

This is gonna be wild

Zusammenfassungen-Attempt I, Ex 6

$\sim 10^{13} \text{ fm}$

Grobe Einführung: Atom $\sim 10^{-10} \text{ m}$ Kern $\sim 10^{-14} \text{ m}$ Proton $\sim 10^{-15} \text{ m}$

$\sim \text{eV}$

$\sim \text{MeV}$

$\sim \text{GeV}$

Je kleiner die gebundenen Systeme, desto größer sind ihre Anregungsenergien why? De-Broglie w.l?

$$\Delta x \Delta p > \hbar$$

$$\Delta x \Delta p > \hbar c$$

$$\Delta x \Delta p > 200 \text{ MeV} \cdot 1 \text{ fm}$$

$$\Delta p > \frac{200 \text{ MeV}}{\Delta x c}$$

Fundamentale Bausteine: Leptonen ($\rightarrow$ Elektron, Neutrino) und Quarks

$\sim 10^{-18} \text{ m}$
(Streuexperimente)
welche?

$\frac{\hbar c}{e}$ Einheits Impuls Spin $\frac{1}{2} \rightarrow$ Fermionen, bislang wurden keine angeregten Zustände gefunden $\rightarrow$ Elementar vllt.

Abschätz
über
Anregungs-
energie

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

$$\lambda c = \frac{hc}{p}$$

$$p = \frac{hc}{\lambda c}$$

Bis heute 6 Leptonen, 6 Quarks sowie Antiteilchen bekannt $\rightarrow$ Einarbeitung in Familien
 $\rightarrow$ große Anzahl und Wiederholung von Eigenschaften kam Hinweis darauf sein, dass L, Q nicht elementarster Baustein sind

Leptonen/Quarks tragen eine schwache Ladung
Einige (z.B. e^-) Q/L tragen el. Ladung
starke Ladung (Farbladung) nur Quarks!

Die fundamentalen Wechselwirkungen

Vier fundamentale Wkr, auf denen alle physikalischen Phänomene beruhen:

- Gravitation (spielt in atomaren Systemen keine Rolle)
- EM Wkr $\rightarrow$ Photonen (masselos, daher Reichweite unbegrenzt)
- Starke Wkr $\rightarrow$ Gluonen
- Schwache Wkr $\rightarrow W^+, W^-$ und Z^0 Bosonen (Sehr schwer, $M_W \approx 80 \frac{\text{GeV}}{c^2}$, $M_Z \approx 91 \frac{\text{GeV}}{c^2}$)
 $\rightarrow$ dürfen als virtuelle Austauschteilchen wg. Heisenberg-Unschärfe nur für extrem kurze Zeit erzeugt werden
 $\rightarrow$ lange Reichweite

Vermittlung durch Austausch von Vektorbosonen ($\rightarrow S=1$)

Symmetrien

Parität P

Änderung des Vorzeichens der WF bei Spiegelung
Ortswellenfunktion gebundener Systeme mit Drehimpuls $\hbar$ Parität $P = (-1)^l$. Wenn die Naturgesetze rechts-links symmetrisch sind, also invariant ggü. Raumspiegelung P, so bleibt die Paritätsquantenzahl P des Systems erhalten $\rightarrow$ Atomphysik Auswahlregeln Dipolübergänge $\rightarrow$ Theo E

Relativistische QM $\rightarrow$ Intrinsische Parität P für Teilchen/Antiteilchen. Gleich für Bosone./Antibos. Für Fermionen/Antifermionen entgegengesetzt.

Ladungskonjugation C

C macht aus Teilchen Antiteilchen und $\bar{c}$, da sich u.a. das VZ der Ladung umkehrt, spricht man von Ladungskonjugation.

Eigenzustände von C tragen die Quantenzahl C-Parität, die erhalten bleibt, falls die Wkr symmetrisch bzgl. C ist.

$\rightarrow$
Ar nimmt innerhalb Periode ab, weil mehr p $\rightarrow$ stärkere Anziehung
Ar nimmt innerhalb 16 Zeilen $\rightarrow$ mehr Schalen $\downarrow$

Experimente

Welche Ausnahmen?

Auflösungsvermögen?

Experimente nur an Beschleunigern möglich, Verdrängen durch immer größere Energien möglich

Streuung: Richte auf zu untersuchendes Objekt einen Strahl von Teilchen mit bekannter Energie und Impuls, die mit dem Objekt in Wk. treten. $\rightarrow$ Erfahre durch Änderung der kinematischen Größen etwas über Objekt + Wk.

Bsp. Kernstrahlenmessung mit e^- -Streuung. Beugungseffekte erst erkennbar, wenn λ_{e^-} vergleichbar mit der Größe des Objektes ist. $\rightarrow$ Beugungsbild der gestreuten Teilchen gibt Aufschluß der Kerngröße an $\sim 10^8$ eV
für Protonstruktur einige 10^8 bis 10^9 eV

Substruktur Quarks (e^- $9 \cdot 10^{10}$ eV p 10^{12} eV) bis jetzt keine Anzeichen

relativistisch

Spektroskopie: Bestimmung der Zerfallsprodukte angeregter Zustände $\rightarrow$ Eigenschaften der Wk. der angeregten Zustände und Wk. zwischen Konstituenten (Einheit, die Teil einer größeren komplexeren Einheit ist)
je kleiner, desto größer die benötigten Anregungsenergien

Detektoren: Ausnutzung von ^{best.} Wk., um Teilchen nachzuweisen. Erzeugen von optischen Signalen in Medien
eingeladene Teilchen werden indirekt über sekundäre Teilchen nachgewiesen: Photonen erzeugen durch Photoeffekt, Comptoneffekt und Paarbildung freie e^- -Paare
Neutronen und Neutrinos erzeugen geladene Teilchen durch Reaktionen mit Atomkernen.

- Szintillatoren, schnelle Zeitinformation bei moderater Ortsauflösung
- Gaszähler, die zu flächendeckenden Viellochsystemen zusammengefasst werden, liefern gute Ortsinformation und werden in Zusammenhang mit Magnetfeldern zur Impulsbestimmung verwendet „position-sensitive“
- Halbleiterzähler, sehr gute Energie- und Ortsinformation
- Cerenkov / Übergangsstrahlungszähler, Teilchenidentifikation
- Kalorimeter, messen bei hohen Energien die Gesamtenergie

Energieskalen

$1\text{eV} = 1,602 \cdot 10^{-19}\text{J} = E_{Wk}$ die Teilchen mit Ladung $Q=e$ beim Durchlaufen einer Potentialdifferenz von 1V gewin-

nen Masse gemäß $E=mc^2$ in $\frac{\text{eV}}{c^2}$ bzw. $\frac{\text{MeV}}{c^2}$, $\frac{\text{GeV}}{c^2}$ an ; $hc \approx 200\text{ MeV} \cdot \text{fm}$ $\alpha = \frac{1}{137}$

Wähle nat. Einheiten, sodass $\hbar=c=1$; Atomphysik: Gauss-System $4\pi\epsilon_0=1$, $\alpha=e^2$
Teilchenphysik: $\epsilon_0=1$, $\alpha=\frac{e^2}{4\pi}$ Heaviside-Lorentz-System

Energie Röntgenstrahlung $\text{keV} = 10^3\text{eV}$

Bindungsenergie Atomkern $\text{MeV} = 10^6\text{eV}$

Ruheenergie Proton ($E=mc^2$) $\text{GeV} = 10^9\text{eV}$

Strahlenergie LHC $\text{TeV} = 10^{12}\text{eV}$

Energie kosmische Strahlung bis $\text{ZeV} = 10^{21}\text{eV}$

$\hookrightarrow$ Superhiggs
Gammablitze

Globale Eigenschaften der Kerne

→ Das Atom und seine Bausteine

Das Elektron

1897 e^- von Thomson als freie Teilchenstrahlen in Entladungsröhren erzeugt. Mithilfe von Feldern wurde v sowie $\frac{m}{m_0}$ bestimmt. Ergebnisse unabhängig von Art Austrittskathode / Gas → universeller Bestandteil

Der Atomkern

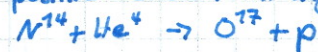
Thomson / Rosinenkuchenmodell: Atom besteht aus gleichmäßig verteilter, positiv geladener Masse.

In dieser Masse bewegen sich die e^- → vergleichbar wie Rosinen in einem Kuchen

Durch Rutherford'schen Streuversuch widerlegt: Streuexperimente mit α -Teilchen an schweren Atomen. Nachweis, dass positive Ladungsträger räumlich stark konzentriert sind. Es treten zudem große Streuwinkel auf, die nicht mit einer homogenen Ladungsverteilung verträglich waren, konnten aber durch ein zentrales Coulomb-Feld erklärt werden, welches durch einen massig positiv geladenen Kern hervorgerufen wird.

Das Proton

Beschuss leichter Atomkerne mit α -Teilchen, beim Beschuss von Stickstoff mit α -Teilchen wurden positive Teilchen mit ungewöhnlich großer Reichweite.



Neutronen

Das Neutron

Wieso bekannt? ehm Bestimmung → wenn e , m_p bekannt, fehlt noch Masse. Als neutrales Teilchen eher schwer nachzuweisen. Chadwick ließ neutrale Strahlung mit H, He und S kollidieren und misst Rückstoßenergie der Kerne in einer Ionisationskammer → Aus Stoßgesetzen ableitbar, dass Teilchen $\approx m_p$ haben.

Bindungszustand und Stabilität d. Systems werden durch die Bindungsenergie bestimmt, die sich aus d. Differenz der Masse des Systems und der Summe der Massen seiner Konstituenten ergibt. Ca. 1% der Kernmasse, „Massendefekt“ war einer der ersten experimentellen Beweise von $E=mc^2$

Massendefekt: Atomkerne sind leichter als ihre Bausteine zusammengekommen, stets positiv. Relativistisch: Man kann an Masse die Energie des ruhenden Teilchens ablesen.

↳ Die aufgewandte bzw. in Bindungen der Nukleonen enthaltene Energie vermindert Gesamtenergie bzw. Masse, die sich in Summe aller Bausteine ergeben würde.

$$E_B = \Delta m c^2$$

E_B , freigesetzte Bindungsenergie

Δm , Massendefekt, je größer Δm , desto stabiler Atomkern da $\Delta m \approx E_B$

Bindungsenergie pro Nukleon $\approx 8 \text{ MeV}$



Rutherford-Problem: e^- auf Keplerbahn mit bel. Ausdehnung, Exzentrizität, Orientierung. Aber: kreisende Ladung → damit beschleunigt → strahlt ständig Energie ab. Fusion

⇒ Ein in den Kern stürzender e^- könnte EM-Wellen jeder bel. Frequenz erzeugen, widerspricht der Beobachtung von Spektrallinien! → ^{56}Fe Spaltung

Massendefekt bei Molekülen irrelevant, weil Bindungsenergie klein $\approx \text{eV}$

Streuung

Strahl von Teilchen mit wohldefinierter Energie wird auf das zu untersuchende Objekt (Target) geschossen
↳ Reaktion zwischen Projektil und Target

Targets können fest, flüssig, gasförmig oder andere Teilchenstrahlen sein (LEP „Large e^-p collider“ CERN ^{20+60 GeV}
FNAL „Fermi National Accelerator Lab“
Proton, Antiproton 380 GeV
LHC proton, proton 13 TeV

Es gibt elastisch/inelastische Streuung. Elastisch: Teilchen unterscheiden sich nur in Impuls/Energien
Inelastisch: Teilchen a regt b auf höheren Energiezustand an, b geht wieder in wiederem Zustand über und zerfällt unter Emission (z.B. Photon) in mehrere Teilchen. a kann bei der Reaktion auch völlig verschwinden. ^{bsp Billard}

Energie muss umso größer sein, je kleiner die Struktur ist, die man auflösen will.

