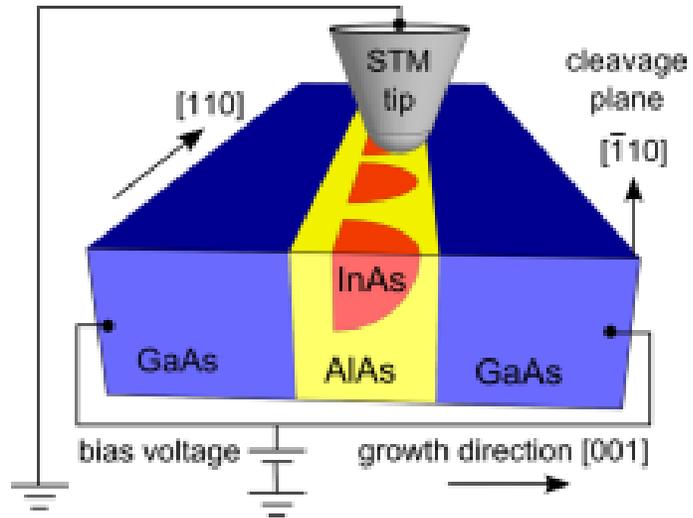
- **Bandverbiegung**

Resultiert in 2DEG im schwach dotierten HL

→ sehr hohe Beweglichkeit, da keine Streuung an Störstellen $\mu > 10^6 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ bei tiefen T

→ HEMT (High Electron Mobility Transistor)

