

Übungsblatt 3

Mikroskopische Theorie der Supraleitung

Themen für Kurzvorträge

- a) BCS: Energielücke und Sprungtemperatur (13.5.2.3)
- b) BCS: Grundzustandsenergie (13.5.2.4)

1. Wiederholungs-Aufgaben

- a) Welche Experimente gaben Hinweis auf die Beteiligung von Phononen bei Supraleitung?
- b) Warum werden Cooper-Paare aus zwei Elektronen mit entgegengesetzten Impuls ($\mathbf{k}, -\mathbf{k}$) gebildet?
- c) Wie groß ist ein Cooper-Paar und warum?
- d) Wie kann in einem Metall aus einem abstoßendem Coulomb-Potential eine anziehende Wechselwirkung resultieren?
- e) Welchen Ansatz für die Wellenfunktion haben Bardeen/Cooper/Schrieffer gemacht? Was bedeuten die einzelnen Terme?
- f) Welche Eigenschaften haben Anregungen aus dem BCS Grundzustand? Welche Energie haben sie?
- g) Wie hängt die kritische Temperatur nach der BCS Theorie nach Vereinfachung von der Debye Frequenz und der Zustandsdichte $D(E_F)$ bei der Fermi Energie ab? Welche Experimente erklärt der Zusammenhang mit der Debye Frequenz?

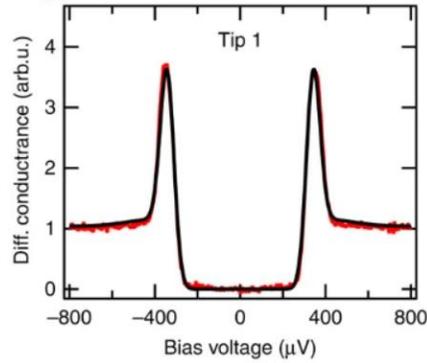
2. Energielücke Anregungsspektrum

Für die Grundzustandsenergie eines BCS Supraleiters haben wir erhalten:

$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta_{\mathbf{k}}^2}$$

Mit der Einteilchenenergie $\xi_{\mathbf{k}}$ und der Anregungsenergie $\Delta_{\mathbf{k}}$.

- a) Zeichnen Sie die Dispersionsrelation in Einheiten von Delta. Wie sieht es aus für $\Delta_{\mathbf{k}} = 0$? Welche Bedeutung hat dieser Grenzfall?
- b) Beschreiben Sie kurz die Eigenschaften der Einteilchenanregungen in den 3 Bereichen $\xi_{\mathbf{k}} > 0$, $\xi_{\mathbf{k}} < 0$ und $\xi_{\mathbf{k}} = 0$. Welchen „Charakter“ haben sie?
- c) Leiten Sie einen Ausdruck für die Zustandsdichte eines Supraleiters her. Welche Randbedingung können wir hier ausnutzen?
- d) Die untere Abbildung zeigt die Leitfähigkeit gemessen in einer Supraleiter-Supraleiter Tunneljunction. Dies wurde in einem Rastertunnelmikroskop mit einer supraleitenden Spitze gemessen. Das Material der Spitze ist das gleiche wie das der Probe, die Vakuum-Tunnelbarriere kann als ein Isolator aufgefasst werden. Es bildet sich also eine Supraleiter-Isolator-Supraleiter Junction. Um welches Material könnte es sich handeln?



3. Energieabsenkung im Grundzustand eines Supraleiters

In der Molekularfeldnäherung erhalten wir für $T = 0$ für den Erwartungswert der BCS Grundzustandsenergie folgenden Ausdruck:

$$\langle \Psi_{\text{BCS}} | \mathcal{H}_{\text{BCS}} - \mu \mathcal{N} | \Psi_{\text{BCS}} \rangle = \sum_{\mathbf{k}} (\xi_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}} + \Delta_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}^*)$$

Berechnen Sie die Absenkung der Grundzustandsenergie im supraleitenden relativ zum normalleitenden Zustand für $T = 0$.

- Ermitteln Sie zunächst H_{BCS} im Normalzustand. Den Hamilton-Operator für den Normalzustand erhalten wir aus obiger Gleichung, indem wir den Grenzübergang $\Delta_{\mathbf{k}} \rightarrow 0$ und entsprechend $E_{\mathbf{k}} \rightarrow |\xi_{\mathbf{k}}|$ machen. Man beachte, dass $-\xi_{|\mathbf{k}| \leq k_F} = \xi_{|\mathbf{k}| \geq k_F} \geq 0$ (Teilchen-Loch-Symmetrie).
- Für den Energiegewinn berechnen Sie nun $\Delta E = \langle H_{\text{BCS}} \rangle - \langle H_n \rangle$ und benutzen Sie anschließend den Ausdruck aus der Vorlesung für die Paaramplitude:

$$g_{\mathbf{k}}^* = \Delta_{\mathbf{k}} / 2E_{\mathbf{k}}$$

Überführen Sie den Ausdruck in ein Integral der Form

$$\Delta E = D(E_F) \Delta^2 \int_0^z dx \left[x - \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \right]$$

wobei $x = \xi_{\mathbf{k}} / \Delta$ und $z = \hbar \omega_D / \Delta$ ist.

- Lösen Sie das Integral und machen Sie Näherungen, um für ΔE den Ausdruck aus der Vorlesung zu bekommen.