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h c}{\sqrt{2 m c^2 E_{kin} + E_{kin}^2}} \approx \begin{cases} h / \sqrt{2 m E_{kin}} & E_{kin} \ll m c^2 \\ h c / E_{kin} \approx h c / E & E_{kin} \gg m c^2 \end{cases}$$

λ muss in der selben Größenordnung wie Δx sein $\lambda \lesssim \Delta x$

$$p \gtrsim \frac{h}{\Delta x} \quad p c \gtrsim \frac{h c}{\Delta x} \approx \frac{200 \text{ eV fm}}{\Delta x}$$

Geometrischer Wirkungsquerschnitt

Modell zweier harter Kugeln mit R und r $r \ll R$, es kommt zur Reaktion wenn sich die Schalen beider Kugeln berühren. Bei Wellenphänomenen ist die geometrische Interpretation nicht möglich. Außerdem Wechselwirkungspotential relevant!
 $\sigma_{\text{geo}} = \pi (R+r)^2$

Totaler Wirkungsquerschnitt

Auß für die Wahrscheinlichkeit einer Reaktion zwischen den beiden Stoßpartnern (je größer, je wahrscheinlicher)

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{\text{Zahl der Reaktionen pro Zeiteinheit}}{\text{Zahl der Strahlteilchen pro Zeiteinheit} \cdot \text{Zahl der Streuzentren pro Flächeneinheit}} = \frac{\text{Zahl d. Streuereignisse pro Zeit und Targetkern}}{\text{Zahl der einfallenden Teilchen pro Fläche u. Zeit}}$$

Teilchenstrahl trifft auf dünnes Target $\rightarrow$ „fixed target“

Parameter einfallender Strahl:

Querschnittsfläche A	cm^2
Geschwindigkeit v_i	$\frac{\text{cm}}{\text{s}}$
Anzahldichte n_s	cm^{-3}
Flussdichte $\gamma = n_s \cdot v_i$	$\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$
Fluss $\phi = \gamma \cdot A = n_s \cdot v_i \cdot A$	s^{-1}

Parameter Target:

Dicke d	cm
Dichte ρ	g cm^{-3}
Molare Masse M_A	g mol^{-1}
Anzahldichte Targetkerne $n_t = \rho \cdot \frac{N_A}{M_A}$	
Anzahl Targetkerne im Strahl $N_t = n_t \cdot A \cdot d$	

$$\frac{dN_{\text{streu}}}{dt} = \gamma \cdot N_t \cdot \sigma_{\text{tot}} = \phi \cdot n_t \cdot d \cdot \sigma_{\text{tot}} \rightarrow \text{Proportionalitätskonstante für physikalische Eigenschaften des Streuprozesses} \rightarrow \text{totaler Wirkungsquerschnitt}$$

Einheit 1b „Barn“ $= 10^{-28} \text{ m}^2$
Kernphysik 10^{-3} b Teilchenphysik 10^{-18} b

Differentieller Wirkungsquerschnitt

Totaler Wirkungsquerschnitt oft nicht zugänglich im Experiment, Detektor deckt oft nur kleinen Teil dieses Phasenraumes ab $\rightarrow$ Differentieller Wirkungsquerschnitt, Streuwinkelverteilung $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ d.h. bez. Raumwinkel-Element $= A/r^2$
Kein aufschluss über Streuprozess geben (Bsp. Rutherford $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ entspricht genau stark konzentrierter $+$ -Ladung mit C -Potential)

$$\sigma_{\text{tot}} = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{d\sigma(\cos\vartheta)}{d\Omega} d\cos\vartheta d\varphi = 2\pi \int_{-1}^1 \frac{d\sigma(\cos\vartheta)}{d\Omega} d\cos\vartheta$$

oft. azimuthale Symmetrie (Nachrichten von Symmetrie möglich)

Luminosität

Eigenschaften von Strahl und Target zusammengefasst $L = \gamma \cdot N_t = \phi n_t d \Rightarrow \frac{dN_{\text{streu}}}{dt} = L \cdot \sigma_{\text{tot}}$

Integrierte Luminosität proportional zu Gesamtzahl der gestreuten Teilchen, Maß für Datmenge

$$N_{\text{streu}} = \int L dt \cdot \sigma_{\text{tot}}$$

Rutherford-Streuexperiment

Versuche Aufgaben - 1.1. Stoß an Kern, Stoßparameter b

Annahmen: Kern punktförmig mit (positiver) Ladung Ze und $s=0$, α -Teilchen punktförmig mit (positiver) Ladung und $s=0$
 Dünne Goldfolie $\rightarrow$ Nur eine Wn, Kern viel massiver als α -Teilchen $\rightarrow$ Rückstoß des Kerns vernachlässigbar
 Nur EM-Wn = Coulomb-Abstoßung zwischen Kern und α -Teilchen mit $V(r) \sim \frac{ZZe^2}{r}$
 $\rightarrow$ Elastische Streuung, keine starke Kraft (keine Kernanregung)

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Ruther}} = \left(\frac{ZZ\alpha k c}{4 E_{\text{kin}}}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^4\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}$$

Unphysikalisches Resultat $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ div $v \rightarrow 0$, Korrektur (teilweise) Abschirmung der Kernladung, falls Stoßparameter b von Größenordnung der Elektronenhitze

Die Winkelverteilung $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ der Rutherford-Streuung gibt keinen Aufschluss über die Größe der Kerne, Streuung erfolgt nur am C-Potential d. punktförmigen Kerns, Energie der α -Teilchen (4-6 MeV) zu klein, um endliche Kerngröße aufzulösen (benötigt $\sim 10^8$ eV)

Mott-Streuung und Formfaktor

Bei Rutherford nicht berücksichtigt: Spin, irrelevant für α -Teilchen ($s=0$) aber relevant für e^- ($s=\frac{1}{2}$)
 Relativistische Effekte bei leichten Teilchen mit $E_{\text{kin}} \gg 1 \rightarrow$ Endliche Ausdehnung des Kerns relevant, wenn λ_{De} in Größenordnung von r_{Kern}

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Ruther}} \cdot \frac{E'}{E} \cdot (1 - \beta^2 \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right))$$

Kernrückstoß Elektronenspin

$$\beta = \frac{v}{c} \rightarrow \sim \cos^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$$

$\Rightarrow$ Unterdrückung der Rückwärts-Streuung für $s=\frac{1}{2}$ Projektile für $v \rightarrow c$ geht $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_M \rightarrow 0$

Helizität: Projektion des Spins eines Teilchens auf den Impuls $h = \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{|\vec{s}| |\vec{p}|}$ ($\rightarrow$ ohne Spin-Wn erhalten (Drehimpulserhaltung))

Im Grenzfalle $\beta \rightarrow 1$ bleibt die Helizität erhalten (für $v \rightarrow c$ ist Spin für e^- quasi vollständig entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung zeigt)
 Für kleinere v ist h nicht erhalten, da Spin dann nicht Ben. richtung ausgerichtet $h = -1$ (fest), (linkshändig)

Bei Rückwärtsstreuung müsste sich die Spinprojektion aufgrund der Helizitätserhaltung umkehren, dies ist bei einem spinlosen Target aufgrund d. Erhaltung des Gesamtdrehimpulses nicht möglich. Außerdem Spinflip bei el. Wn nicht möglich, nur via elast. Wn möglich.

$\Rightarrow$ Für zunehmendes v bis hin zu $v \rightarrow c$ wird die Rückwärtsstreuung unterdrückt, Aber: Falls Target einen Spin hat, so kann die Drehimpulserhaltung durch Änderung d. Spinrichtung d. Targets gewährleistet werden $\rightarrow$ Rückwärtsstreuung möglich (Durch Spin von Target mag. Wn möglich)

Bei hohem Impulstransfer q ergeben sich in $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_M$ Minima $\Rightarrow \lambda_e \sim r_{\text{Kern}}$, es kommt zu Beugungseffekten
 Die Auflösung nimmt zu, das Elektron tastet nur einen Teil der Ladung im Kern ab $\rightarrow$ geringerer Wirkungsquerschnitt

Formfaktor $F(q^2)$ $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{exp}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} \cdot |F(q^2)|^2$ F ist FT der Ladungsverteilung

Formfaktor ist aussagen, die Ladung für e^- freizulegen

Optik:

$\rho(r)$ "Spaltkern"

$\delta(r)$ punktförmig

e^{-ar} exp

$aR^3 \Theta(r-R)$ hom. Kugel

$\frac{\rho_0}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}}$

Flacher Formfaktor $F=1$

Dipol z.B. proton

oszillierend

$\sim \sin$ $\rightarrow$ Durch Beugungseffekte erkennbare Minima

oszillierend

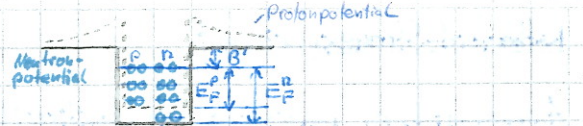
$\rightarrow$ super, weil dann punktförmiges Elementarteilchen entdeckt z.B. e^-

Woods-Saxon-Verteilung: Homogene Kugel mit diffusem Rand, gutes Modell für schwere Kerne

Größe der Ladungsverteilung bestimmbar aus Minima genau? Formel? Nein

$\downarrow$
konstante Dichte

Kernmodelle



Fermigasmodell

Unabhängige Nukleonen als Gas von Fermionen in effektivem Kernpotential. Protonen/Neutronen gehorchen mit $s = \frac{1}{2}$ der Fermi-Dirac-Statistik. Es wird angenommen, dass sich die Nukleonen unter Berücksichtigung des Pauli-Prinzips im gesamten Kernvolumen frei bewegen können. Das Potential, dem jedes Nukleon ausgesetzt ist, ist die Überlagerung der Potentiale der übrigen Nukleonen.

Die Differenz B' zwischen der Kante d. Potentialtopfes und der Fermi-Kante ist mit $B/A \approx 7-8 \text{ MeV}$ für die meisten Kerne konstant. Tiefe d. Potentials $V_0 = E_F + B' \approx 40 \text{ MeV}$, in guter Näherung unabh. von A . $E_{\text{kin}} \approx V_0 \rightarrow$ verhältnismäßig schwach gebunden. Bei Zugabe weiterer Nukleonen rutschen die Energieniveaus näher zusammen, die E_F bleibt als Folge der konstanten Kerndichte konstant.

Für stabile Kerne müssen die beiden Fermi-Kanten auf demselben Niveau liegen, andernfalls würde der Kern durch β -Zerfall in einen energetisch günstigeren Zustand übergehen.

Anderes Fermigas: Neutronensterne: Kernanziehung: Gravitationsdruck vs. Fermidruck

Leiterschul: Vorstufe Kerndichte $\rightarrow$ Asymmetrie und relativ (Einfacher) Dichte

Tröpfchenmodell

$\rightarrow$ Erklärbar durch kurzreichweitige Kernkräfte

Semi-empirisches Kernmodell: Kernmaterie inkompressibel, Kräfte zwischen Nukleonen kurzreichweitig (Analoge Wassertropfen + QM)

$$E_{b,k}(Z, A) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_a \frac{(A-2Z)^2}{A} + \delta$$

immer nur Nachbarn, für jedes Nukleon das gleich

Volumenterm: $\sim 15 \text{ MeV}$ B/A, zwischen Nukleonen wirken kurzreichweitige (klein verglichen mit Kernradius), gesättigte Kernkräfte. Nukleon-Wirkung nur mit engsten Nachbarn $\rightarrow$ Anzahl der NN $\sim A \rightarrow B/A = \text{const.}$

Oberflächenterm: Bindungsenergie für Nukleonen an der Oberfläche reduziert, da weniger Nachbarn $\sim A^{2/3}$ (Oberfläche d. Korns) nimmt mit wachsendem A ab

Coulomb-Term: Abstoßung der Protonen im Kern, $\sim \frac{Z^2}{A^{1/3}}$ nimmt mit zunehmendem A gering ab zu zu $\rightarrow$ mehr p-n, mehr Abstoßung

Asymmetrie-Term: Bei kleinen Massenzahlen sind Kerne mit der gleichen Anzahl von p und n bevorzugt. Um die C-Abstoßung durch die Kernkraft teilweise zu kompensieren, häufen schwere Kerne immer mehr Neutronen an.

Erklärung (Fermigasmodell): Die mittlere kinetische Energie d. Korns hat für feste Massenzahl A ein Minimum bei $N=Z$, für $N \neq Z$ wird diese größer $\Rightarrow$ Bindungsenergie wird kleiner

Paarung-Term: Gerade Anzahl von p, n erhöht Stabilität des Korns. $\rightarrow$ Kopplung von Neutronen/Protonen zu Paaren

Abhängigkeit von A , da Überlapp der Wellenfunktionen dieser Nukleonen in größeren Kernen geringer ist.

