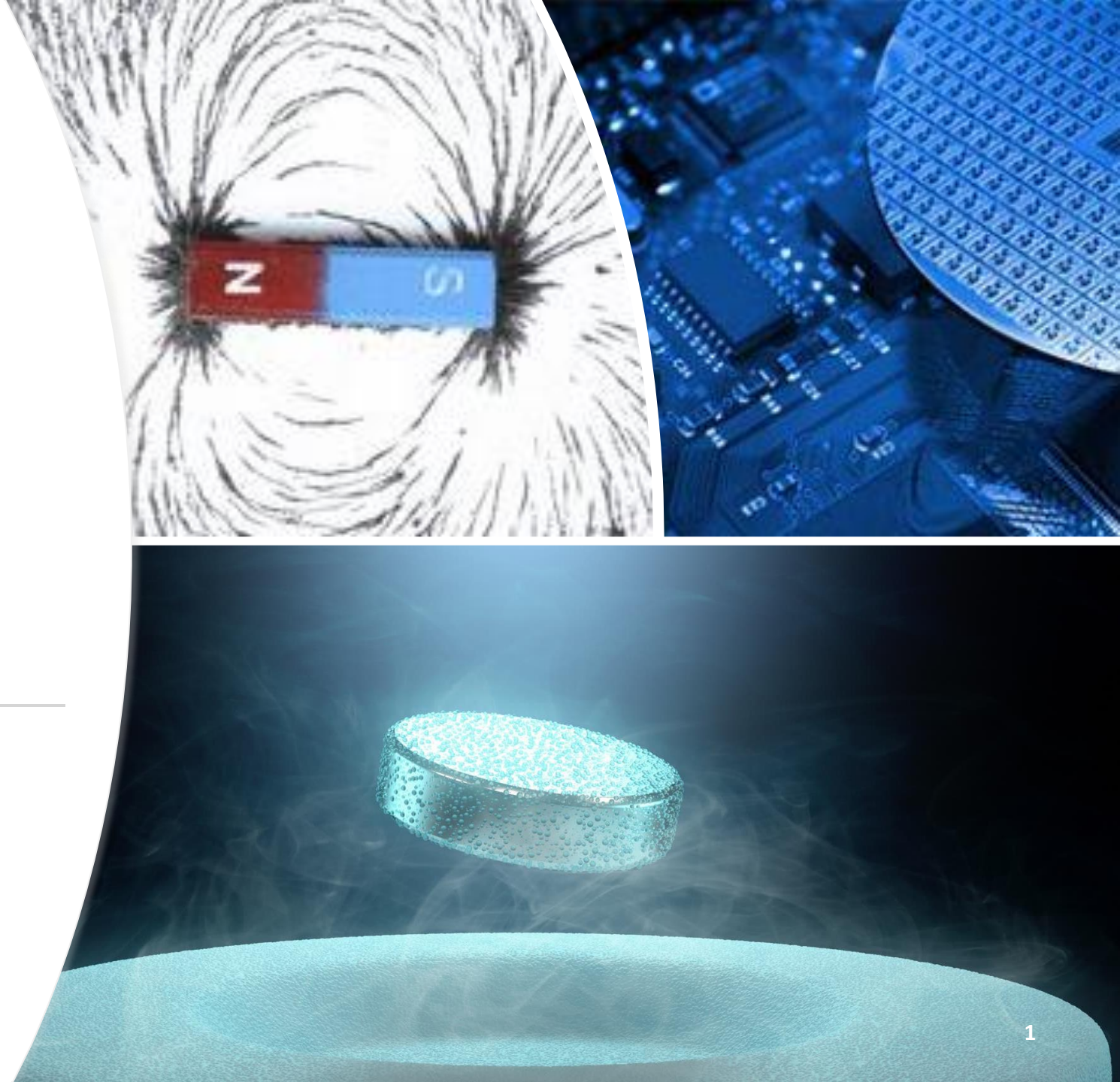




Moderne Experimentalphysik III

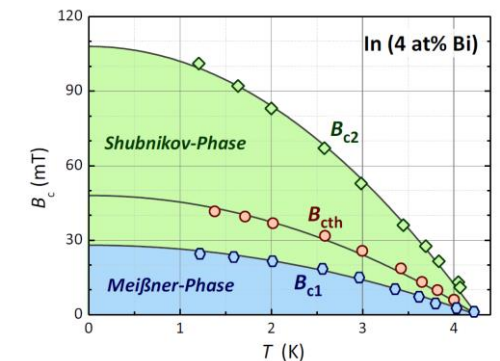
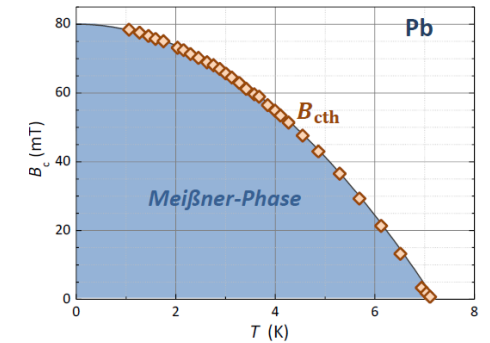
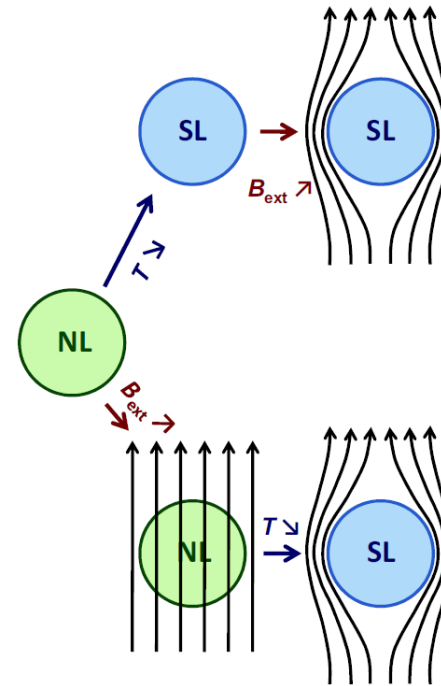
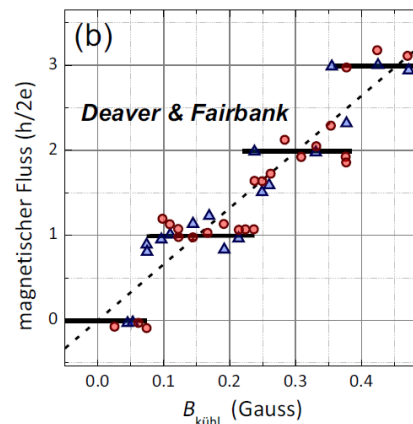
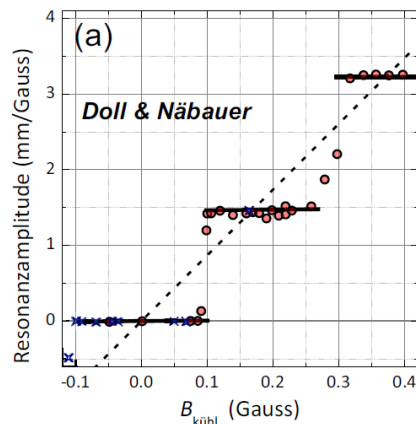
Experimentelle Festkörperphysik