Halbleiter-Heterostrukturen



- GaAs / AlAs / GaAs Heterostruktur: Scharfe Änderung der Bandstruktur

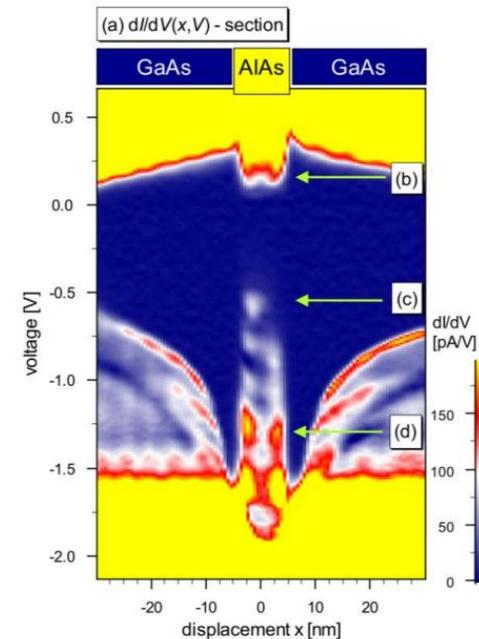
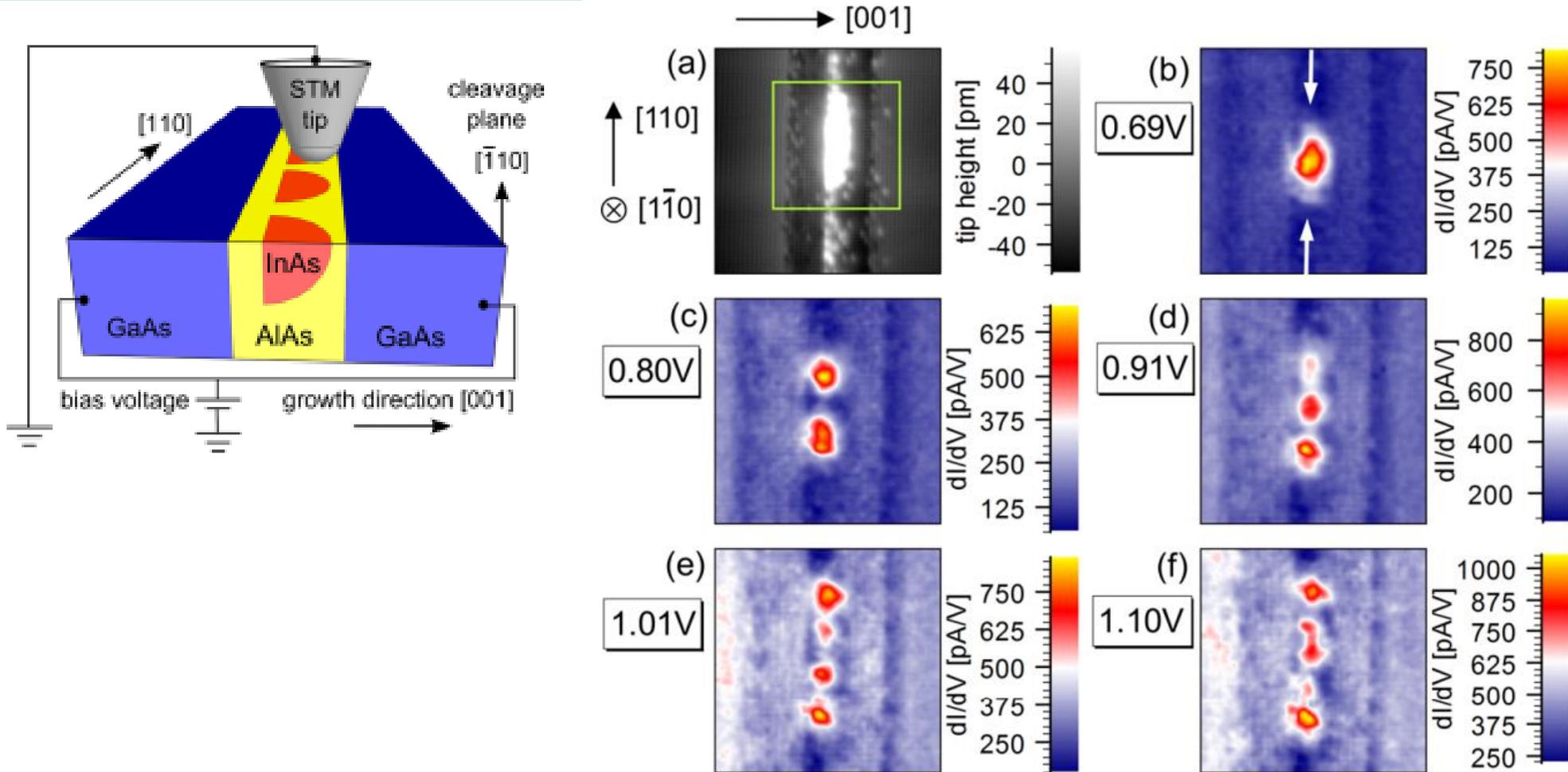
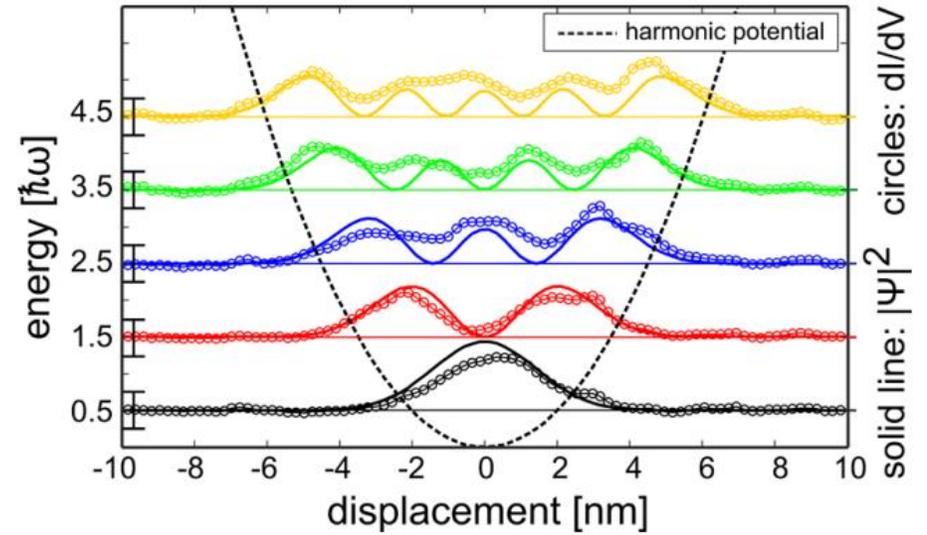
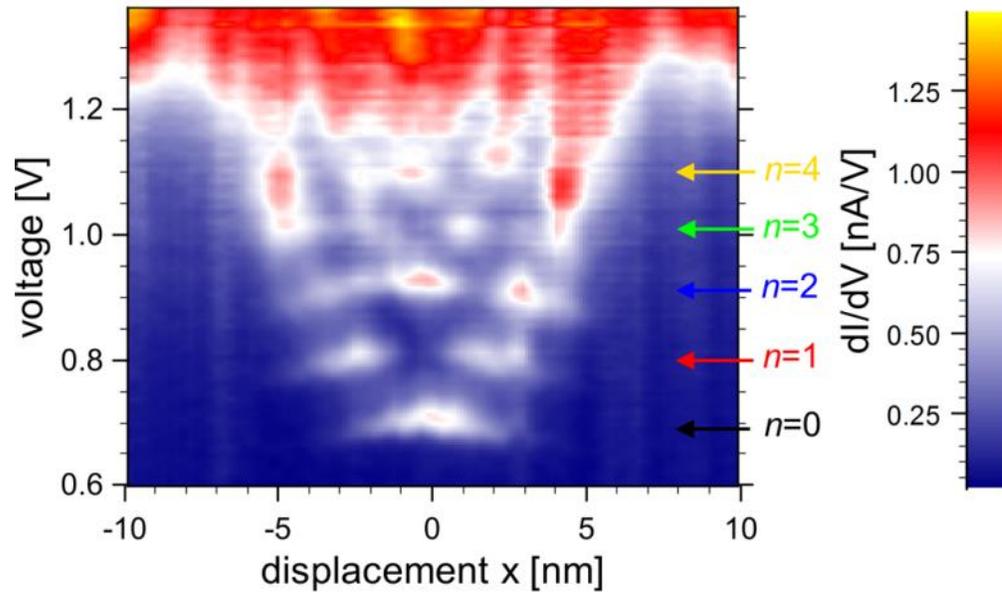


Figure 4.3: Constant current topography of the AlAs layer (marked yellow at the top of the image) embedded in GaAs (marked blue) taken at a setpoint of -2V and 0.1nA.

Niederdimensionale Elektronensysteme



Niederdimensionale Elektronensysteme



$$X_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{\omega m^*}} \quad \psi_n = (2^n n! \sqrt{\pi} X_0)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{X_0}\right)^2\right) H_n\left(\frac{x}{X_0}\right)$$