Antiparallele Spinkopplung, Antiparallele Spin $\rightarrow$ symmetrische Orts-WF $\Rightarrow$ nicht zusammen, stark gebunden

Schalenmodell

Einzelnes Nukleon im mittleren Potential der anderen Nukleonen (z.B. Woods-Saxon), Lsg der SG im Kugelsymmetrischen Potential mit Spin-Bahn-Kopplung $\rightarrow$ Quantenzahlen und Energieniveaus (Schalen) $\rightarrow$ korrekte Beschreibung der magischen Zahlen

2, 8, 20, 28, 50, 82, 126 $\rightarrow$ Ähnlich zu „Edelgas“-Konfiguration $\rightarrow$ volle Schale, glücklich

Auch analog: überschüssiges Nukleon „Leuchtnukleon“ $\rightarrow$ leicht Anregbar

fehlendes Nukleon „Loch“ $\rightarrow$ leichter Anregbar als volle Schale

doppelt magisch besonders stabil

Max. Bind. Energie bei $A=56$ Fe, Ni

Isotope = Kerne mit gleicher Kernladungszahl Z

Isotone = Kerne mit gleicher Neutronenzahl N

Isobare = Kerne mit gleicher Massenzahl $A=Z+N \rightarrow$ Spiegelkerne $^{14}\text{C} (Z=6, N=8) \quad ^{14}\text{O} (Z=8, N=6)$

Z und N gerade: gg-Kern

$\rightarrow$ haben sehr ähnliche Energieniveaus

Z als „magisches“ als gerade

$\rightarrow$ e- Energie $\sim Z^2$

Z als „Rutherford-Streuung“ $\rightarrow$ starke Kernpotentiale

Z und N ungerade: un-Kern

$A=Z+N$ ungerade: gu Kern (Z gerade, N ungerade), ug Kern (Z ungerade, N gerade)

Isospin I

Multiplets von Energiezuständen bei Kernen erinnern an Spin-Kopplungs Multipletts $\rightarrow$ Beschreibe Proton/Neutron als 2 Zustände des Nukleons, die ein Duplett bilden. Der Isospin wird wie q_n -Drehimpuls behandelt $\rightarrow$ z.B. können sich ein Proton und ein Neutron in einem Zustand mit Gesamtisospin 1 oder 0 befinden.

$$\text{Nukleon} = \begin{pmatrix} |p\rangle \\ |n\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |I=\frac{1}{2}, I_3=\frac{1}{2}\rangle \\ |I=\frac{1}{2}, I_3=-\frac{1}{2}\rangle \end{pmatrix} \quad \vec{I}_3^{\text{Kern}} = \sum \vec{I}_3^{\text{Nuklon}} = \frac{Z-N}{2}$$

Streuung an Nukleonen

Streuung hochenergetischer Elektronen (MORE POWER) an gasförmigen Wasserstoff und Deuterium.

Struktursgröße $< 1 \text{ fm}$ $\rightarrow$ Impulsübertrag $|q| > 200 \text{ MeV/c}$ ($\hbar c = 197 \text{ MeV fm}$ $\rightarrow$ Unschärferelation)

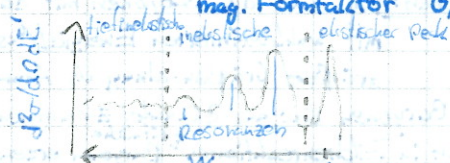
Teilchenenergie vergleichbar mit Nukleonmasse (z.B. $m_p = 938 \text{ MeV/c}^2$) $\rightarrow$ Rückstoß berücksichtigen

Nukleonen sind Fermionen $\rightarrow$ Spin von Elektronen und Nukleon berücksichtigen $\rightarrow$ Spin-Flip erlaubt

$$\hookrightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} \left[1 + 2\tau \tan^2\left(\frac{\nu}{2}\right) \right] \quad \tau = \frac{Q^2}{4m^2 c^2} \quad \text{Differenzieller Wq für Streuung an punktförmigen Nukleonen}$$

Nicht-punktförmige Nukleonen $\rightarrow$ Ladungs-/Stromverteilung $\cdot$ Rosenbluth-Formel el. Formfaktor G_E

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} \left[\underbrace{\frac{G_E^2(Q^2) + \tau G_M^2(Q^2)}{1 + \tau}}_{v\text{-unabh.}} + \underbrace{2\tau G_M^2(Q^2) \tan^2\left(\frac{\nu}{2}\right)}_{v\text{-abh.}} \right]$$



Aus Experiment: G_M für Proton und Neutron bis auf Skalierungsfaktor ähnlich, Q^2 -Abh. des Formfaktors und somit Dipolcharakter $\mu_p = 2.79 \cdot \mu_N$, $\mu_n = -1.91 \cdot \mu_N$ mit Kernmagneton $\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p}$ $\rightarrow$ Anomales mag. Moment, Hinweis auf innere Struktur der Nukleonen why? Ohne innere Struktur würde der Faktor passen $C=2$

G_E für Neutron $= 0$ wie erwartet, G_E für Proton auch Q^2 -Abh. $\rightarrow$ exponentiell abfallende Ladungsverteilung

$\approx 1-2 \text{ GeV}$, inelastische Streuung $\rightarrow$ Invariante Masse des hadronischen Systems W größer als Protonmasse, es kommt zu „Resonanzen“ $\hookrightarrow$ Proton erhält genug Energie um in angeregten Zustand zu wechseln, neues „Teilchen“, zerfällt bei Übergang von angeregter $\rightarrow$ Grundzustand wieder Δ -Resonanz (Abh. von Imp.-G./Energieübertrag)

Tiefinelastische Streuung: $\approx 26 \text{ GeV}$ Bjorken-Skalenvariable Maß für Inelastizität $x_B = \frac{Q^2}{2M\nu}$ elast. Streuung $Q^2 = 2M\nu$ $\Rightarrow x_B = 1$ $W = M$

$$\frac{d^2\sigma}{dQ^2 dE'} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} \left[W_2(Q^2, \nu) + 2W_1(Q^2, \nu) \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]$$

inel. Streuung $Q^2 > 2M\nu$ $\Rightarrow 0.2 < x_B < 1$ $W > M$

Inelastische Streuung $\rightarrow$ Impuls- und Energieübertrag $\Rightarrow$ Abh. von 2 Variablen z.B. Q^2 und E'

$\hookrightarrow$ Parametrisierung mithilfe von Strukturfunktionen $W_{1,2}(Q^2, \nu)$, analog zu Formfaktoren

Experimental: $W > 36 \text{ GeV}$, Strukturfunktion praktisch konstant $\rightarrow$ punktförmiges Teilchen $\rightarrow$ Partonmodell, Energie E' groß genug, sodass Parton $\leftarrow$ freigesetzt wird. Der Wirkungsquerschnitt fällt nur langsam mit Q^2 ab (Bjorken-Skalierungsverhalten) $\rightarrow$ Nahezu konstanter Formfaktor, punktförmige Ladungsverteilung; geringe Q^2 Abhängigkeit spricht für elastische Streuung

Erklärung: Partonmodell (später Quarks), Bestandteile des Protons $\rightarrow$ Teilchen, die mit hoch satter Energie aufgelöst werden, an denen dann wieder elastische Streuung stattfindet

„Abhängigkeit der Strukturfunktion bei tiefinelastischer Streuung von nur einer kinematischen Größe“

Elementarteilchen im Standardmodell

Fermionen $s = \frac{1}{2}$: Elementare Bausteine der Materie, 3 Familien an Quarks + Leptonen

6 Quarks: up, down, charm, strange, top, bottom } plus Antiteilchen

6 Leptonen: Elektron, Myon, Tau + Neutrinos

↳ jeweils 3 Familien (Generationen) mit ähnlichen Eigenschaften, jede Familie Dublettstruktur

	$s=1$	$t=1$
$+2/3$	$u, 2.9\text{GeV}$ $U, 1.5$	$c, 1.2\text{GeV}$ C
$-1/3$	$d, 4.8\text{GeV}$ $D, 1.5$	$s, 9.5\text{GeV}$ $S, 1$
0	$\nu_e, 1.2\text{eV}$ ν_e	$\nu_\mu, 1.7\text{GeV}$ ν_μ
-1	$e, 0.511\text{MeV}$ e	$\mu, 1.056\text{GeV}$ μ

Eichbosonen $s=1$: Fundamentale Wechselwirkungen

Photon $\rightarrow$ Elektromagnetische Wechselwirkung (Quantenelektrodynamik QED) wirkt auf alle geladenen Teilchen, ~~kurzreichweitig~~ langreichweitig (Bei hohen Energien kommt es zur Elektrifizierung von W)

Gluonen $\rightarrow$ Starke W (Quantenchromodynamik QCD), wirkt auf alle Hadronen (mit innerer Farbladung), ~~kurzreichweitig~~ $\sim 2 \cdot 10^{-17}\text{m}$

W/Z -Bosonen $\rightarrow$ Schwache W (Elektroschwache Theorie EW), wirkt auf alle Teilchen mit schwacher Ladung, ~~kurzreichweitig~~ $\sim 10^{-16}\text{m}$

Massenboson $s=0$: Fundamentale Massengenerierung, sehr kurzreichweitig

Hadronen: Subatomare Teilchen, die von der starken W zusammengehalten werden

Es gibt 2 Klassen von Hadronen, Baryonen ($s = \frac{1}{2}$) und Mesonen ($s = 1$)

Photon / Gluon: keine Masse

Baryonen: p, n sind die Baryonen mit der geringsten Masse, sie sind die Grundzustände eines reichen Anregungsspektrums mit wohldefinierten Energie/Massenzuständen. Unterschied: Energie/Massendifferenzen zwischen den Zuständen größere Größenordnung als Atomphysik $\rightarrow$ Betrachte Zustände als individuelle Teilchen mit aufspander Lebensdauer

Alle Baryonen sind aus 3 Quarks zusammengesetzt (es ergibt sich aus dem $s = \frac{1}{2}$ Quark der Baryonenspin)

Werden in Teilchenreaktionen ^{zusätzliche} Baryonen erzeugt, so wird zugleich die gleiche Anzahl Antibaryonen erzeugt $\rightarrow$ Baryonenzahl B

$B=1$ für Baryonen und $B=-1$ für Antibaryonen $\rightarrow$ Quarks $B = \frac{1}{3}$, Antiquarks $B = -\frac{1}{3}$

B ist eine Erhaltungsgröße $\rightarrow$ Zahl der Quarks - Zahl Antiquarks bleibt erhalten verboten: $p \rightarrow \pi^0 + e^+$

Mesonen: Hadronen aus Quark-Antiquark-Paaren, es gibt keine Mesonenzahlerhaltung ($\rightarrow$ plusibel weil ja immer Quark-Antiquark-Paare) Leichte Hadronen: Pionen $|\pi^+\rangle = |u\bar{d}\rangle$, $|\pi^-\rangle = |d\bar{u}\rangle$, $|\pi^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle]$

Quark-Gluon- W

Farbe: Eigenschaft der Quarks zur Erfüllung d. Pauli-Prinzips für Quarks in Hadronen

Bsp. $|\Delta^{++}\rangle$ -Resonanz $|\Delta^{++}\rangle = |u^1 u^2 u^3\rangle \rightarrow$ WF symmetrisch unter Teilchenaustausch, verstößt gegen Pauli-Prinzip

$\rightarrow$ Eigenschaft „Farbe“: rot, blau, grün bzw. Anti- $\rightarrow$ Man sind drei u-Quarks unterscheidbar

Gluonen: W , die die Quarks in Form von Hadronen zusammenhält bez. man als starke W . Bei der starken W sind die Gluonen die Austauschteilchen zwischen den Quarks, sie koppeln an die Farbladung. Gluonen tragen gleichzeitig Farbe und Antifarbe z.B. $r\bar{g}$, $r\bar{b}$, können durch ihre eigene Farbladung auch untereinander Wechselwirken.