M-PHYS-106295, SoSe 2024



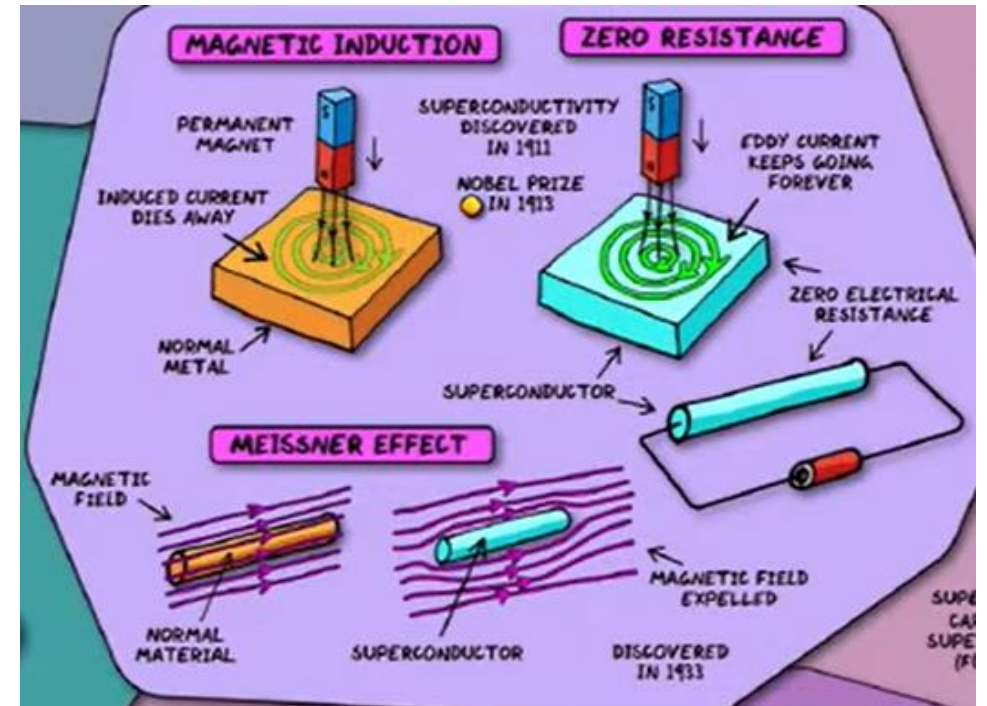
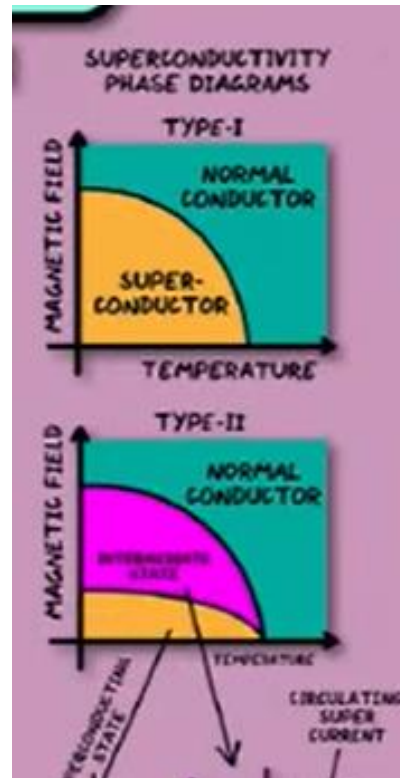
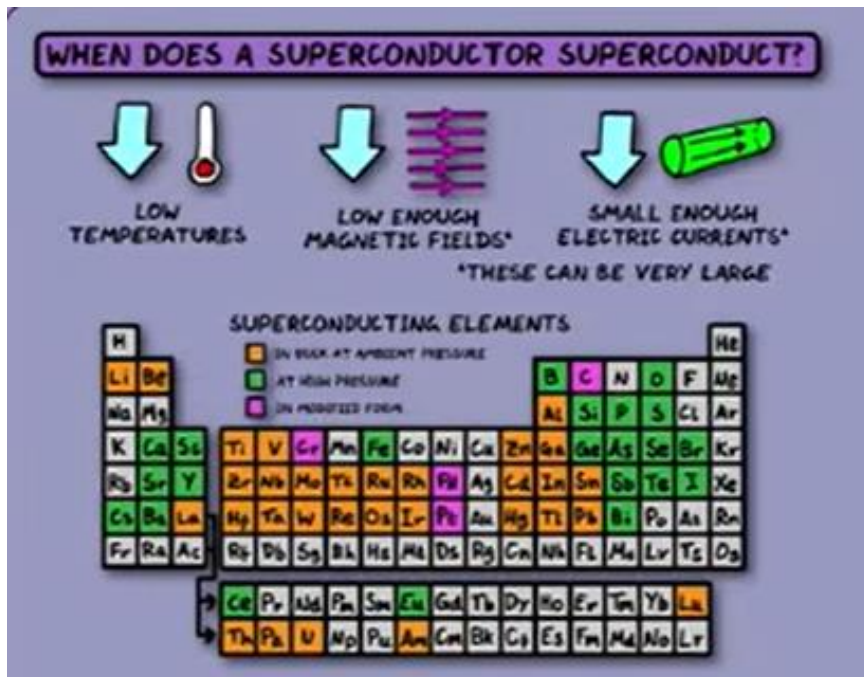
Wiederholung

- Supraleitung führt zu widerstandslosem Stromtransport bei tiefen Temperaturen
- Supraleiter sind perfekte Diamagneten (Meissner-Effekt)
- Typ I und Typ II Supraleiter
- Flussquantisierung



Wiederholung

- Supraleitung führt zu widerstandslosem Stromtransport bei tiefen Temperaturen
- Supraleiter sind perfekte Diamagneten (Meissner-Effekt)
- Typ I und Typ II Supraleiter
- Flussquantisierung



<https://www.youtube.com/watch?v=bD2M7P6dTVA>

1.1 Einführung: Historie der Supraleitung

Entdeckung und Erklärung der Phänomene Supraleitung & Suprafluidität wurden mit vielen Nobelpreisen ausgezeichnet

- **1908:** Verflüssigung von Helium, 4.2 K (**Kamerlingh Onnes**)
- **1911:** Entdeckung der Supraleitung (**Kamerlingh Onnes**)
- **1933:** Meißner-Ochsenfeld-Effekt (Meißner & Ochsenfeld)
- **1935:** London Theorie (phänomenologische Beschreibung der SL (Fritz & Heinz London))
- **1936:** Typ-II Supraleitung (Shubnikov)
- **1939:** Entdeckung von suprafluidem ^4He (**Kapitza**, Allen & Misener)
- **1952:** Ginzburg-Landau-Theorie (**Ginzburg & Landau**)
- **1957:** Abrikosov-Theorie für Typ-II SL (**Abrikosov**)
- **1957:** BCS Theorie (**Bardeen, Cooper & Schrieffer**)
- **1961:** Entdeckung der Fluss-Quantisierung (Doll & Näbauer, Deaver & Fairbank)
- **1962:** Vorhersage von Cooper-Paar Tunneln: Josephson-Effekt (**Josephson, Giaever**)
- **1966:** Entwicklung von supraleitenden Quanteninterferometern (Clarke)
- **1971:** Entdeckung von suprafluidem ^3He (**Lee, Richardson & Osheroff**)
- **1975:** Theoretische Beschreibung von ^3He (**Leggett**)
- **1979:** Entdeckung der Schwere-Fermionen-Supraleiter (Steglich)
- **1981:** Entdeckung der organischen Supraleiter (Bechgaard)
- **1986:** Entdeckung der Hochtemperatur-Supraleitung (**Bednorz & Müller**)
- **2006:** Entdeckung der FeAs-Supraleiter (Hosono)

Lernziele

Phänomenologische Modelle

- **I. London-Modell (Zweiflüssigkeiten-Modell)**
- **II. Supraleitung als makroskopisches Quantenphänomen**
- **III. Ginzburg-Landau Theorie**

Entwicklung der ersten mikroskopischen Theorie der Supraleitung dauerte mehr als 45 Jahre

→ zuerst Beschreibung mit phänomenologischen Modellen



London Modell

- Beschreibung der perfekten Leitfähigkeit und des Meißner-Ochsenfeld-Effekts mit London-Gleichungen (1935)

Ausgangspunkt ist Bewegungsgleichung für Ladungsträger mit Masse m und Ladung q und mittlerer Streuzeit τ

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{\mathbf{v}}{\tau} = q \mathbf{E}$$

(führt normalerweise zum Drude Modell)

Annahme: Wir können Ladungsträger in „**zwei Flüssigkeiten**“ aufteilen

$$n = n_s + n_n \quad \begin{array}{ll} \text{mit } n_n \rightarrow 0 \text{ und } n_s \rightarrow n & \text{für } T \rightarrow 0 \\ \text{mit } n_n \rightarrow n \text{ und } n_s \rightarrow 0 & \text{für } T \rightarrow T_c \end{array}$$

m_s : Masse (effektive Masse)
 q_s : Ladung
 n_s : Cooper-Paar-Dichte

für Supraflüssigkeit wird $\tau \rightarrow \infty$ angenommen, damit $\sigma_s = n_s q_s^2 \tau / m_s \rightarrow \infty$

mit allgemeinem Ausdruck $\mathbf{J}_s = n_s q_s \mathbf{v}_s$ ergibt sich sofort die **1. London-Gleichung**

$$\frac{m_s}{q_s^2 n_s} \frac{\partial \mathbf{J}_s}{\partial t} = \mathbf{E}$$

mit $\Lambda = m_s / n_s q_s^2$ = London-Koeffizient

→ beschreibt **widerstandslosen Stromtransport**



London Modell

- mit Faraday'schem Induktionsgesetz $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{b} / \partial t$ ergibt sich mit 1. London-Gleichung

“Lokale” Flussdichte $\mathbf{b}$

$$\frac{\partial(\Lambda \mathbf{J}_s)}{\partial t} = \mathbf{E} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \times (\Lambda \mathbf{J}_s) + \mathbf{b}] = 0$$

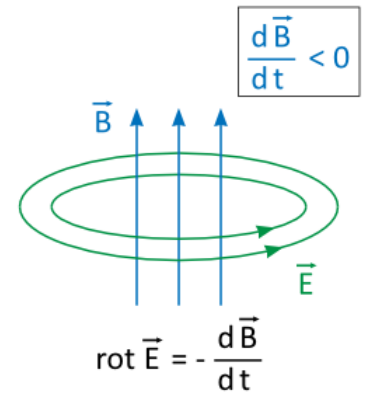
Gleichung gilt allgemein für alle idealen Leiter:
magnetischer Fluss durch eine beliebige Fläche innerhalb bleibt zeitlich unverändert

- Beobachtung von Meißner-Ochsenfeld-Effekt
 - in Supraleiter muss nicht nur die zeitliche Änderung der Flussdichte, sondern diese selbst verschwinden
 - Klammerausdruck $[\]$ selbst und nicht nur seine Zeitableitung muss verschwinden

2. London-Gleichung

$$\nabla \times (\Lambda \mathbf{J}_s) + \mathbf{b} = 0 \quad \rightarrow \quad \text{beschreibt } \textbf{perfekte Feldverdrängung}$$

zusammen mit den Maxwell-Gleichungen beschreiben die beiden London-Gleichungen das Verhalten von Supraleitern in elektrischen und magnetischen Feldern