Hadronen als farbneutrale Objekte

Zusätzlicher Freiheitsgrad resultiert nicht in großer Anzahl von Varianten (Experimentell bewiesen) $\rightarrow$ Bedingung, dass nur farblose Teilchen („Nettofarbe Null“) existieren können. als freie Teilchen existieren können

$\rightarrow$ „Confinement“: Quarks konnten bisher nicht als freie Teilchen beobachtet werden (Potenzial wächst mit Abstand beliebig)

Bsp. π^+ Meson $|\pi^+\rangle = \begin{cases} |u_r \bar{d}_{\bar{r}}\rangle \\ |u_b \bar{d}_{\bar{b}}\rangle \\ |u_g \bar{d}_{\bar{g}}\rangle \end{cases}$ Pion ist Mischung dieser Zustände, Zustände mischen konstant durch Gluonenaustausch, Nettofarbe bleibt jedoch erhalten

p Proton $|p\rangle = \begin{cases} |u_r u_r d_g\rangle \\ |u_r u_b d_g\rangle \\ |u_r u_g d_b\rangle \end{cases}$ Jedes Quark muss eine andere Farbe besitzen

$\Rightarrow$ Einsteht, wieso es z.B. keine $|qq\rangle$ oder $|qq\bar{q}\rangle$ Hadronen gibt $\rightarrow$ Zustände wären nicht farbneutral

Neutrinos

Als elektrisch neutrale Leptonen unterliegen Neutrinos weder der starken noch der schwachen elektromagnetischen W . Da sie selbst in der schwachen W einen sehr kleinen Wirkungsquerschnitt besitzen können sie in der Regel nur indirekt durch den Nachweis geladener Teilchen nachgewiesen werden. $\rightarrow$ Betrachte Energie, Impuls und Drehimpuls $\rightarrow$ Anwendung z.B. als Energie/Impulsbilanz μ -Zerfall erkennbar, dass neben e^- ein weiteres neutrales Teilchen mit $s = \frac{1}{2}$ existiert. Erhaltungssätze

Leptonenzahlerhaltung

Erzeugung oder Vernichtung eines Leptons immer mit der Erzeugung bzw. Vernichtung eines Anti-Leptons.

$$\hookrightarrow L_l = N(l) - N(\bar{l}) + N(\nu_l) - N(\bar{\nu}_l) = \text{const.} \quad \text{für } l=e, \mu, \tau$$

(Zahl immer in
leichte Teilchen)

Erlaubt:

$$p + \mu^- \rightarrow \nu_\mu + n$$

$$e^+ + e^- \rightarrow \nu_\mu + \bar{\nu}_\mu$$

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$$

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$$

$$\tau^- \rightarrow \pi^- + \nu_\tau$$

Neutrinos immer mit schwacher W, Aber! Es gibt schwache W ohne Beteiligung von Neutrinos

Verboten:

$$p + \mu^- \rightarrow \pi^0 + n$$

$$e^+ + e^- \rightarrow \nu_e + \nu_\mu$$

$$\pi^- \rightarrow e^- + \nu_e$$

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_e$$

$$\tau^- \rightarrow \pi^- + \nu_e$$

Flavour als Quantenzahl u, d, s, c, b

Flavourquantenzahlen der Quarks haben dasselbe VZ wie Ladung Q

Flavours sind in der starken W ^{+EM} erhalten, in schwacher W nicht

Experimentelle Methoden

geladene Teilchen $z \neq 0$

Teilchenklasse

Beispiele

Wichtigste Prozesse

geladene Teilchen

Myonen, Pionen, Protonen

Ionisation, Anregung von Atomen, Cherenkov-Strahlung

sehr leichte Teilchen

Elektronen/Positronen

Bremsstrahlung ($\rightarrow$ EM Kaskade), Ionisation

geladene Hadronen

Pionen, Protonen, Antiprotonen

Ionisation, Kernreaktionen ($\rightarrow$ hadronische Kaskade), Zerfälle

Neutrale Teilchen $z = 0$

Photonen

Absorption (Photoeffekt), Streuung (Compton-Effekt), Kaskaden (Paarbildung)

Hadronen z.B. K^0, n

Streuung, Kernreaktionen ($\rightarrow$ hadronische Kaskade), Zerfälle

Neutrinos ν

Nur schwache Wechselwirkung: geladene und neutrale Ströme

Nachweismedium

Eigenschaften des Nachweismediums beeinflussen Wechselwirkung:

Kernladung: Elektromagnetische Effekte proportional zu Kernladungszahl Z^n (n unterschiedlich für untersch. Effekte)

Dichte/Aggregatzustand: Zahl der Streuzentren pro Fläche, Bindung der Streuzentren

EL/Mag. Felder im Medium

Leitfähigkeit: z.B. elektronische Eigenschaften von Normalleitern-Halbleitern-Supraleitern

Energieverlust geladener Teilchen

Energieverlust durch Ionisation

Inelastische Stöße mit Elektronen $\rightarrow$ Ionisation und Anregung von Atomen

Bei schweren Teilchen dominant (Leichte Teilchen wie e^- werden durch Kern abgelenkt, Protonen sind schwer und werden durch), charakterisiert über spezifischen Energieverlust dE/dx

Bethe-Bloch-Formel

$$-\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle = 4\pi N_A r_e^2 m_e c^2 z^2 \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 T_{\max}}{I^2} - \beta^2 - \frac{\delta(\beta\gamma)}{2} \right], \quad 0,1 \leq \beta\gamma \leq 1000$$

z : Ladungszahl des einfallenden Teilchens

Z, A : Kernladungszahl und molare Masse des Nachweismediums

$T_{\max}$: Maximaler Energieübertrag

$\delta(\beta\gamma)$: Fermi-Dichtekorrekturen, E-Feld des Teilchens durch Polarisation des Mediums abgeschwächt $\rightarrow$ geringerer rel. Anstieg

I : Ionisationsenergie $\rightarrow$ früher Bloch-Näherung $I \approx 10 \text{ eV} \cdot Z$, heute tabelliert

Energieverlust nur abhängig von $\beta\gamma$ und z^2 , nicht von der Teilchenmasse; bei Absorbermaterial Energieverlust $\sim Z$

Abhängigkeit von $\beta\gamma$: $\beta\gamma < 1 \sim \beta^{-2}$, $\beta\gamma \approx 3-4$ Breites Minimum $\rightarrow$ minimal ionisierende Teilchen (MIT), durch $\sim \ln$ und Plateau

Nachweis: Keime für Kondensation von Gasbläschen, Drift von Elektronen/Ionen in E/B-Feld, Elektro-Loch Paare im Halbleiter

Teilchenidentifikation: Impuls (später) über Spurdetektor ($\rightarrow$ Ablenkung im Feld); Spezifischer Energieverlust: Bestimmung von $\beta\gamma$ im β^2 -Bereich

$\hookrightarrow$ Bestimmung der Masse aus $p = \gamma M v = \beta\gamma M c$

Mittlere Reichweite $\rightarrow$ Integration der Bethe-Gleichung (Annahme: kontinuierliches Abbremsen des Teilchens)

$\hookrightarrow$ Energiedosis als Fkt der Weglänge, Peak am Ende der Weglänge: Bragg-Peak (Ausgesprochen für schwere Ionen)

Tumortherapie

Dünner Absorber: Asymmetrische Verteilung um mittleren Energieverlust (Landau-(Vavilov)-Verteilung) durch großen Energieübertrag auf $S-e^-$

Dichter Absorber: Geringere Fluktuationen, nähert sich Gauß-Vert. an, es kommt durch vielfache Coulomb-Streuung zu Ablenkung

$\hookrightarrow$ Detektoren: Auflösung durch Vielfachstreuung begrenzt $\rightarrow$ geeignete Materialien, kleine Kernladungszahl z.B. Narkyllium $Z=4$

Energieverlust durch Strahlung

Grundlegender Prozess: Wechselwirkung mit $E\cdot A$ -Feldern $\rightarrow$ elektromagnetische Strahlung
Emission von μeV bis GeV , Bremsstrahlung, Synchrotronstrahlung, Cherenkovstrahlung, Übergangsstrahlung
Strahlung ist dominanter Effekt bei leichten Teilchen

Energieverlust von Elektronen

$\rightarrow$ (Kühlen e^- + Stopf e^-)

Ionisation: kleine Modifikation Bethe-Formel, da bei Stößen ununterscheidbare Teilchen (Maximaler Impulsübertrag maximiert)

Bremsstrahlung: e^- le^+ werden im Coulomb-Feld d. Kerns abgebremst/abgebremst

$\rightarrow$ QED: Ww von geladenen Teilchen mit Emission/Absorption von Photonen verbunden

Es bildet sich ein kontinuierliches Spektrum bis zur maximalen $\rightarrow$ Elektronenenergie E_0 aus

$\rightarrow$ Charakteristische monoenergetische Linien durch Fluoreszenz (e^- bomb. e^- von Kern in höhere Zustände z.B. $\rightarrow$ Übergänge) heraus $\rightarrow e^-$ nicht nach

Bei der kritischen Energie E_c sind Energieverluste durch Bremsstrahlung/Ionisation identisch

höhere Energien niedrigere Energien

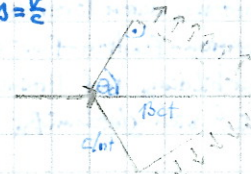
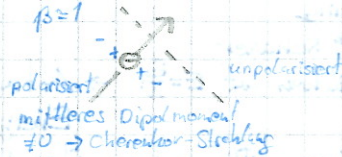
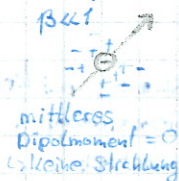
$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{Brems}} = \frac{4\alpha^3 N_0 Z^2}{m^2 A} \ln\left(\frac{183}{Z^{1/3}}\right) \cdot E = \frac{1}{X_0} E \rightarrow \left(\frac{dE}{dx}\right)_B \sim E!$$

Strahlungslänge X_0 : Wichtige materialspezifische Größe für e^- -Ww, gibt an nach welcher Strecke die Energie eines relativistischen e^- auf $1/e$ abgefallen ist $\sim \frac{1}{Z^2} \Rightarrow$ Blei mit $Z=82$ als Abschirmung

Cherenkov-Strahlung

beladenes Teilchen in Medium mit Brechungsindex n mit Geschwindigkeit größer als Phasengeschwindigkeit des Lichts im Medium ($v_{ph} = c/n$) $\rightarrow$ Charakteristische Strahlung

Phys. Bild: Asymmetrische Polarisation des Mediums für große $\beta = \frac{v}{c}$



Abstrahlung unter Kegel mit Öffnungswinkel $\theta_c \rightarrow$ Cherenkov-Winkel, Huygen'sches Prinzip

Anwendung: Cherenkov-Zähler

Minimale Geschwindigkeit für Cherenkov-Strahlung $\beta_{thr} = v_{min}/c = \frac{1}{n} \Rightarrow$ Teilchenidentifikation über Beob. von C-Strahlung

Bsp. Wasser ($n=1,33$): $\beta_{thr} = 0,75$

Pion $p=1\text{GeV}/c$, $\beta = p c/E = 0,98 \rightarrow$ Strahlung

Proton $p=1\text{GeV}/c$, $\beta = p c/E = 0,71 \rightarrow$ keine Strahlung

Oder Teilchenidentifikation über Masse mit bekannten Impuls p und $\beta = p c/E$

$\rightarrow$ Bestimmung β über Messung des Cherenkov-Winkels θ_c (Abbildung/Messung d. Kegels)

Übergangsstrahlung

Charakteristische Strahlung beim Übergang zwischen Vakuum und Medium mit Permittivität ϵ_r mit

$$I = \alpha Z^2 \gamma \frac{\hbar \omega_D}{3} \sim \gamma$$

Bei Übergang ins andere Medium entsteht durch MW-Gleichungen $\rightarrow$ Energieabgabe in Form von Strahlung

Anwendung: Übergangsstrahlungsdetektor

Bestimmung Lorentzfaktor γ über Intensitätsmessung für viele Übergänge (dünne Folien)

Mit bekanntem Impuls p ($\beta \approx 1$) und $\gamma = E/(mc^2)$ = Teilchenidentifikation über Masse

Wechselwirkungen von Photonen mit Materie

Kleine Energien $< 1 \text{ keV}$: Photoelektrischer Effekt (außerdem Rayleigh- und Compton-Streuung)

Mittlere Energien $\sim 1 \text{ keV}$: Compton-Effekt

Hohe Energien $> 2 \text{ keV}$: e^+e^- -Paarbildung

Absorption von Photonen: Lambert-beersches Gesetz für Intensität $I(x) = I_0 e^{-\mu x}$

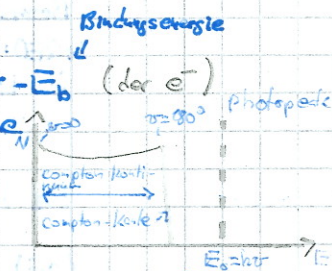
μ : Absorptionskoeff.
 $\sim \sigma$

Photoelektrischer Effekt $\rightarrow$ Absorption

Absorption von Photonen in Elektronenhülle („herausschlagen der e^- “), $\sigma \sim Z^5$

$$E_{\text{kin}} = h\nu - E_b \quad (\text{der } e^-)$$

Charakteristische Absorptionskanten: Schwellen für Photoionisation an Energieniveaus der Atome



Compton Effekt $\rightarrow$ Energieverlust

Inelastische Streuung eines Photons an quasi-freien Hüllenelektronen $\rightarrow E'(\nu) = \frac{E}{1 + E(1 - \cos \theta)}$

Herausgeschlagene e^- : kontinuierliches Energiespektrum mit maximalen Energieübertrag bei Rückstreuung ($\theta = 180^\circ$) an der Compton-Kante. (Obwohl $\rightarrow$ bei Photo weniger Energie haben!)

Paarbildung $\rightarrow$ Absorption

Umwandlung eines Photons in ein e^+e^- -Paar $\rightarrow$ Schweleneffekt wenn Photon genug Energie hat $E_{\text{thres}} = 2m_e c^2 \left(\frac{m_e}{M_{\text{Kern}}} \right) \approx 1,02 \text{ MeV}$

Da Impulserhaltung nicht verletzt werden darf nur im Coulombfeld eines Kernes möglich

σ ähnlich zu σ_{Brems} $\Rightarrow X_0$ charakteristisch für Bremsstrahlung und Paarbildung

$\hookrightarrow X_0$ $E(e^-)$ auf $1/e$ reduziert und $X_0 \approx 7/9$ der mittleren freien Weglänge für Photonen

Elektromagnetischer Schauer

Primäres Elektron: Photonen durch Bremsstrahlung

Primäres Photon: Elektron-Positron-Paar durch Paarbildung

$\Rightarrow$ Kaskade aus Paarbildung und Bremsstrahlung $\rightarrow$ EM Schauer

Die Anfangsenergie teilt sich gleichmäßig auf die N Teilchen auf $E = \frac{E_0}{N} \rightarrow$ Abbruch der Kaskade bei kritischer Energie E_c (Bremsstrahlung nicht mögl.)

Anwendung: EM-Kalorimeter $\rightarrow$ Destruktive Energiebestimmung e^+e^- und μ über Schauereigenschaften

Hadronische Wn

Wn von Hadronen in Materie: Alle Hadronen, Prozesse der starken Wechselwirkung $\rightarrow$ hadronische Schauer
+ bei geladenen Hadronen EM-Wn

Charakteristische Längenskala: Hadronische Wechselwirkungslänge λ , λ deutlich größer als X_0

Komplexes Zusammenspiel vieler Prozesse, Produktion sekundärer Hadronen (überwiegend Pionen), Zerfälle von geladenen Pionen und Myonen, Zerfall $\pi^0 \rightarrow \gamma \gamma \rightarrow$ EM-Subkaskade

$\hookrightarrow$ Anwendung: Hadronisches Kalorimeter: destruktive Energiebestimmung für Hadronen
Luftschauxperimente: Erdatmosphäre als hadronisches Kalorimeter

Detektionstechniken

Klassifizierung nach:

- ↳ Messgröße, z.B. Ort, Impuls, Energie, Teilchenart
 - ↳ Detektionstechniken, z.B. Ionisation von Gasen und Halbleitern, Szintillationslicht, Cherenkov / Übergangsstrahlung
- Detektorsysteme angepasst an physikalisches Problem und experimentelle Umgebung

Gasgefüllte Detektoren

Kammer mit Zählgas (z.B. Argon), Elektroden mit Hochspannung

Es kommt zur Primärisionisation des Zählgases → Drift von Elektronen (eventuell ausgelöste Sekundäre) und Ionen zu Elektroden

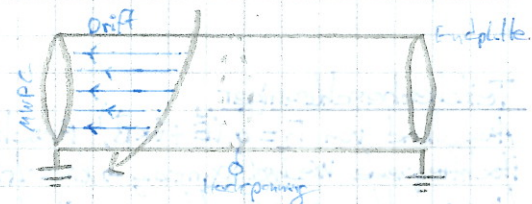
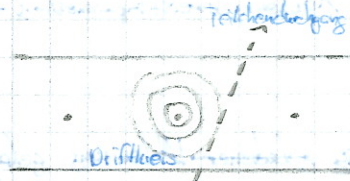
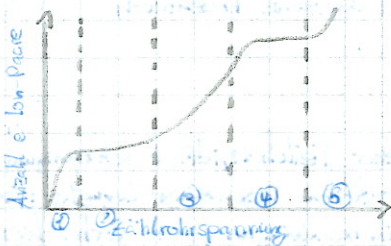


Prinzip der Gasverstärkung: Zylindrische Kammer mit Anodendraht → $E(r) \sim \frac{1}{r}$ → Hohes E-Feld am Anodendraht
→ Gasverstärkung: primär e^- wird so stark beschleunigt, dass weitere e^- herausgeschlagen werden usw. → „Townsend-Lawine“, typisch $\cdot 10^5$

Optional: Löschgas mit vielen Freiheitsgraden (→ zur Anregung) zur Absorption von UV-Photonen, die eventuell durch Ionisation freigesetzt werden

Betriebsmodi:

- 1) Rekombination, Primärelektronen kommen nicht bis zur Kathode sondern rekombinieren vorher
- 2) Ionisationskammer, Primärelektronen werden detektiert, jedoch nur sehr kleine Raten
- 3) Proportionalitätsbereich, Betriebsmodus → Anzahl der e^- -Ion-Paare $\sim$ zu Primärisionisation aber verstärkt
- 4) Plateaubereich, Anzahl e^- -Ion-Paare unabhängig von Primärisionisation, keine Verstärkung notwendig
- 5) Gasentladung, keine Primärelektronen notwendig, es kommt auch so zur Ionisation



Vieldraht-Proportionalkammer (Multi-Wire-Projection-Chamber (MWPC))

Messung der Ortskoordinaten eines Teilchendurchgangs → großflächige planare Anordnung vieler paralleler Anodendrähte mit $d(0,100\mu m)$ und Abstand $0(mm)$, Betrieb im Proportionalbereich

Driftkammer: Verbesserte Ortsauflösung durch Messung der Driftzeit der Elektronen → e^- muss irgendwo auf äquidistanten Kreispunkten gewesen sein → mehrere Ebenen für sehr genaue Teilchenrekonstruktion

Time-Projection-Chamber (TPC): Drift der Ladungsträger in einem konstanten elektrischen Driftfeld E_0 zwischen Kathode (Mitte) und Anode (Seiten)

⇒ 3D-Abb. der Wechselwirkung, (x,y) → Elektronen an segmentierter Elektrode,

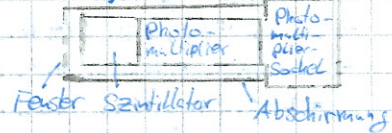
(z) → Driftzeit t_0 mit v_0 ergibt z

- ↳ Suche nach WIMPS („weakly interacting massive particle“), werden postuliert um dunkle Materie Problem zu lösen

Halbleiterdetektoren

Scintillationsdetektoren

Umwandlung von Anregungen im Festkörper durch ionisierende Teilchen in (sichtbares) Licht in Szintillationsmaterial
↳ Nachweis in lichtempfindlichen Detektoren (Photodetektoren)
Anwendung: Zählung von Teilchendurchgängen (sehr schnell), Energiemessung



Detektoren in der Teilchenphysik

Fixed Target vs. Collider, Teilchenstrahl trifft auf festes Target → Kollisionsprodukte in Vorwärtsrichtung → Vorwärtsspektro-
zwei Teilchenstrahlen kollidieren → Kollisionsprodukte in alle Richtungen → zylindersymmetrischer 4π -Detektor
↳ höhere Energien mit Collider möglich

CMS-Detektor: Schalenprinzip

→ zuerst Impuls, dann Energie!

Innerste Schale: Spurendetektor, Impulsmessung geladener Teilchen (Ablenkung durch $\vec{B}$ -Feld) → Lorentzkraft, Krümmungsradius
SI-Detektoren liefern Spurpunkte → Spurauswertung, liegen die Spurpunkte auf einer gemeinsamen Helixbahn? d. Helix + Neigungswinkel
↳ Impuls

Elektromagnetisches Kalorimeter (ECAL): Energiemessung Teilchenidentifikation von EM-wei Teilchen ($e^+, \mu^+, \pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$)
↳ Rekonstruktion des EM-Schneiders, CMS: $PbWO_4$ -Kristalle → homogenes Kalorimeter, gleichzeitig Absorber und Szintillator

Hadronisches Kalorimeter (HCAL): Energiemessung von Hadronen → Rekonstruktion von Jets, Barriere: Abl. von Absorber
Jets → Bündel von Hadronen, aufgrund von Farblosgkeit (Confinement) werden z.B. Quarks generiert um Confinement zu erfüllen
↳ Jet alles in die gleiche Richtung + viele Teilchen weil Farbe

Magnet, Eisenjoch, Myondetektor: Magnet umfasst Spurendetektor + Kalorimeter, homogenes axiales $\vec{B}$ -Feld $\vec{B} = 3.8 T$
Eisenjoch soll Hadronen abschirmen, danach Myonennachweis + Impulsmessung → Gasgefüllte Detektoren

Myonen sind MIPs

Teilchenbeschleuniger

Ausgehend von $\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ Beschleunigung geladener Teilchen, idR Beschleunigung durch
Hochfrequente Wechselspannung → linear / ringförmig
Linealbeschleuniger → Beschleunigung wird wichtiger Polung → „Kaskaden“ → weiterbeschleunigen, oft Vorbeschleuniger aber
praktisch durch Länge limitiert

Zyklotron
festes $\vec{B}$ -Feld
→ Annähernder Radius der Teilchenbahn

Ein großer Dipolmagnet

Beschleunigung durch HF zwischen
D-Polschulen

Limits: Baugröße, Stärke $\vec{B}$ -Feld

Synchrotron
variables $\vec{B}$ -Feld, kann synchron mit $\vec{p}$ angehoben werden
→ konstanter Radius der Teilchenbahn

Viele kleine Dipol (Ablenkung) und Quadrupol (Fokus)-
magnete entlang Teilchenbahn
Beschleunigung (und Ausgleich von Strahlungsverlusten) durch
HF in Hochfrequenzresonatoren

Limit Protonen: $\vec{B}$ -Feld
Limit e^- : Bremsstrahlung (→ Synchrotronstrahlung)

Alle Ringbeschleuniger: LHC, Tristram (Transposable Ring Intersecting Storage Accelerator in Japan)

Myon-Detektor Szintillator, Abschirmung, Szintillator

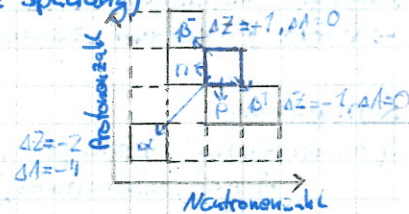
→ wenn 2 Signale durch Myon, alle anderen Teilchen in Abschirmung hängen bleiben

My Life is falling apart → Kernzerfälle

Nur wenige Kerne sind stabil gegen Zerfall (α , β , γ -Zerfall und Spaltung)

Exponentielles Zerfallsgesetz $dN = -\lambda \cdot N \cdot dt \Rightarrow N(t) = N(0) \cdot e^{-\lambda t}$

- ↳ Halbwertszeit $t_{1/2} \rightarrow 50\%$ des Ensembles sind zerfallen $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$
- ↳ Mittlere Lebensdauer $\tau = \frac{1}{\lambda} \rightarrow 1/e$ des Ensembles ist nicht zerfallen



Aktivität A : Beschreibt die Zahl dN der Zerfälle pro Zeiteinheit $dt \rightarrow$ keine konstante Größe, da die Ensemble Zahl N durch die Zerfälle abnimmt, damit nimmt auch A ab

$\lambda \sim \lambda \Rightarrow A = \frac{dN}{dt} = -\lambda N \rightarrow A(t) = A(0) \cdot e^{-\lambda t}$ 1 Becquerel = 1 Zerfall/s

α-Zerfall

p, n sind auch in schweren Kernen mit bis zu 8 MeV gebunden, und können im Allgemeinen nicht entweichen. Die Emission eines gebundenen Systems aus mehreren Nukleonen ist jedoch möglich, da die Bindungsenergie dieses Systems dann zusätzlich zur Verfügung steht. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein solches System im Kern formiert, nimmt mit der Zahl der benötigten Nukleonen drastisch ab.

Starke Bedeutung: Emission He^4 -Kern, mit 28 MeV/Nukleon außerordentlich stark gebunden.

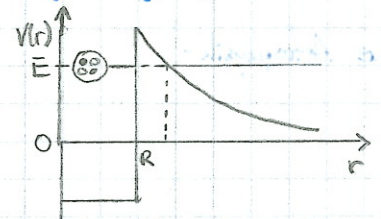
α-Zerfall tritt bei instabilen Nukleiden auf, bei denen die Kernkräfte die abstoßenden Kräfte der Protonen untereinander nicht vollständig aufheben können. → übergehen in energetisch-günstigeren Zustand

Bedingung: $Q_\alpha = B(Z-2, A-4) - B(Z, A) + B_\alpha(28, 3 \text{ MeV}) > 0$

Tochterkern (TK) Mutterkern (MK) α-Teilchen

$E_{kin}(TK)$

$E_{kin}(\alpha) \sim 1 \text{ MeV}$



Es werden diskrete α-Energien emittiert "Monoenergetisch" Das α-Teilchen muss noch aus dem Kern "entkommen" → α-Teilchen tunnelt durch Coulombwall V_c des Restkerns. Zerfallskonstante abh. von Bindungswahrscheinlichkeit p_α , Tunnelversuche pro Zeiteinheit Gesamttransmission abh. von "Gamow-Faktor": $T_{\text{ges}} = e^{-2G}$ $G \approx \frac{Z-2}{13} \cdot (Z-2)^{3/2}$

α-Kerne weisen eine hohe Ionisationsrate auf → geringe Reichweite, lange Lebensdauer α-Zerfall schwerer Kerne.