London Modell

Londonsche Eindringtiefe

Rotation der 2. London-Gleichung:

$$\nabla \times (\Lambda \mathbf{J}_s) + \mathbf{b} = 0 \Rightarrow \nabla \times \left(\frac{\Lambda}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{b} \right) + \mathbf{b} = 0 \Rightarrow \mathbf{b} = -\frac{\Lambda}{\mu_0} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{b})$$

$$\nabla \times \mathbf{b} = \mu_0 \mathbf{J}_s$$

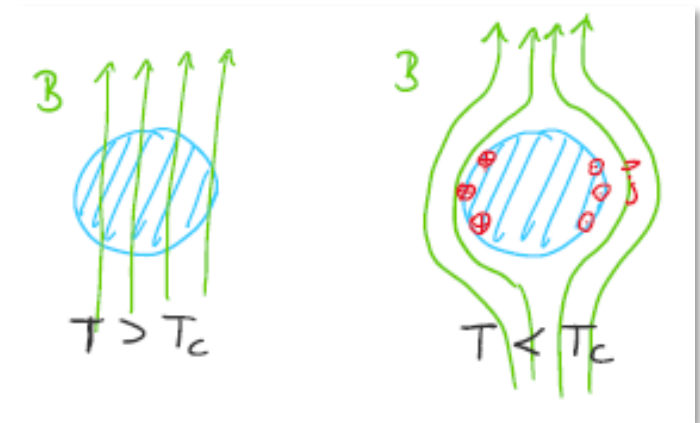
Maxwell-Gleichung ohne
Verschiebungsstrom
 $\partial \mathbf{D} / \partial t$

$$\nabla^2 \mathbf{b} - \frac{\mu_0}{\Lambda} \mathbf{b} = \nabla^2 \mathbf{b} - \frac{1}{\lambda_L^2} \mathbf{b} = 0$$

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{\Lambda}{\mu_0}} = \sqrt{\frac{m_s}{\mu_0 n_s q_s^2}}$$

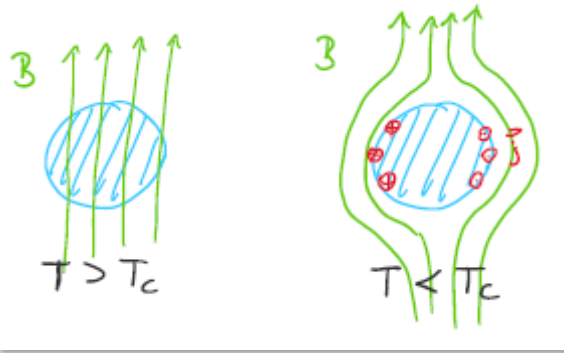
$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{b} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{b}) - \nabla^2 \mathbf{b}$$



London Modell

Londonsche Eindringtiefe



- Feldausstoßung mit Hilfe von Oberflächenströmen

Oberflächenstromdichte $\mathbf{j}$ kann nicht unendlich groß werden $\rightarrow$ Eindringtiefe

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{\Lambda}{\mu_0}} = \sqrt{\frac{m_s}{\mu_0 n_s q_s^2}}$$

$$\Lambda = \frac{m_s}{q_s^2 n_s} = \text{London-Koeffizient}$$

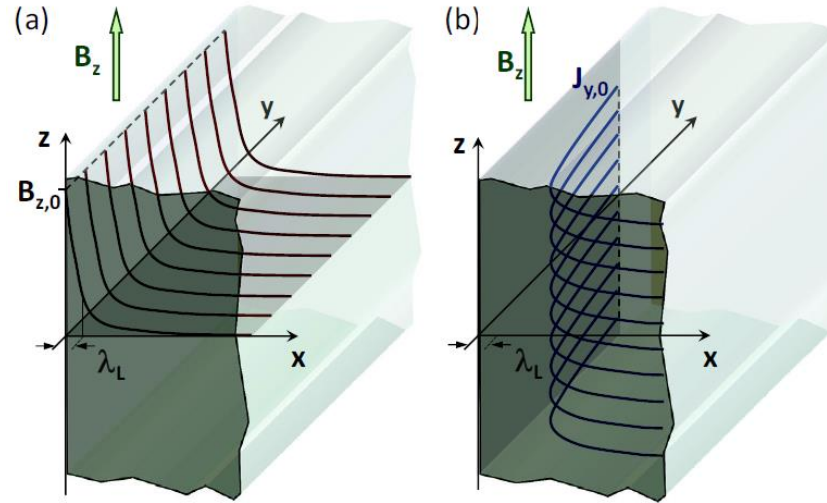
(im Wesentlichen bestimmt durch Dichte der “supraleitenden” Ladungsträger)

Wichtig: durch Messung von λ_L können wir nicht auf Cooper-Paare schließen!

$$n_s \rightarrow \frac{n}{2}, q_s \rightarrow 2e, m_s \rightarrow 2m_e \Rightarrow \Lambda = \frac{m_s}{n_s q_s^2} \text{ bleibt unverändert}$$

London Modell

$$B_z(x) = B_{z,0} \cdot \exp(-x/\lambda_L)$$



- sowohl Magnetfeld als auch Stromdichte klingen exponentiell im Inneren des Supraleiters ab
- charakteristische Längenskala ist London-Eindringtiefe: **typische Werte liegen zwischen 0.01 und 1 μm**

Temperaturabhängigkeit:
$$\lambda_L = \frac{\lambda_L(0)}{\sqrt{1 - (T/T_c)^4}}$$
 (empirische Formel: Gorter & Kasimir, 1934)

$\lambda_L(T)$ divergiert für $T \rightarrow T_c$

SL als makroskopisches Quantenphänomen

- Herleitung der London-Gleichungen durch die Annahme möglich, dass der supraleitende Grundzustand mit einer **makroskopischen Wellenfunktion** beschrieben werden kann (ähnlich wie Photonen in einem Laser)
- Fritz London (1948): Ableitung der London-Gleichungen mit grundlegenden quantenmechanischen Konzepten
- Beleg für Gültigkeit dieses Ansatzes: Josephson-Effekt, Fluss-Quantisierung (vgl. atomare Orbitale)
- Theoretische Begründung durch BCS-Theorie (1957)

Grundhypothese: es existiert eine **makroskopische Wellenfunktion**

$$\psi_s(\mathbf{r}, t) = \psi_0(\mathbf{r}, t) e^{i\theta(\mathbf{r}, t)}$$

welche die Gesamtheit der supraleitenden Elektronen beschreibt

Normierung:

$$\int \psi^*(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t) dV = N_s$$

$$|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 = \psi^*(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t) = n_s(\mathbf{r}, t)$$

Wichtig: Im Gegensatz zur üblichen Interpretation von $|\psi_s(\mathbf{r}, t)|^2$ als quantenmechanische Wahrscheinlichkeit ein Teilchen am Ort $\mathbf{r}$ zur Zeit t aufzufinden, assoziieren wir $|\psi_s(\mathbf{r}, t)|^2$ jetzt mit der Teilchenzahldichte $n_s(\mathbf{r}, t)$.



SL als makroskopisches Quantenphänomen

Schrödinger-Gleichung für geladenes Teilchen:

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla \right)^2 \Psi(\mathbf{r}, t) + \underbrace{[q\phi_{\text{el}}(\mathbf{r}, t) + \mu(\mathbf{r}, t)]}_{\text{(elektrochemisches Potenzial)}} \Psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

ohne
 $q\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$

Madelung-Transformation: wir machen folgende Ersetzungen

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{r}, t) &\rightarrow \psi_s(\mathbf{r}, t) = \psi_0(\mathbf{r}, t) e^{i\theta(\mathbf{r}, t)} \\ m &\rightarrow m_s \\ q &\rightarrow q_s \end{aligned}$$

Benutze

$$\mathbf{J}_s = \frac{q_s \hbar}{2m_s i} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$$

<https://de.wikipedia.org/wiki/Wahrscheinlichkeitsstromdichte>

$$\mathbf{J}_s(\mathbf{r}, t) = \frac{q_s n_s(\mathbf{r}, t) \hbar}{m_s} \underbrace{\left\{ \nabla \theta(\mathbf{r}, t) - \frac{q_s}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right\}}_{\mathbf{v}}$$

Strom-Phasen-Beziehung
(eichinvariant, resultiert aus dem Imaginärteil)

➤ **Suprastromdichte ist proportional zu eichinvariantem Phasengradienten**
(im Normalleiter ist $\mathbf{J}_n \propto -\nabla \phi = \mathbf{E}$)



SL als makroskopisches Quantenphänomen

$$\hbar \frac{\partial \theta(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = - \left\{ \frac{1}{2n_s} \Lambda J_s^2(\mathbf{r}, t) + q_s \phi_{\text{el}}(\mathbf{r}, t) + \mu(\mathbf{r}, t) \right\}$$

Gesamtenergie

Energie-Phasen-Beziehung

(resultiert aus dem Realteil)

→ Beziehung wird Energie-Phasen-Beziehung genannt, da $\partial \theta / \partial t \propto$ Gesamtenergie



Anwendung des makroskopische Quantenmodells sowohl für die Beschreibung von geladenen als auch von ungeladenen Quantenflüssigkeiten

$$q_s = k \cdot q \quad m_s = k \cdot m \quad n_s = n/k$$

- i. $q = -e$, $k = 2$: klassischer Supraleiter mit $n_s = -2e$, $m_s = 2m$ und $n_s = m/2$
- ii. $q = 0$, $k = 1$: neutrale Bose-Supraflüssigkeit mit $n_s = n$, $m_s = m$ (suprafluides 4He)
- iii. $q = 0$, $k = 2$: neutrale Fermi-Supraflüssigkeit mit $n_s = n/2$, $m_s = 2m$ (suprafluides 3He)

SL als makroskopisches Quantenphänomen

Strom-Phasen-Beziehung

$$\oint_C (\Lambda \mathbf{J}_s) \cdot d\boldsymbol{\ell} \propto \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \nabla \theta \cdot d\boldsymbol{\ell} = \theta(\mathbf{r}_2, t) - \theta(\mathbf{r}_1, t)$$

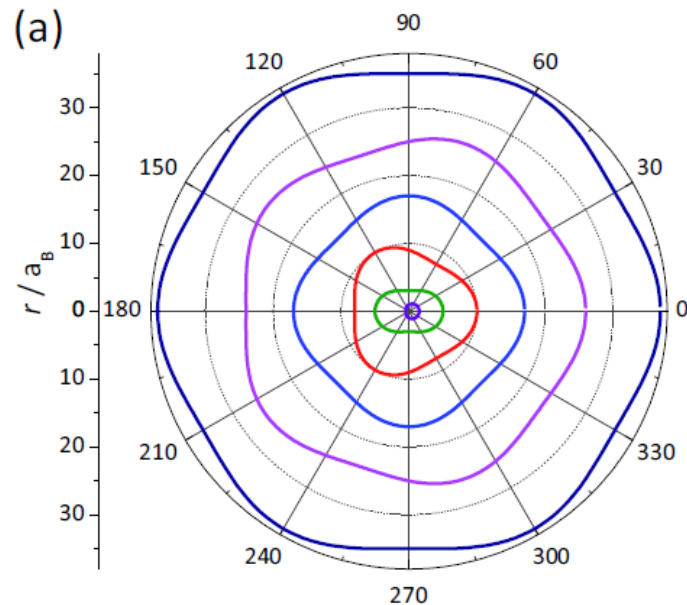
- Muss geschlossene Pfade ergeben:

$$\oint_C \nabla \theta \cdot d\boldsymbol{\ell} = \lim_{\mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r}_1} [\theta(\mathbf{r}_2, t) - \theta(\mathbf{r}_1, t)] = n \cdot 2\pi$$

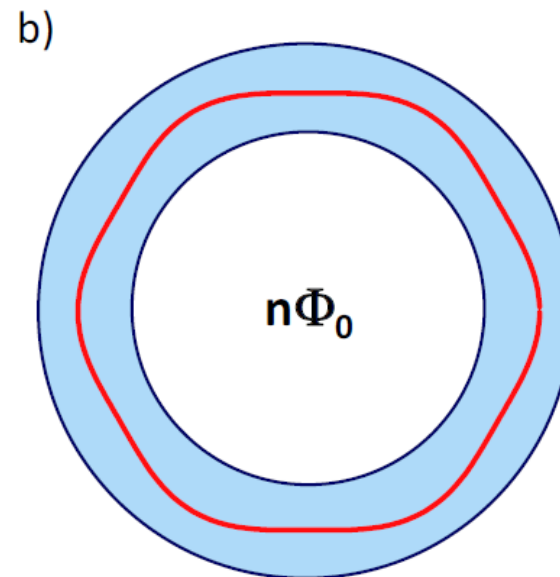
Flussquantisierung

$$\underbrace{\oint_C (\Lambda \mathbf{J}_s) \cdot d\boldsymbol{\ell} + \int_F \mathbf{b} \cdot d\mathbf{F}}_{\text{Fluxoid}} = n \frac{h}{q_s} = n \Phi_0$$

Atomare Wellenfunktion
Bohr-Sommerfeld Quantisierung



Geschlossene SL Leiterschleife
Bohr-Sommerfeld Quantisierung



SL als makroskopisches Quantenphänomen

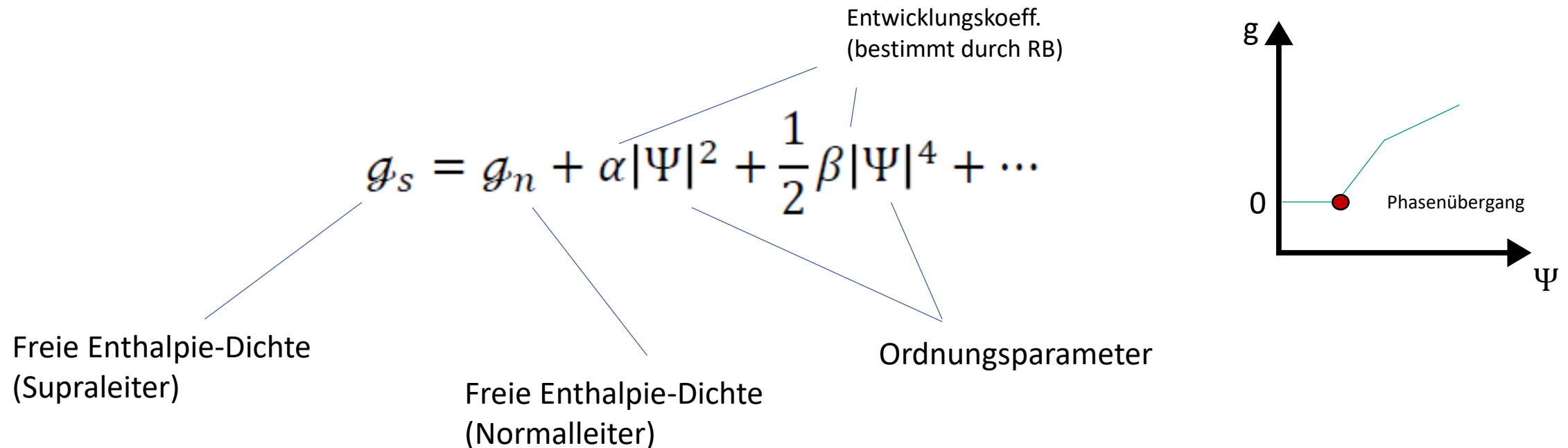
Interpretation und Bedeutung der London-Gleichungen

- Die London-Gleichungen können direkt aus dem allgemeinen Ausdruck für die Suprastromdichte J_S abgeleitet werden, der wiederum direkt aus der Tatsache folgt, dass der supraleitende Zustand durch eine makroskopische Wellenfunktion beschrieben werden kann (Siehe Übungsaufgabe).
- London-Gleichungen beschreiben zeitabhängige Phänomene, sind aber nicht geeignet zur Beschreibung von räumlich inhomogenen Situationen (bei Herleitung wurde $|\psi_S(\mathbf{r}, t)|^2 = \text{const}$ angenommen)

Ginzburg-Landau Theorie

Beschreibung von räumlich homogenem Supraleiter ohne Magnetfeld

- Beschreibung des Übergangs in den supraleitenden Zustand im Rahmen der Landau-Theorie der Phasenübergänge
- Entwicklung der freien Enthalpiedichte nach Potenzen des Ordnungsparameters Ψ mit $|\Psi_0(\mathbf{r})|^2 = |\Psi(\mathbf{r})|^2 = n_s(\mathbf{r}) = \text{const.}$



Ginzburg-Landau Theorie

Beschreibung von räumlich homogenem Supraleiter ohne Magnetfeld

- Beschreibung des Übergangs in den supraleitenden Zustand im Rahmen der Landau-Theorie der Phasenübergänge
- Entwicklung der freien Enthalpiedichte nach Potenzen des Ordnungsparameters Ψ mit $|\Psi_0(\mathbf{r})|^2 = |\Psi(\mathbf{r})|^2 = n_s(\mathbf{r}) = \text{const.}$

$$\mathcal{G}_s = \mathcal{G}_n + \alpha |\Psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\Psi|^4 + \dots$$

$$\text{mit } \alpha(T) = \bar{\alpha} \left(\frac{T}{T_c} - 1 \right) \text{ und } \bar{\alpha} > 0 \quad \begin{array}{l} \text{Ansatz für} \\ \text{VZW bei } T_c \end{array}$$

$$\beta(T) = \text{const.} \quad \text{Muss positiv sein...}$$

- im thermodynamischen Gleichgewicht muss $\mathcal{G}_s$ minimal sein

$$\frac{\partial \mathcal{G}_s}{\partial |\Psi|} = 0 \Rightarrow |\Psi_0(T)|^2 = -\frac{\alpha(T)}{\beta}$$

$$n_s(T) = |\Psi_0(T)|^2 = -\frac{\alpha(T)}{\beta} = \frac{\bar{\alpha}}{\beta} \left(1 - \frac{T}{T_c} \right)$$

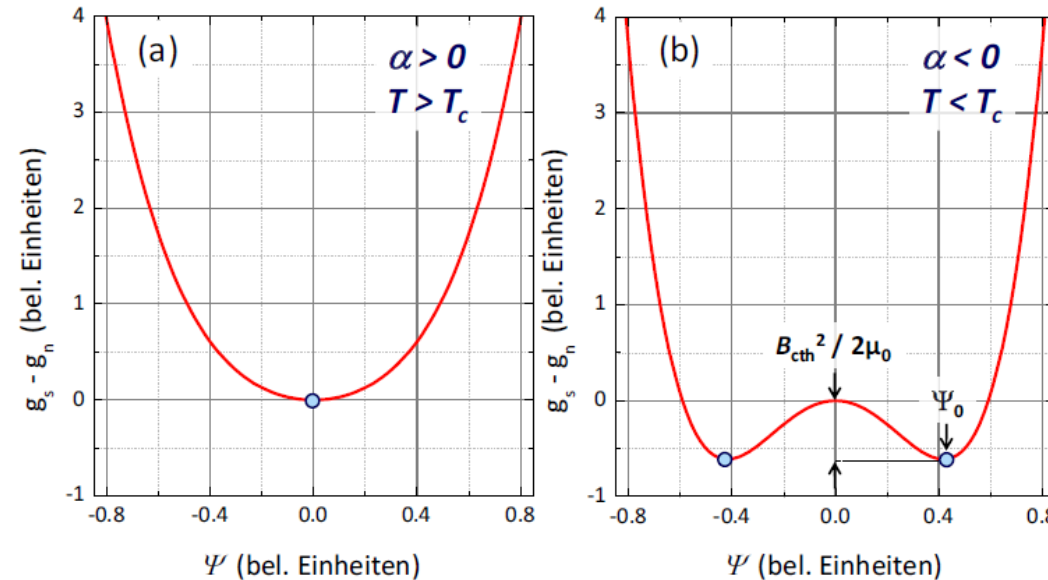
Ginzburg-Landau Theorie

- physikalische Bedeutung der Entwicklungskoeffizienten

Aus Gleichung
auf der letzten
Seite

$$g_s - g_n = -\frac{B_{\text{cth}}^2(T)}{2\mu_0} = \alpha(T)|\Psi_0(T)|^2 + \frac{1}{2}\beta|\Psi_0(T)|^4 + \dots = -\frac{\bar{\alpha}^2}{2\beta}\left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^2$$