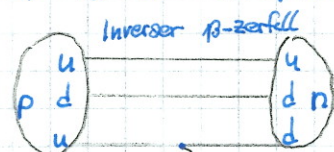
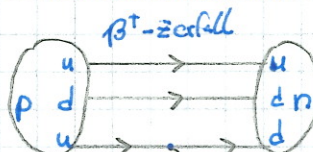
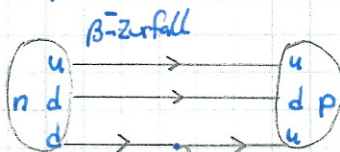
Natürliche Radioaktivität: Lange Halbwertszeit von α-Zerfällen steuert Zerfallsreihen schwerer Elemente

↳ "Radioaktives Gleichgewicht", endet sehr oft in Blei (Startelemente kommen von Supernovae)

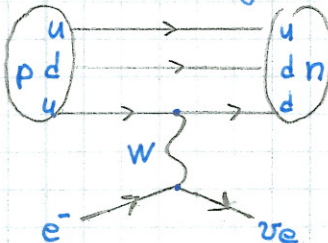
β-Zerfall

Historie: Kontinuierliches Spektrum beim β^- -Zerfall, Erwartung aber wie bei Zweikörperzerfall (diskretes Linienspektrum) + Drehimpulserhaltung verletzt ($u = \frac{1}{2} \rightarrow p = \frac{1}{2} + e = \frac{1}{2}$ $\downarrow$) → "Verzweifelte" Erklärung: Neues, sehr leichtes $s = \frac{1}{2}$ Teilchen

Datierung von Materialien ← C^{14} -Zerfall β-Zerfall hat sehr lange Halbwertszeiten → kleine Übergangswahrscheinlichkeiten (W-Bosonen sind sehr schwer → extrem kleine Reichweite, Übergangsrate) $t_{1/2} \sim E_0^5$ (Endpunktsenergie)



Elektroneneinfang



Neutrinonachweis über inversen β-Zerfall → Signal = verzögerte Koinzidenz (→ gleichzeitiges Auftreten der Signale von 2 Detektoren)

Atom realisiert 10 Zerfall → $\bar{\nu}_e$ → Inverso zählt mit Wasserstoff → Nachweis

"Isobaren-Zerfallsreihe": Gerade A: zwei Nukleonen → gg-Kerne stärker gebunden u, n -Kerne

Ungerade A: nur eine Nukleonen

γ -Zerfall

Anregte Kernniveaus ($t_{1/2} 10^{-15} \text{ s} - 10^{-9} \text{ s}$) können γ -Strahlung emittieren, Energiebereich 0,1-10 MeV
→ diskontinuierliches γ -Spektrum (→ Gamma-spektroskopie)

Kernspaltung

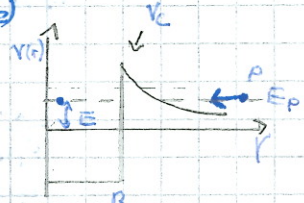
Spontan: Bindungsenergie pro Nukleon fällt mit $A \rightarrow$ Spaltung in 2 stärker gebundene Tochterkerne energetisch mögl.

Aber: Potentialbarriere, Tunnelwahrscheinlichkeit extrem gering (nur wenige Nuklide ${}^4_2\text{Th}$, Transurane)

→ „Dynamische Deformation (Tröpfchenmodell)“ → Änderung Oberfläche / Coulombterm → Überwindung Barriere durch E-Gewinn aus Deformation

Induziert: Überwindung der Spaltbarriere induziert durch Teilchenbeschuss $n + {}^{235}_{92}\text{U} \rightarrow {}^{236}_{92}\text{U}^* \rightarrow {}^{92}_{36}\text{Kr} + {}^{141}_{56}\text{Ba} + 3n$

→ Kettenreaktion, kontrolliert durch Neutronenabsorber $\Delta E \sim 200 \text{ MeV}$ (freigesetzte Bindungsenergie)



Kernfusion

Energiegewinn durch höhere Bindungsenergie pro Nukleon bei Reaktionsprodukt für $A \leq 56$

(„Bindungsenergie“ wird freigesetzt, wenn sich das gebundene System aus Einzelteilen bildet)

Bedingung für Fusion: Überwindung / Tunneln durch Coulombwall zwischen Kernen $T \sim 10^8 \text{ K}$

Abschätzung aus MWB-Kert von $E_{kin} \rightarrow$ Exponentieller Anstieg mit E_{kin} , Tunnelwahrscheinlichkeit → Exponentieller Anstieg mit E_{kin}

⇒ Gamow-Peak: Energiecluster ΔE für Fusionsreaktionen → Transmissionskoeffizient $T \sim e^{-\Delta E}$

Fusion leichter Kerne: Proton-Proton-Fusion, 1) $p + p \rightarrow e^+ + \nu_e + d \sim 5 \cdot 10^3 \text{ J}$ 2) $d + p \rightarrow {}^3_2\text{He} \sim 4,4 \text{ MeV}$ $\Delta E \gg 1$
3) $2 {}^3_2\text{He} \rightarrow {}^4_2\text{He} + 2p \sim 10^6 \text{ J}$

Bethe-Weizsäcker-Zyklus (CNO-Zyklus): H in He mithilfe von C, N, O, wichtige Fusionsquelle für schwere Sterne, $E_{fus} \sim 10^8 \text{ J}$

- Nukleare Astrophysik -

Symmetrien und Quantenzahlen

Kontinuierliche Symmetrien in phys. Systemen = Invarianz unter infinitesimaler Symmetrieoperation
 ↳ Bsp Rotationssymmetrie

Noether-Theorem: Zu jeder kontinuierlichen Symmetrie eines physikalischen Systems gehört eine Erhaltungsgröße → klassische Raum-Zeit-Symmetrien

Translationsinvarianz → Homogenität d. Raumes → Impuls erhalten („Egal ob Experiment 10m weiter links“)

Zeitliche Invarianz → Homogenität der Zeit → Energie

Rotationsinvarianz → Isotropie d. Raumes → Drehimpuls

Globale vs. Lokale Symmetrie:

Global: Derselbe Symmetrieoperation an jedem Raum-Zeit-Punkt

$$\psi(x) \rightarrow U\psi(x) = e^{i\alpha} \psi(x)$$

Lokal: Symmetrieoperation Funktion des Ortes $x = (\vec{r}, t)$

$$\psi(x) \rightarrow U(x)\psi(x) = e^{i\alpha(x)} \psi(x)$$

SM beruht auf lokalen Eichsymmetrien

Diskrete Symmetrie: Invarianz unter nicht-kontinuierlichen Symmetrieoperationen z.B. P

Additive Quantenzahlen: Summe der QZ in jedem Prozess erhalten (z.B. el. Ladung)

Multiplikative Quantenzahlen: Produkt der Quantenzahlen in jedem Prozess erhalten (z.B. P und C)

Ladungskongjugation C

Beschreibt eine „mathematische“ (→ kein phys. Prozess) Umwandlung Teilchen ↔ Antiteilchen

$\hat{C}$ auf Felder $\vec{B} \rightarrow -\vec{B}$, $\vec{E} \rightarrow -\vec{E}$; felderzeugende Teilchen $e^- \leftrightarrow e^+$

$\hat{C}$ auf Teilchen, Änderung von allen Ladungsartigen Quantenzahlen: $Q \leftrightarrow -Q$, $+S \leftrightarrow -S$, $+B \leftrightarrow -B$, $+L \leftrightarrow -L$

Alle Teilchen mit Ladungsartigen QZ $B, L, Q, \dots \neq 0$ sind keine Eigenzustände von C

Alle neutralen Teilchen sind Eigenzustände von C mit Eigenparität $C = \pm 1$ da $C^2|\psi\rangle = |\psi\rangle$

$C|t\rangle = -|t\rangle$ da Photonen ($\phi \rightarrow -\phi$, $\vec{A} \rightarrow -\vec{A}$)

$C|T\rangle = (-1)^{L+S}$

Starke und EM-WW: C erhalten → dieselbe Physik mit Teilchen und Antiteilchen

Elektroschwache WW: C maximal verletzt; Ladungskongjugierter Prozess existiert nicht

Parität P

Punktspiegelung am Ursprung ($\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$)

Anwendung: Auswahlregeln Multipolübergänge

Größe	Erklärung	Eigenwert	Beispiel
Skalar		1	Temperatur $\hat{P}T = T$
Vektor		-1	$\hat{P}\vec{r} = -\vec{r}$, $\hat{P}\vec{p} = -\vec{p}$
Axialvektor (Pseudovektor)	Vektor x Vektor	1	$\hat{P}\vec{L} = \vec{L}$, $\hat{P}\vec{S} = \vec{S}$
Pseudoskalar	Axialvektor x Vektor	-1	Helizität $\hat{P}h = \hat{P} \frac{\vec{S} \cdot \vec{p}}{ \vec{S} \vec{p} } = -h$

Eigenparität → Betrachte Parität von Teilchen mit Impuls $\vec{p}$ und Spin $\vec{S}$

Fermionen: Teilchen/Antiteilchen haben entgegengesetzte Parität (aus Dirac-Gl.)

Bosonen: Teilchen und Antiteilchen haben dieselbe Parität

Fermionen, Quarks/Leptonen: $P = 1 \leftrightarrow$ Anti(-Fermionen, Quarks/Leptonen): $P = -1$; Mesonen: $P = (-1)^{L+1}$

Helizität h: Projektion von Spin auf Impulsrichtung → Pseudoskalar

Rechtsdrehung (RH): Spin parallel zu Impuls

Linksdrehung (LH): Spin antiparallel zu Impuls



RH



LH

h ist keine Lorentz-invariante Größe → Massebehaftete Teilchen besitzen immer 2

Helizitätsanteile: Durch Lorentz-Boost kann Impuls $\vec{p}$ umgeklappt werden

⇒ Helizität ist nur für masselose Teilchen (Photonen $v=c$) eindeutig und invariant

Chiralität=Händigkeit, Abstrakte Eigenschaft von Fermionen, Paritätsoperation: Umwandlung LH $\rightarrow$ RH Spinoren
 Relevanz: Für masselose Teilchen Chiralität $\hat{=}$ Helizität bzw. $\vec{S} \parallel \vec{p}$
 $\hookrightarrow$ ~~Elektron~~ Schwache-WW: W-Bosonen koppeln nur an LH-Teilchen und RH Antiteilchen $\rightarrow$ Parität max. verletzt

Zeitumkehr T

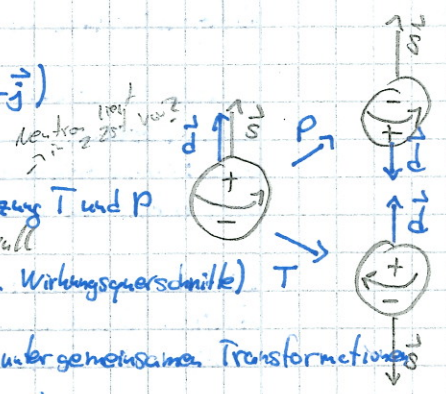
Zeitumkehroperator T: $t \rightarrow -t$ und komplex konj. Spinor $\rightarrow$ Spin flip

Invarianz: Identischer Wirkungsquerschnitt für Hin- und Rückreaktion

Klassische Variablen: $\vec{x} \rightarrow \vec{x}$, $\vec{E} \rightarrow \vec{E}$, $\vec{B} \rightarrow -\vec{B}$; $\vec{v} \rightarrow -\vec{v}$, $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$, $\vec{S} \rightarrow -\vec{S}$ (weil $\vec{j} \rightarrow -\vec{j}$)

El. Dipolmoment $\vec{d}$ des Neutrons (EDM): Spinachse = einzig ausgezeichnete Richtung
 $\vec{d}$ Vektor, $\vec{S}$ Axialvektor $\rightarrow \vec{d} \neq 0$: Verletzung T und P
 bis heute $|\vec{d}| < 18 \cdot 10^{-26}$ e cm $\rightarrow$ noch Null

T-Verletzung bei Hin-Rückreaktion von B-Mesonen direkt beobachtet ($\rightarrow$ versch. Wirkungsquerschnitte)



CPT-Theorem: Jede lokale Lorentzinvariante Quantenfeldtheorie ist invariant unter gemeinsamen Transformationen von C, P und T

Kombinierte CP-Symmetrie: Umwandlung Teilchen in Antiteilchen mit umgekehrter Chiralität, in schwacher WW verletzt (kleiner Effekt) $\rightarrow$ CPT-Theorem: T-Symmetrie ebenfalls verletzt?