→ $\bar{\alpha} = \left[\frac{B_{\text{cth}}^2(0)}{2\mu_0}\right] / n_s(0)$ entspricht der Kondensationsenergie pro supraleitendem Ladungsträger



Ginzburg-Landau Theorie

- Ginzburg und Landau wollten jetzt aber eine ortsabhängige Theorie mit Magnetfeld...

$$\mathfrak{g}_s = \mathfrak{g}_n + \alpha |\Psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\Psi|^4 + \frac{1}{2\mu_0} \overbrace{(\mathbf{B}_{\text{ext}} - \mathbf{b})^2}^{(\mu_0 \mathbf{M})^2} + \frac{1}{2m_s} \left| \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q_s \mathbf{A} \right) \Psi \right|^2 + \dots$$

„lokales“ Feld

„Steifigkeit“ der Wellenfunktion wird belohnt: **Enthält kinetische Energie** nach der **Strom-Phasen-Beziehung**

Vom Supraleiter zu leistende Feldverdrängungsarbeit

Terme für lokale Änderung

Ginzburg-Landau Theorie

- Nach *etwas* Rechnung kommt man zu den Ginzburg-Landau Gleichungen

1. Ginzburg-Landau Gleichung

$$0 = \frac{1}{2m_s} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q_s \mathbf{A} \right)^2 \Psi + \alpha \Psi + \beta |\Psi|^2 \Psi$$

2. Ginzburg-Landau Gleichung

$$\mathbf{J}_s = \frac{q_s \hbar}{2m_s} \frac{1}{i} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) - \frac{q_s^2}{m_s} |\Psi|^2 \mathbf{A}$$

GL-Gleichungen sind nichtlinear → reichhaltiges Lösungsspektrum

Ginzburg-Landau Theorie

Vergleich der Ergebnisse von Ginzburg-Landau Theorie und makroskopischem Quantenmodell

- **GL Theorie** kann Situationen mit räumlich variierendem OP beschreiben, aber keine zeitabhängigen Phänomene (Gleichungen enthalten keine Zeitableitung)
- **makroskopisches Quantenmodell** kann Situationen mit ortsabhängiger Dichte der supraleitenden Elektronen nicht beschreiben, dafür aber zeitabhängige Phänomene (z.B. Josephson Effekt)

Ginzburg-Landau Theorie

Vergleich der Ergebnisse von Ginzburg-Landau Theorie und makroskopischem Quantenmodell

makroskopisches Quantenmodell

i. Strom-Phasen-Beziehung

$$\mathbf{J}_s(\mathbf{r}, t) = q_s n_s(\mathbf{r}, t) \left\{ \frac{\hbar}{m_s} \nabla \theta(\mathbf{r}, t) - \frac{q_s}{m_s} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right\}$$

bei Herleitung wird $|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 = n_s(\mathbf{r}, t)$ als räumlich konstant angenommen

ii. Energie-Phasen-Beziehung

$$\hbar \frac{\partial \theta(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = - \left\{ \frac{1}{2n_s} \Lambda J_s^2(\mathbf{r}, t) + q_s \phi_{el}(\mathbf{r}, t) + \mu(\mathbf{r}, t) \right\}$$

iii.

keine entsprechende Gleichung, da $\psi(r, t)$ als räumlich konstant angenommen wurde

Ginzburg-Landau Theorie

i. 2. Ginzburg-Landau Gleichung

$$\mathbf{J}_s = \frac{q_s \hbar}{2m_s} \frac{1}{i} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) - \frac{q_s^2}{m_s} |\Psi|^2 \mathbf{A}$$

geht für $|\psi(r)|^2 = n_s(r) = \text{const}$ in Strom-Phasen-Beziehung über

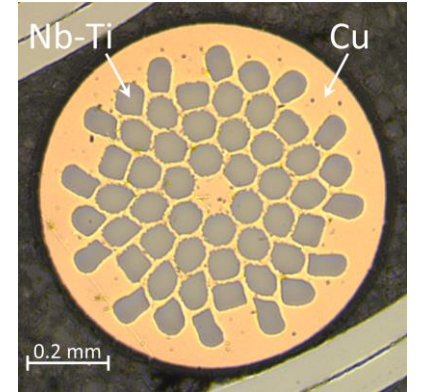
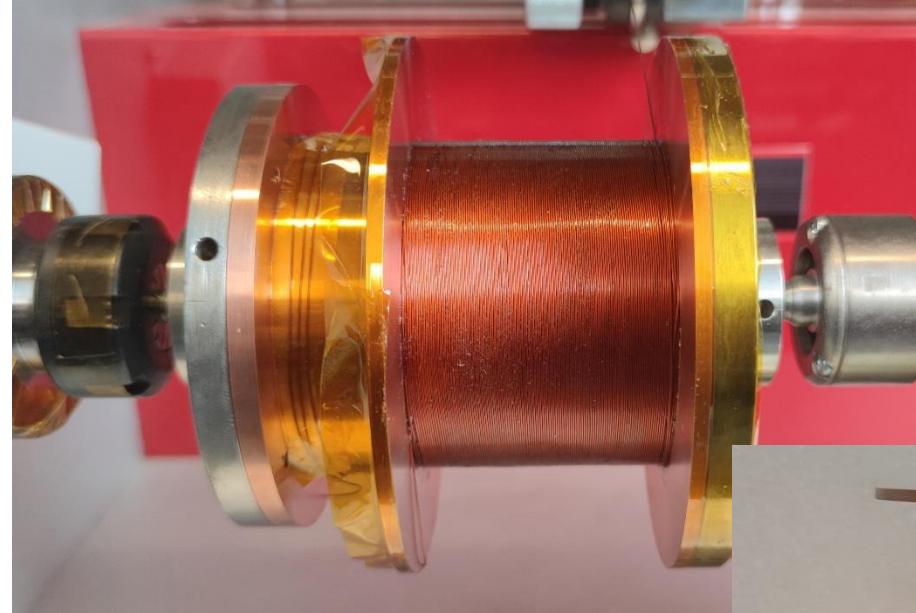
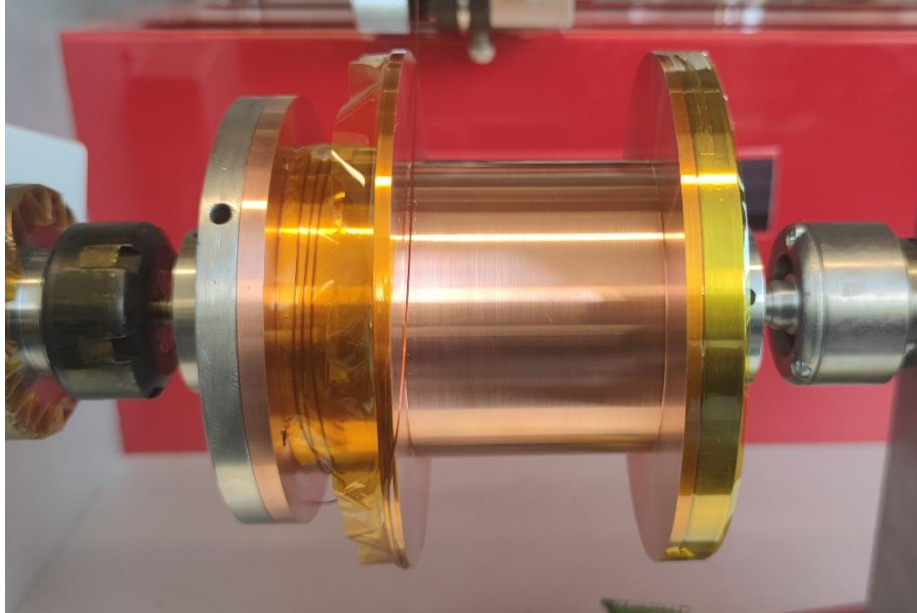
ii.

keine entsprechende Gleichung, da $\psi(r)$ nur räumliche aber keine zeitliche Variation enthält

iii. 1. Ginzburg-Landau Gleichung

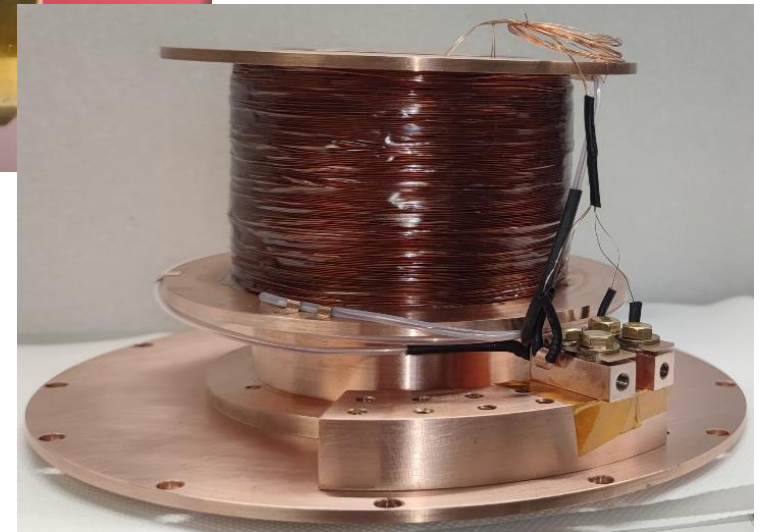
$$0 = \frac{1}{2m_s} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q_s \mathbf{A} \right)^2 \Psi + \alpha \Psi + \beta |\Psi|^2 \Psi$$

Supraleitende Spulen



630m of 0.44mm SC wire (NbTi), i.e., 320mT @ 10A

Typ II Supraleiter

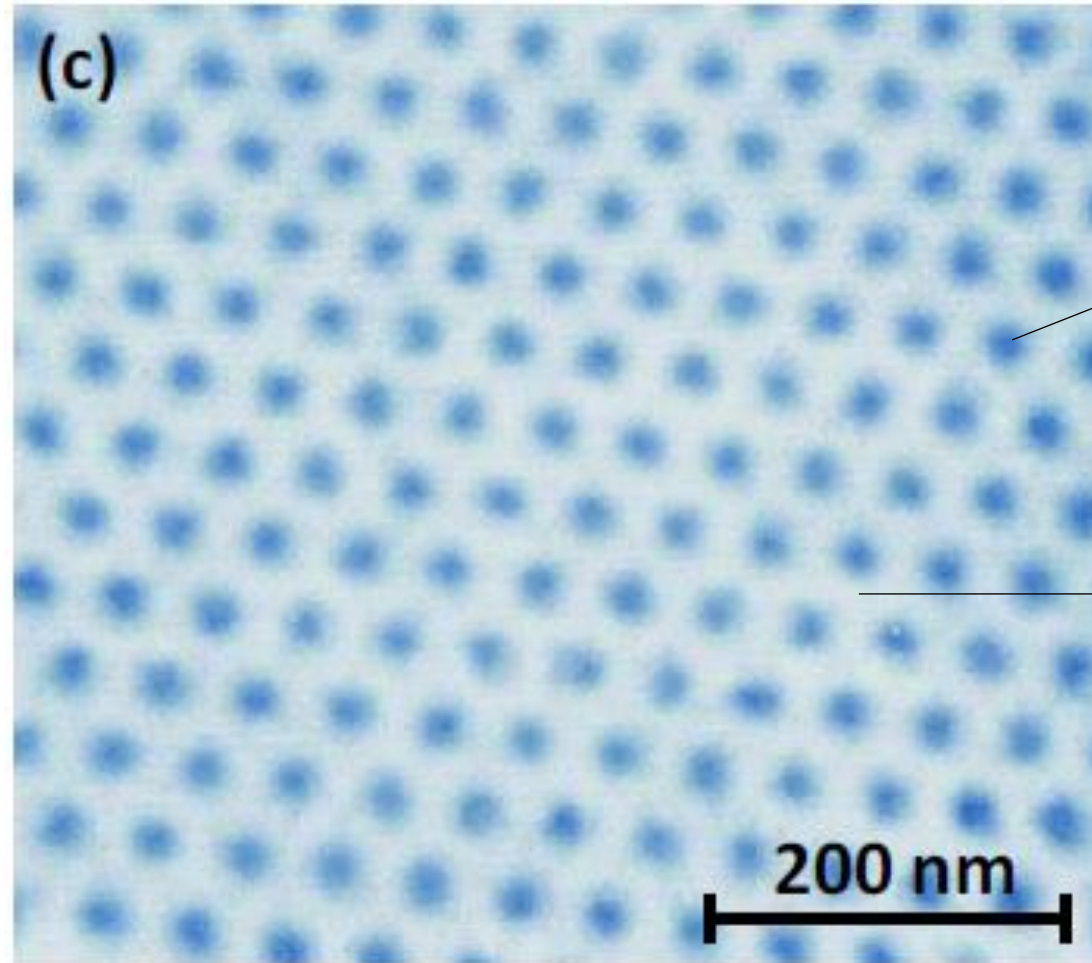


Flussliniengitter

NbSe₂

Typ II SC

$T_c = 7.2 \text{ K}$



Normalleitend

Supraleitend

Mit einem Rastertunnelmikroskop gewonnene Abbildung eines für $B_{\text{ext}} = 1 \text{ T}$ erhaltenen Flussliniengitters in einem NbSe₂-Einkristall

<https://journals.aps.org/pr/pdf/10.1103/PhysRevLett.62.214>

Ginzburg-Landau Theorie

Charakteristische Längenskalen

2. Ginzburg-Landau Gleichung

$$\mathbf{J}_s = \frac{q_s \hbar}{2m_s} \frac{1}{i} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) - \frac{q_s^2}{m_s} |\Psi|^2 \mathbf{A}$$

liefert 1. und 2. London-Gleichung und charakteristische Abschirmlänge für magnetische Flussdichte

$$\lambda_{\text{GL}} = \sqrt{-\frac{m_s \beta}{\mu_0 \alpha q_s^2}} = \sqrt{\frac{m_s}{\mu_0 n_s q_s^2}}$$

Ginzburg-Landau Eindringtiefe

mit $\alpha(T) = \bar{\alpha}(1 - T/T_c)$ und $n_s(T) = -\alpha(T)/\beta$

1. Ginzburg-Landau Gleichung

$$0 = \frac{1}{2m_s} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q_s \mathbf{A} \right)^2 \Psi + \alpha \Psi + \beta |\Psi|^2 \Psi$$

$$0 = \underbrace{\frac{\hbar^2}{2m_s \alpha} \left(\frac{1}{i} \nabla - \frac{q_s}{\hbar} \mathbf{A} \right)^2}_{\xi_{\text{GL}}} \psi + \psi + |\psi|^2 \psi \quad \xi_{\text{GL}}^2 \frac{d^2 \psi}{dx^2} + \psi - \psi^3 = 0$$

Ginzburg-Landau Kohärenzlänge

Ginzburg-Landau Theorie

Ginzburg-Landau Kohärenzlänge

Interpretation von ξ_{GL} : für kleine ψ (e.g. nahe T_c) $\rightarrow \xi_{GL}^2 \frac{d^2\psi}{dx^2} + \psi - \text{X}^3 = 0 \quad \rightarrow \quad \text{Exponentielles abklingen jeder Störung}$

- **physikalische Interpretation der charakteristischen Längenskalen:**

- **GL-Eindringtiefe** λ_{GL} : Abschirmung von räumlichen Variationen der lokalen Flussdichte auf Skala $< \lambda_{GL}$ kostet Energie, welche die Kondensationsenergiedichte $B_{cth}^2/2\mu_0$ übersteigt
- **GL-Kohärenzlänge** ξ_{GL} : räumliche Variation der Amplitude oder Phase des OPs auf Skala $< \xi_{GL}$ kostet Energie, welche die Kondensationsenergiedichte $B_{cth}^2/2\mu_0$ übersteigt

Ginzburg-Landau Theorie

Charakteristische Längenskalen

Supraleiter	$\xi_{GL}(0)$ (nm)	$\lambda_L(0)$ (nm)	κ
Al	1600	50	0.03
Cd	760	110	0.14
In	1100	65	0.06
Nb	106	85	0.8
NbTi	4	300	75
Nb ₃ Sn	2.6	65	25
NbN	5	200	40
Pb	100	40	0.4
Sn	500	50	0.1

$$\lambda_L(T) = \frac{\lambda_{GL}(0)}{\sqrt{1 - \frac{T}{T_c}}}$$

$$\xi_{GL}(T) = \frac{\xi_{GL}(0)}{\sqrt{1 - \frac{T}{T_c}}}$$

Ginzburg-Landau Parameter

$$\kappa \equiv \frac{\lambda_L}{\xi_{GL}} = \frac{\sqrt{2}m_s}{\mu_0 q_s \hbar n_s(T)} B_{cth}(T)$$

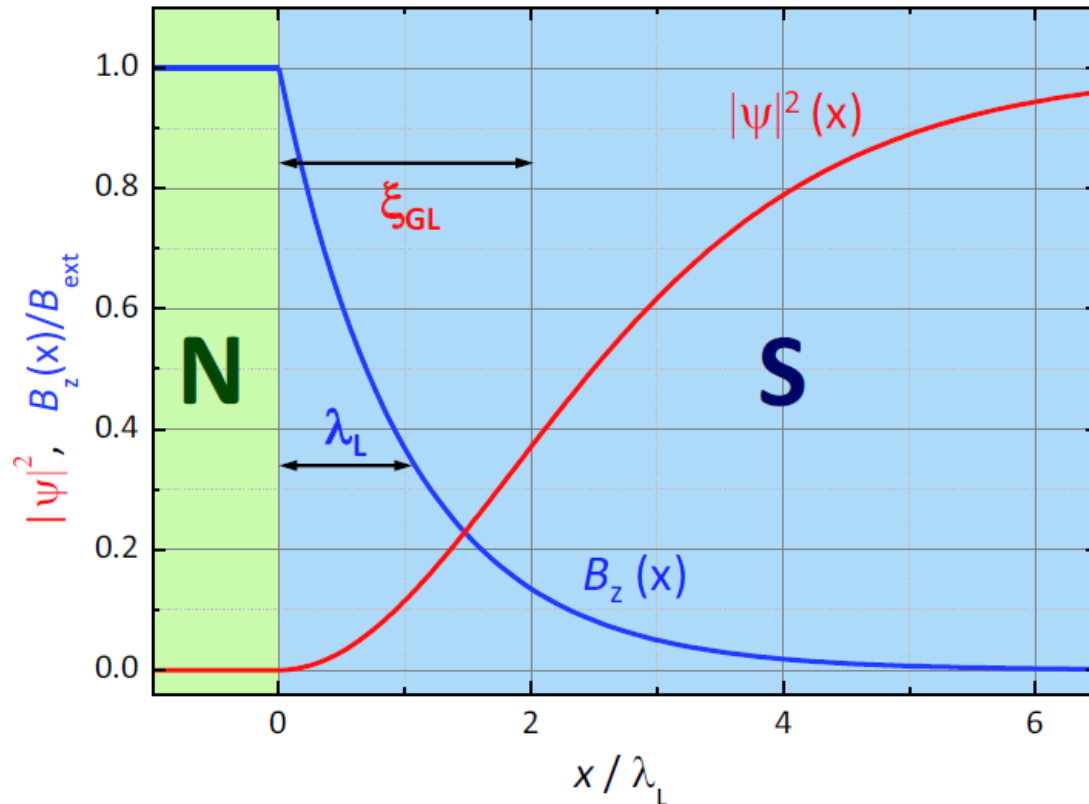
Ginzburg-Landau Theorie

$$\kappa \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{Typ-I Supraleiter}$$

$$\kappa \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{Typ-II Supraleiter}$$