$\hookrightarrow$ T muss verletzt werden, damit CP verletzt
 minus minus wird plus

Schlüsslexperimente zur CP-Verletzung

Hinweis: Theta-Tau-Rätsel, Beobachtung von 2 Teilchen, die auf gleiche Weise (Starke WW) produziert mit selber Masse/Lebensdauer in Endzustände mit unterschiedlicher Parität zerfallen

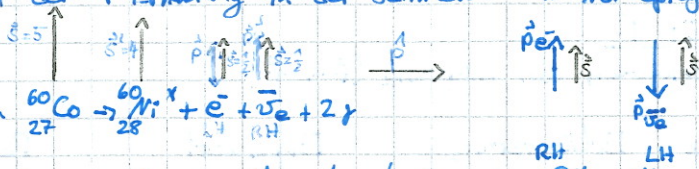
$$\begin{aligned} \Theta^+ &\rightarrow \pi^+ \pi^- & P(\pi) &= -1 \rightarrow P(\pi^+ \pi^-) = (-1)^2 = (+1)^{L=2} \\ \tau^+ &\rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^+ & P(\pi) &= -1 \rightarrow P(\pi^+ \pi^- \pi^+) = (-1)^3 = (-1)^{L=2-3} \end{aligned}$$

Für P-Erhaltung $\Theta^+ \neq \tau^+$
 heute $\Theta^+ = \tau^+ = K^+$

$\hookrightarrow$ Lee, Yang schlugen experimentellen Test der P-Erhaltung in der schwachen WW vor: Spiegelbildliche Experimente

WW-Experiment

Test der P-Erhaltung im Betazerfall von $^{60}_{27}\text{Co} \rightarrow ^{60}_{28}\text{Ni}^* + e^- + \bar{\nu}_e + 2\gamma$



Anlegen eines starken Magnetfeldes zur S-Polarisierung der Co-Atome (sonst wären β -zerfälle völlig zufällig ohne Richtung)

Herausforderung: Starkes B-Feld, da Kernmagneton μ_N sehr klein $\rightarrow$ 1,2K mit flüssigem Helium, danach Adiabatische Entmagnetisierung (kalt wegen therm. Iserv.)

Salz mit stark anisotropen g-Faktor ($\vec{B} \uparrow$ vs $\vec{B} \rightarrow$ anders!), wird zuerst entlang starken g-Faktor magnetisiert, herunterregeln Magnetfeld ($\rightarrow$ Transfer von thermischer auf magnetische Entropie), nun sehr kalt (0(mK)) $\rightarrow$ Nur m.g. der Kerne in anderer Achse $\rightarrow$ Paritätsverletzende WW!

Nun können γ -Strahlen und e^- gezählt werden, γ -Strahlen gut zur Kontrolle der Kernpolarisation

$\hookrightarrow$ Durch Vergleich der Zählraten Feststellung der Paritätsverletzung möglich, ist Vorzugsrichtung e^- vorhanden P verletzt

Beobachtung: e^- werden bevorzugt antiparallel zum Kernspin emittiert, Ergebnis nach „P-Operation“ umgedreht (Für unterschiedliche Polung des Magnetfelds) (nur umgedreht weil nicht alles immer 100% richtig ausgerichtet)

$\Rightarrow$ Parität verletzt, später: Maximal verletzt $\rightarrow$ Es gibt keine LH Antineutrinos, RH Neutrinos



Goldhaber Experiment: Helizität von Photonen, Messung verträglich mit Neutrinos mit 100% negativer Helizität $\rightarrow$ Nur LH Neutrinos, P maximal verletzt

CP-Verst. von WW theoretisch erlaubt $\rightarrow$ Neut-Antineutr. etc.

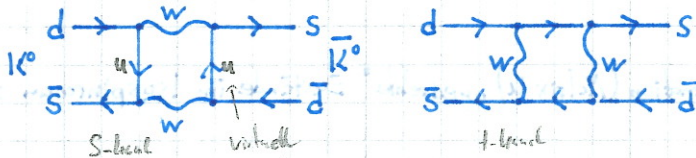
Neutrale Kaonen und CP-Symmetrie

$|K^0\rangle = |d\bar{s}\rangle$, $|\bar{K}^0\rangle = |\bar{d}s\rangle \rightarrow$ starke Eigenzustände (Def. Quarkinhalt)

K^0 mit $\bar{s}$ viel Antistruktur

Es kommt mit der schwachen Wm zu Oszillationen $|K^0\rangle \leftrightarrow |\bar{K}^0\rangle$ durch „Boxdiagramme“

2. Leinde
S-Leind
Leind
Stang



Eigenparität $\hat{P}|K\rangle = -|K\rangle$ (Pseudoskalar Teilchen)

Ladungskonjugation $\hat{C}|K^0\rangle = |\bar{K}^0\rangle$; $\hat{C}|\bar{K}^0\rangle = |K^0\rangle \rightarrow$ kein Eigenzustand

• Konstruiere CP-Eigenzustände

$$|K_1^0\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle) \rightarrow \hat{C}\hat{P}|K_1^0\rangle = |K_1^0\rangle$$

$$|K_2^0\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle) \rightarrow \hat{C}\hat{P}|K_2^0\rangle = -|K_2^0\rangle$$

• Zerfall in Pionen mit $L=0$ (rel. Dehimpuls)

$$\hat{C}\hat{P}|\pi\pi\rangle = +|\pi\pi\rangle \text{ und } \hat{C}\hat{P}|\pi\pi\pi\rangle = -|\pi\pi\pi\rangle$$

$\rightarrow \hat{C}\hat{P}$ -Erlaubende Zerfälle: $|K_1^0\rangle \rightarrow \pi\pi$, $|K_2^0\rangle \rightarrow \pi\pi\pi$ mehr Masse $\rightarrow$ kleiner Phasenraum $\rightarrow$ langsamer

• Physikalische Teilchen $\rightarrow$ Masseneigenzustände, Mischung aus K^0 und $\bar{K}^0$

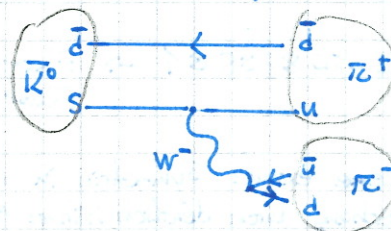
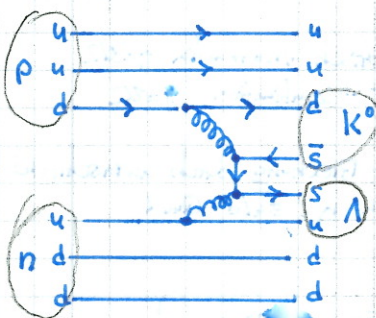
$$K_S^0 \text{ (K-short)}: \tau \approx 9 \cdot 10^{-11} \text{ s}$$

$$K_L^0 \text{ (K-long)}: \tau \approx 5 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

$$m_K \approx 498 \text{ MeV}/c^2$$

$\rightarrow$ Falls CP-erhalten $|K_S^0\rangle \equiv |K_1^0\rangle$ und $|K_L^0\rangle \equiv |K_2^0\rangle \rightarrow$ zerfällt $|K_S^0\rangle$ in $|K_2^0\rangle$ CP-verletzt!

Kaonenstrahlen: Protonen auf Target $\rightarrow$ Eigenzustände der starken Wm $|K^0\rangle$ und $|\bar{K}^0\rangle$, paarweise $s\bar{s}$
 $\rightarrow$ Propagation, K^0 - $\bar{K}^0$ -Oszillation durch Elektroschwache Wm $\rightarrow K_L^0, K_S^0$ als phys. Teilchen $\rightarrow$ zerfällt in $2\pi, 3\pi$



$\rightarrow$ Cronin-Fitch-Experiment, suche nach $\pi^+\pi^-$ Endzuständen in reinen K_L^0 -Strahl

Nur K_L^0 durch lange Flugstrecke (K_S^0 zerfallen), Untergrund K_S^0 immernoch vorhanden $\rightarrow$ Ausrechnen

Messung mit Doppelspektrometer, Messe Impulse $\pi^+\pi^-$

Ergebnis: 45 ± 9 Kandidaten für $K_L^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$ in 22700 K_L^0 -Zerfällen (0,2%)
 $\Rightarrow$ CP-Verletzung in der Mischung K^0 und $\bar{K}^0$ (Unterschiedliche Umwandlungsraten $K_0 \rightarrow K_S, \bar{K}_0 \rightarrow K_S$)
 Physikalische Zustände sind nicht CP-Eigenzustände!

$$|K_S^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}} (|K_1^0\rangle + \epsilon|K_2^0\rangle)$$

$$|K_L^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}} (|K_2^0\rangle + \epsilon|K_1^0\rangle)$$

$$|\epsilon| \approx 10^{-3}$$

kleiner Discrepanz
direkte CP-Verletzung

Quarkmodell der Hadronen

Mathematischer Formalismus analog zu Spin: $SU(2)$ -Symmetrie

↳ Erweiterung des Isospinkonzepts auf Quarks (zunächst nur u, d): Ähnliche (eff.) Massen von u und d → Anordnung als Isospin-Duplett

$$|q\rangle = \begin{pmatrix} |u\rangle \\ |d\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |T=\frac{1}{2}, T_3=\frac{1}{2}\rangle \\ |T=\frac{1}{2}, T_3=-\frac{1}{2}\rangle \end{pmatrix}$$

Unter starker W_{W} beliebig mit unitärer Transformation (Matrix U) „gedrehte“ Zustände im Isospinraum ununterscheidbar

$$|q'\rangle = \begin{pmatrix} |u'\rangle \\ |d'\rangle \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} |u\rangle \\ |d\rangle \end{pmatrix} = U |q\rangle$$

Leichte Mesonen: gebundene Zustände aus Quarks/Antiquarks → Mögl. Kombination, Triplet und Singulett

$T=1$ $T=0$

$$|\pi\rangle = \begin{pmatrix} -|u\bar{d}\rangle \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle) \\ |d\bar{u}\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |T=1, T_3=+1\rangle \\ |T=1, T_3=0\rangle \\ |T=1, T_3=-1\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -|\pi^+\rangle \\ |\pi^0\rangle \\ |\pi^-\rangle \end{pmatrix}$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle)$$

Entdeckung der Strangeness: 1940, neue Teilchen in kosmischer Strahlung $K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$, $\Lambda^0 \rightarrow p \pi^-$

Lange Lebensdauer → „seltsame“ Teilchen

⇒ Flavorquantenzahl Strangeness S , erhalten in starker und EM- W_{W} ($\Delta S=0$, $s\bar{s}$ -Paarzeugung mögl.)

↳ verletzt in schwacher W_{W} → Zerfall mit $\Delta S=\pm 1$ → Lange Lebensdauer durch kleine Übergangswahrscheinlichkeit in schwacher W_{W}

Gell-Mann-Nishijima-Formel: empirischer Zusammenhang zw. Ladungsartigen Quantenzahlen

$$Q = T_3 + \frac{B+S}{2} = T_3 + \frac{Y_S}{2}$$

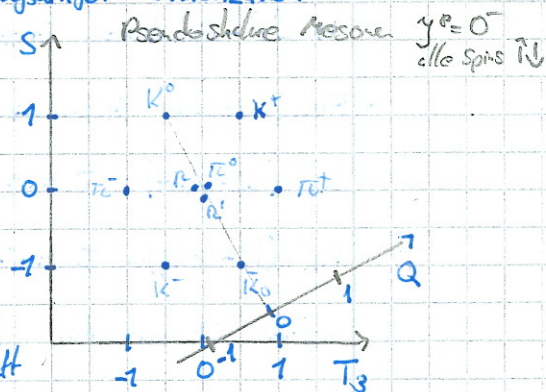
Isospin + Strangeness: Erweiterung der $SU(2)$ -Symmetrie zur $SU(3)$

Bsp. Mesonen-Multiplett, $3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1 \rightarrow$ Oktett + Singulett

Zustände mit $T=0=S$: $|\pi^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle)$

$$|\eta_8\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle - 2|s\bar{s}\rangle) \quad SU(3)\text{-Oktett}$$

$$|\eta_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle + |s\bar{s}\rangle) \quad SU(3)\text{-Singulett}$$



$\eta \approx -15^\circ$

Singulett und Oktett haben dieselben Quantenzahlen → physikalische Teilchen = Mischzustände $\begin{pmatrix} |\eta_7\rangle \\ |\eta_2\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\eta_8\rangle \\ |\eta_1\rangle \end{pmatrix}$