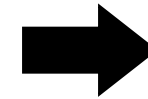
Ginzburg-Landau Theorie

- Supraleiter-Normalleiter Grenzflächenenergie



$$\xi_{GL}^2 \frac{d^2 \psi}{dx^2} + \psi - \psi^3 = 0$$

$$\psi(x=0) = 0, \psi(x \rightarrow \infty) = 1 \text{ und } \lim_{x \rightarrow \infty} d\psi/dx = 0$$



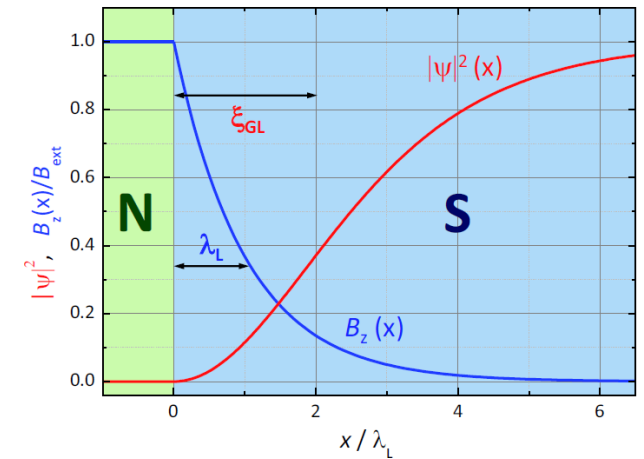
$$\psi(x) = \tanh\left(\frac{x}{\sqrt{2}\xi_{GL}}\right)$$

$$\frac{n_s(x)}{n_s(\infty)} \propto |\psi(x)|^2 = \tanh^2\left(\frac{x}{\sqrt{2}\xi_{GL}}\right)$$

Ginzburg-Landau Theorie

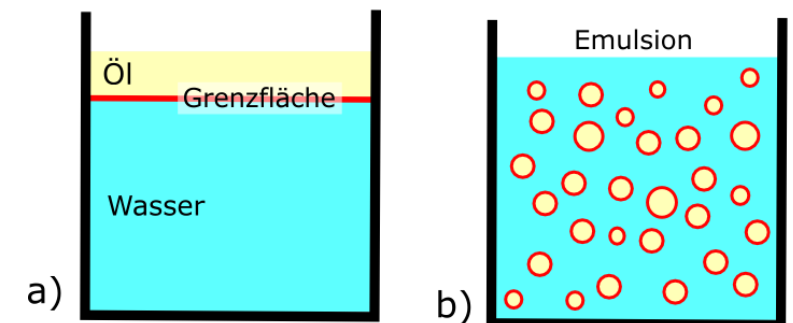
- Zu leistende Magnetfeldverdrängungsarbeit pro Flächeneinheit ist erhöht um den Betrag

$$\Delta E_B \simeq -\frac{B_{\text{ext}}^2}{2\mu_0} \frac{V}{F} = -\frac{B_{\text{ext}}^2}{2\mu_0} \lambda_L = -\frac{B_{\text{cth}}^2(T)}{2\mu_0} \left(\frac{B_{\text{ext}}}{B_{\text{cth}}(T)} \right)^2 \lambda_L$$



- Dichte der supraleitenden Elektronen ist in einer Grenzflächenschicht der Dicke ξ_{GL} reduziert.
- Der damit verbundene Verlust an Kondensationsenergie pro Flächeneinheit, der zu einer Erhöhung der Gesamtenergie führt

$$\Delta E_C \simeq [\mathfrak{g}_n(T) - \mathfrak{g}_s(T)] \frac{V}{F} = \frac{B_{\text{cth}}^2(T)}{2\mu_0} \xi_{GL}$$



Ginzburg-Landau Theorie

- *Ginzburg-Landau Parameter*

$$\kappa \equiv \frac{\lambda_{\text{GL}}}{\xi_{\text{GL}}} = \sqrt{\frac{2m_s^2\beta}{\mu_0\hbar^2q_s^2}} = \sqrt{\frac{\beta}{2\mu_0}} \frac{1}{\mu_B}$$

$$\Delta E_{\text{Grenz}} = \Delta E_C + \Delta E_B \simeq \frac{B_{\text{cth}}^2}{2\mu_0} \left[\xi_{\text{GL}} - \left(\frac{B_{\text{ext}}}{B_{\text{cth}}} \right)^2 \lambda_{\text{GL}} \right]$$

$\xi_{\text{GL}} > \lambda_{\text{GL}}$: $\Delta E_{\text{grenz}} > 0$ für $0 \leq B_{\text{ext}} \leq B_{\text{cth}}$

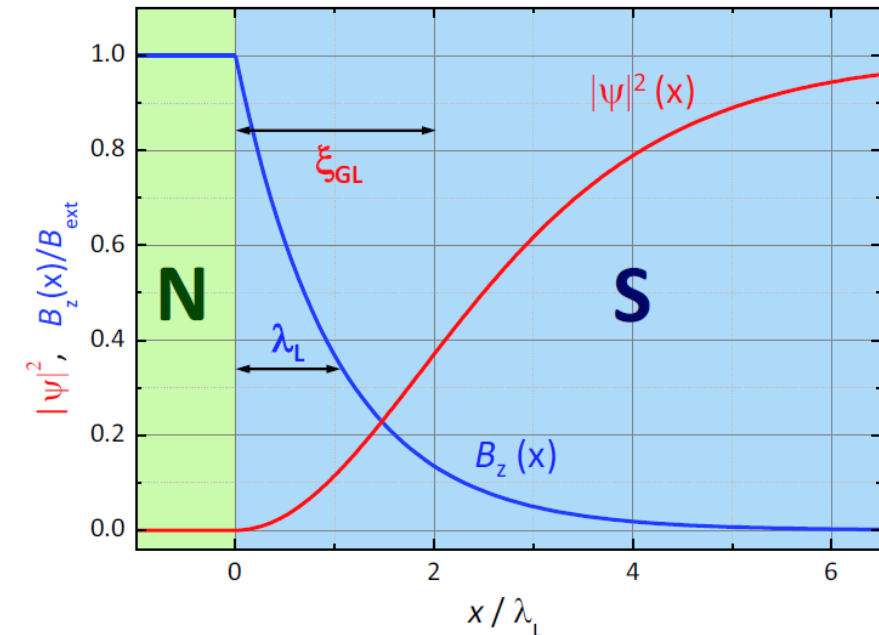
→ Grenzflächen ungünstig → Meißner-Zustand für $0 \leq B_{\text{ext}} \leq B_{\text{cth}}$

→ *Typ-I-Supraleiter*

$\xi_{\text{GL}} < \lambda_{\text{GL}}$: $\Delta E_{\text{grenz}} < 0$ für $B_{c1} \leq B_{\text{ext}} \leq B_{c2}$

→ Grenzflächen günstig → Mischzustand für $B_{c1} \leq B_{\text{ext}} \leq B_{c2}$

→ *Typ-II-Supraleiter*



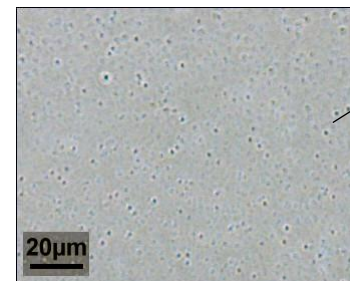
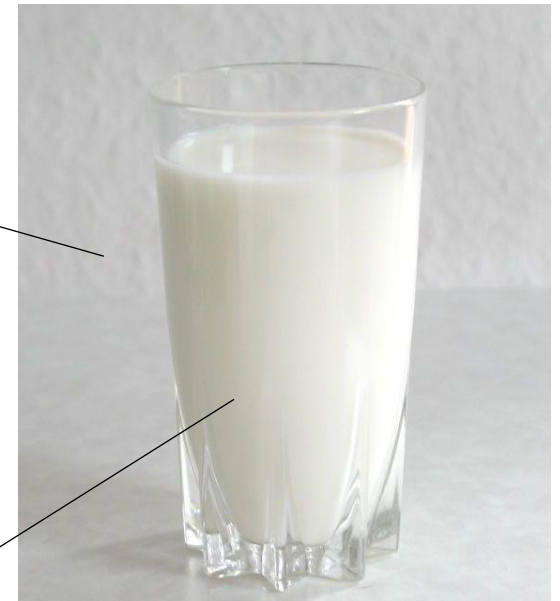
Ginzburg-Landau Theorie

$$\kappa \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Typ-I Supraleiter

$$\kappa \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Typ-II Supraleiter



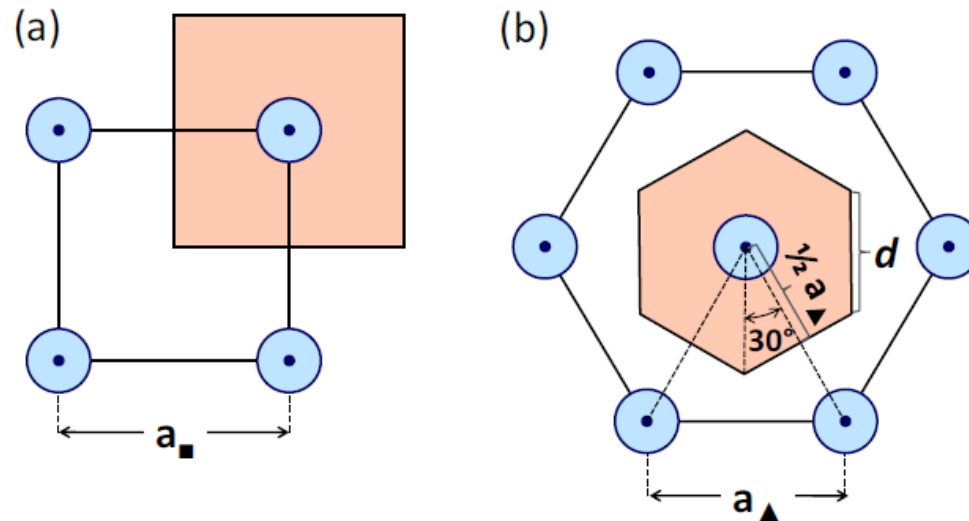
Fetttröpfchen in
fettarmer Milch

Ginzburg-Landau Theorie

■ Wie sieht die räumliche Verteilung der magnetischen Flussdichte in der Shubnikov-Phase aus?

nur qualitative Diskussion (quantitative Diskussion erfordert numerische Lösung der GL-Gleichungen)

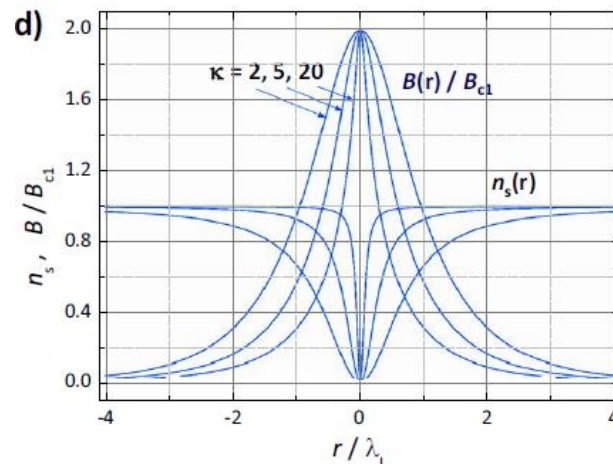
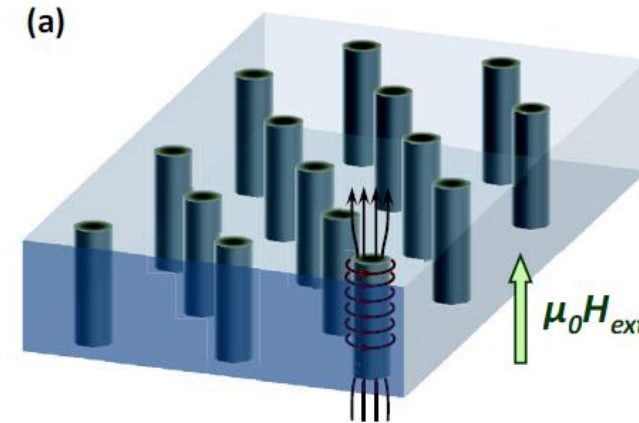
- da Grenzflächenenergie für $B_{c1} \leq B_{\text{ext}} \leq B_{c2}$ negativ ist, wird Fluss in möglichst viele kleine Portionen aufgeteilt, um Grenzfläche groß zu machen.
- untere Schranke wird durch Flussquant Φ_0 festgelegt
- Flussquanten verhalten sich wie parallel ausgerichtete Stabmagnete
 - stoßen sich ab
 - Anordnung mit möglichst großem Abstand wird bevorzugt
 - optimal ist **hexagonales Flusslinien-Gitter** → **Abrikosov Vortex-Gitter**



Ginzburg-Landau Theorie

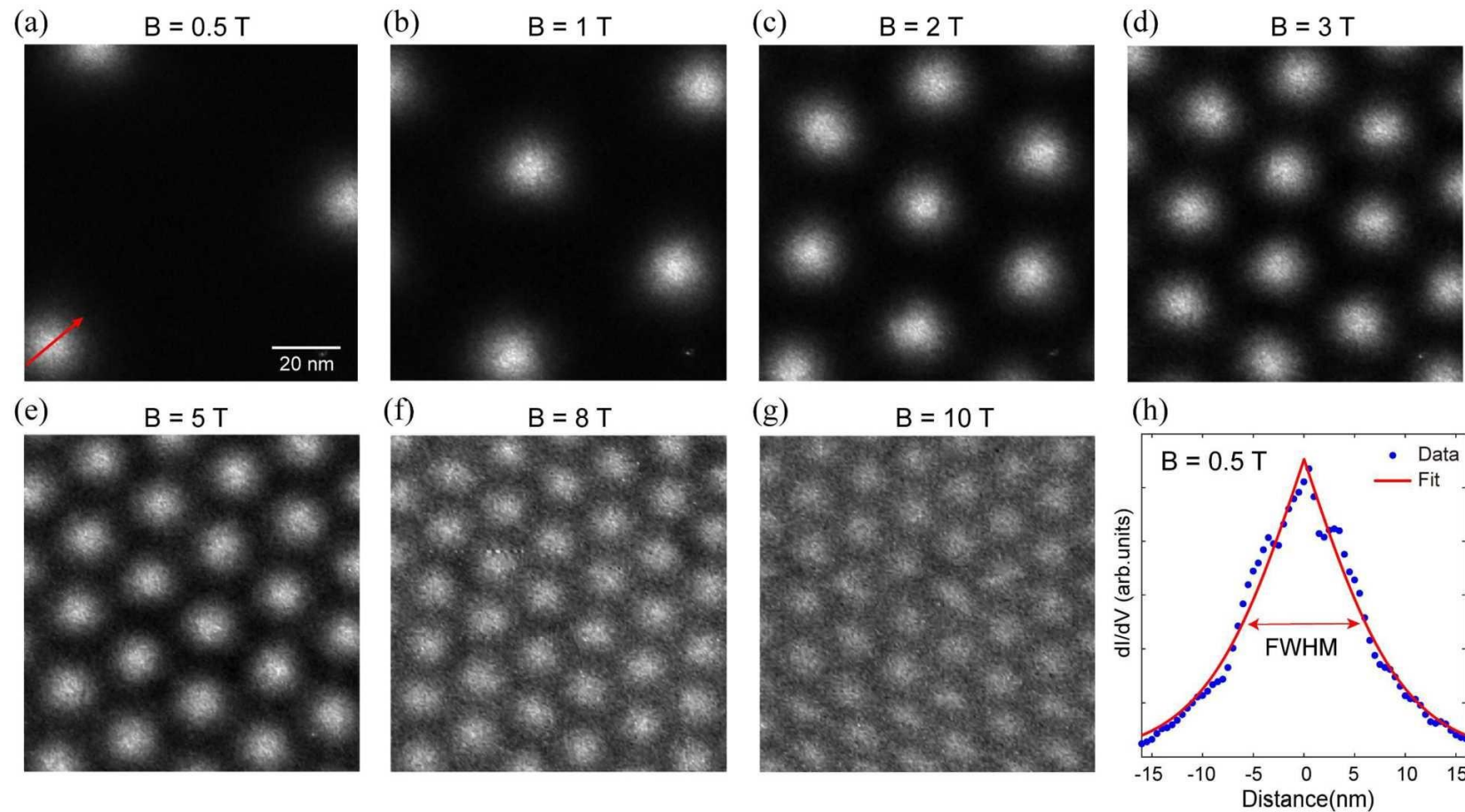
Wie sieht die räumliche Verteilung der magnetischen Flussdichte in der Shubnikov-Phase aus?

- Schematische Darstellung des Flussliniengitters in einem Typ-II Supraleiter. Für eine einzelne Flusslinie sind exemplarisch der Flusslinienverlauf und die ringförmigen Abschirmströme skizziert.



- radialer Verlauf von $n_s(r)$ und $B(r)/B_{c1}$ in einer isolierten Flusslinie (nach E. H. Brandt, Phys. Rev. Lett. 78, 2208 (1997))

Ginzburg-Landau Theorie



Vortex imaging on V_3Si (111) surface.

Ginzburg-Landau Theorie

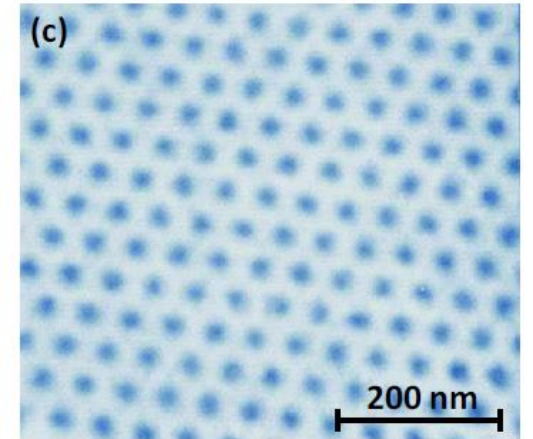
Dekoration des Flussliniengitters



U. Essmann,
H. Träuble (1968)
MPI Metallforschung
Nb, $T = 4 \text{ K}$
1mm dicke Scheibe, 4 mm ϕ
 $B_{\text{ext}} = 985 \text{ G}$, $a = 170 \text{ nm}$

REM-Aufnahmen nach Dekoration mit Fe-Dampf (Bitter-Technik)

D. Bishop, P. Gammel (1987)
AT&T Bell Labs
YBCO, $T = 77 \text{ K}$
 $B_{\text{ext}} = 20 \text{ G}$, $a = 1200 \text{ nm}$
ähnliche Experimente:
L. Ya. Vinnikov, ISSP Moscow
G. J. Dolan, IBM NY



Vgl. STM

Zusammenfassung

- I. London-Modell (Zweiflüssigkeiten-Modell)
- II. Supraleitung als makroskopisches Quantenphänomen
- III. Ginzburg-Landau Theorie