Für Baryonen $3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1 \rightarrow$ Flavor-Duplett (10) symmetrisch → Kombination $\frac{1}{2}$
Flavor-Oktett (8) gemischt → Kombination $\frac{1}{2}$

Aber: Flavorsymmetrie keine exakte Symmetrie in der Natur, explizite Brechung durch unterschiedliche Massen der Quarks → $SU(3)$, Brechung durch deutlich höhere Masse des s -Quarks im u, d -Quark

Quarkmasse:

Freie Fermionen: Masse = Polmasse (grob: Masse in Dirac-Gl., Lagrange-Dichte, Feynman-Diagramme)

Aber: Quarks nur im Limit sehr hoher Energien quasi-frei → Masse „nackter“ Quarks ≠ Stromquarkmasse

QCD-Störungstheorie: Quarkmassen abh. von Energieskala $\mu \rightarrow$ „laufende“ Quarkmassen $m = m(\mu)$

Massen der Hadronen aus leichten Quarks (u, d, s) viel größer als Stromquarkmassen (~ 100)

Nukleone: $m_N = 940 \text{ MeV}/c^2 \approx 100(2m_u + m_d) \rightarrow$ Konstituentenquarkmasse = effektive Masse von u, d : $m_{u,p} \approx m_{d,p} = 300 \text{ MeV}$

Physikalischer Grund: Großteil der Masse stammt aus Bindungsenergie der QCD-Wechselwirkung (Gluonen + Seequarks)

Quarkonium

$u \bar{u}$ zu leicht, mischen miteinander

Schwere Quarks: Charm, Bottom, Top $\rightarrow$ Paarweise Erzeugung in starker oder EM-Wechselwirkung

$\rightarrow$ Flavorquantenzahlen Charm C, Beauty B, Truth T erhalten

Mesonen mit Charm/Bottom-Quarks: Lange Lebensdauer $\sigma(10^{-13}$ bis 10^{-12} s) $\rightarrow$ Zerfall in schwache Wechselwirkung (Ausnahme Top-Quark, extrem kurze Lebensdauer)

keine $u \bar{u}$ $d \bar{d}$ $s \bar{s}$ weil zu leicht, die mischen

Gebundenes $q \bar{q}$ -System: Quarkonium $\rightarrow$ Charmonium $c \bar{c}$ und Bottomonium $b \bar{b}$

$\hookrightarrow$ QCD-Analogon von Positronium (e^+e^- -Atom), "Atom" der starken Wechselwirkung

Gleichzeitige Entdeckung

1974 "Novemberrevolution": Entdeckung einer Resonanz $e^+e^- \rightarrow X$ (3,16 GeV) $\rightarrow$ Neues Teilchen J/ψ
Interpretation: gebundener $c \bar{c}$ -Zustand $\rightarrow$ Etablierung Quarks als physikalische Realität

1977 Kpsilon am Fermilab $\rightarrow b \bar{b}$

je breiter $\frac{d\sigma}{dQ^2}$, desto kürzere Lebensdauer weil stärke Wechselwirkung

Anwendung: Spektroskopie $\rightarrow$ Vielzahl von Übergängen zwischen Quarkonium unterschiedlicher Quarkzahlen
 $B \bar{B}$ -Fabriken über $e^+e^- \rightarrow \gamma(4S) \rightarrow B \bar{B}$

Kek-B-Bell 2, Japan

Statisches QCD-Potential: $V(r) = -\frac{4}{3} \alpha_s \frac{(1/r^2)}{r} + kr$ Cornell-Potential

Kurze Abstände: Einzelschlucaustausch, coulombartige Wechselwirkung

Große Abstände: QCD-Confinement $\rightarrow$ Lineares Potential

$\rightarrow$ Trennung farbgeladener Teilchen: Ausbildung von Flussschläuchen

für rztfm, Bildung neuer $q \bar{q}$ -Paare energetisch günstiger

Prinzip: starke Wechselwirkung, wegen Confinement keine freien Farbladungen $\rightarrow$ nur kurze Distanzen
Farbladung in der QCD $\hookrightarrow$ Feldlinien, sehen bei großem Abstand zerfallen

Quarks tragen rot, grün, blau (+Anti) $\rightarrow$ Hadronen sind immer farbneutral

Farbladung der Gluonen: Unterschied QED, Photon elektrisch neutral $\rightarrow$ Gluonen können mit sich selbst wechselwirken
 1 Subnukleon? $\rightarrow g = \sqrt{1/3} (r \bar{r} + g \bar{g} + b \bar{b}) \rightarrow$ symmetrisch 3 Farben + Antifarben $\rightarrow$ 6 Kombinationen $\rightarrow$ 8 Gluonen

8 Gluonen: Gruppentheorie $SU(3)$ -Farbkraft

Farbladung erhalten in allen QCD Prozessen, Gluonenaustausch: Gebundene Quarks ändern ständig die Farbladung

Gleiche Farbladungen stoßen sich ab, Farbe und Antifarbe ziehen sich an $\rightarrow q \bar{q}$ stabil

Antisymmetrische Farbzustände ziehen sich an $\rightarrow qqq, \bar{q} \bar{q} \bar{q}$ stabil

Exotische Hadronen: Tetraquarks ($q \bar{q} q \bar{q}$), Pentaquarks ($qqqq \bar{q}$), Glueballs ($gg, gg \bar{g}$)

Farbe als notwendiger physikalischer Freiheitsgrad: $|\Omega\rangle = \psi_r \cdot \psi_{spin} \cdot \psi_{flavor} = 1.111111 \cdot 1.111111 \cdot 1.111111$

Lösung $\psi_{Farbe} = \frac{1}{\sqrt{6}} \epsilon_{ijk} |q_i q_j q_k\rangle$ antisymmetrische Farbfunktion $\rightarrow$ Pauli-Prinzip

Anzahl der Farbladungen: Hochenergetische e^+e^- Kollisionen mit Schwerpunktsenergie 13

$\hookrightarrow$ Erzeugung von Fermionen über virtuelle Photonen im s-Kanal

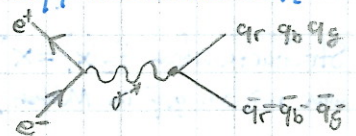
Wirkungsquerschnitt $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ (Kontinuum)

Wirkungsquerschnitt $e^+e^- \rightarrow$ Hadronen (Kontinuum mit Resonanzen $\rightarrow$ Teilchen)

$\hookrightarrow$ (inkohärente) Summe über alle aktiven Quarkflavors q (d.h. $\sqrt{s}$ oberhalb der $q \bar{q}$ -Produktschwelle), jeweils mit N_c Farbladungen

Beobachtet: Verhältnis $R(s) = \frac{\sigma_{had}}{\sigma_{\mu\mu}} = N_c \sum_i Z_{q_i}^2$

$\Rightarrow N_c = 3$



Laufende Kopplung in der QED

Vakuumpolarisation: virtuelle e^+e^- -Paare, Quantenfluktuationen

Effekt: "nacktes" Elektron umgeben von e^+e^- -Paaren

$\hookrightarrow$ Abschirmung der Ladung, Abschirmungseffekt wird schwächer mit kürzerem Abstand zum e^- (Entspricht höherem Impulsübertrag bei Bestimmung der Ladung)

Maß für Abstand zur Ladung: Impulsübertrag $Q^2 \rightarrow$ Feinstrukturkonstante $\alpha = \alpha(Q^2)$

$\hookrightarrow$ Kopplung ansteigend mit ansteigender Energie

Leichte q haben kleine Jets, wegen hoher Elkin-Anteile, geringe Bet., auch bei Zerfallsprodukten

Massive $q \bar{q}$ System, große Impulsübertrag

Weil Fermionen!

Leitende Kopplung in der QCD

Glukonen selbst tragen Farbladung: Wir mit Quarks und anderen Glukonen

Vakuumpolarisation in der QCD: Abschirmung der Farbladung durch virtuelle $q\bar{q}$ -Paare

Farbladungselisches Medium

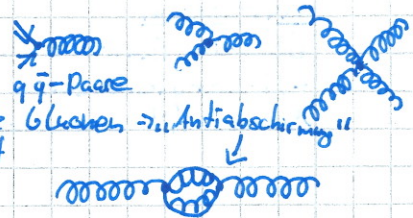
Abschirmung



"Verschmierung" der Farbladung durch virtuelle Glukonen $\rightarrow$ "Antiscreening"

Rechnung: Antiscreening Glukonen dominiert

Farb-Paramagnetisches Medium



Energieabhängigkeit der starken Kopplungskonstante $\alpha_s = \alpha_s(Q^2)$, $Q^2 \gg 1$ schwache Kopplung, asymptotische Freiheit
 $Q^2 \ll 1$ starke Kopplung Confinement

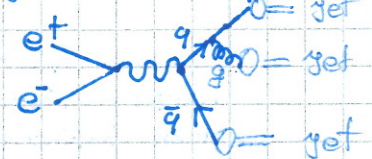
Confinement und Jets

Fragmentierung durch räumliche Trennung von $q, \bar{q}$ in QCD-Prozessen $\rightarrow$ Bildung von neuen $q\bar{q}$ energetisch günstiger als räumliche Trennung d. Quarks

Für hohe Impulsüberträge $Q^2 (66 \text{ GeV})^2$: nur kleine Streuung der Hadronen um Flugrichtung "Mutterquark"

Jets = kollimierte Teilchenbündel $\rightarrow$ Rekonstruktion E_p der Jets $\rightarrow$ Rückschluss Eigenschaften Mutterquarks

Entdeckung Glukon: 3-Jet Ereignis $\rightarrow$ Interpretation als Glukon-Bremsstrahlung



Struktur der Nukleonen und Partonmodell

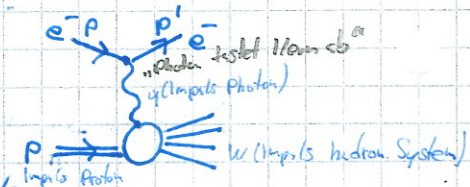
Wie teilt sich der Impuls der Nukleonen auf die Partonen auf?

$$\frac{d^2\sigma}{dx dQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2 (hc)^2}{Q^4} \left[\frac{1-y}{x} F_2(x, Q^2) + y^2 F_1(x, Q^2) + \sigma(M/E) \right]$$

Inelastisch $\rightarrow$ Abh. von 2 Variablen z.B. Impulsübertrag Q^2 und Bjorken Skalierungsvariable

$$x_{Bj} = \frac{Q^2}{2M\nu} = \frac{Q^2}{2P \cdot q}$$

Bjorken-Skalierungsverhalten: Für tief inelastische Streuung hängt $\frac{d^2\sigma}{dx dQ^2}$ näherungsweise nur von einer Variable ab (z.B. x_j) $\rightarrow$ punktförmige Teilchen



Natürliches Partonmodell: Bei hohen Energien eN-Streuung = (inkohärente $\rightarrow$ viele einzelne, unabhängige Streuungen) Summe mit Bestandteilen des Nukleons ("Partonen")

Heute: Partonen = Quarks + Glukonen (quasifrei aufgrund asymptotischer Freiheit)

Interpretation: Für gegebenes x_{Bj} streut virtuelles Photon an Parton mit Impulsbruchteil x des Nukleons

in geschlossenen Bezugssystem x_{Bj}

Vorhersage des Partonmodells: Zusammenhang zw. $F_1(x)$ und $F_2(x)$ aufgrund von Helizitätserhaltung
 Spin $\frac{1}{2}$: Callan-Gross-Relation $F_2(x) = 2x F_1(x)$, Daten verträglich mit $s = \frac{1}{2}$!

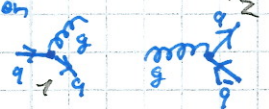
Erweitertes Partonmodell

Bisher: EM-Wechselwirkung mit geladenen Partonen, Quantenzahlen der Nukleonen durch Valenzquarks gegeben ($p = \{uud\}$, $n = \{udd\}$)

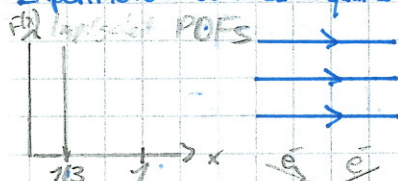
Jetzt: QCD-Prozesse im Nukleon, Emission von Glukonen (= neutrale $s=1$ Partonen) und Aufspaltung von Glukonen in $q\bar{q}$

Nukleon = Valenzquarks + "See" aus zusätzlichen Quarks und Antiquarks ("Sea quarks") sowie Glukonen

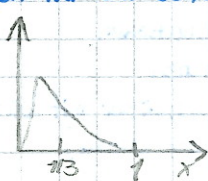
Strukturfunktion $F_2(x) = x \sum_j e_j^2 [q_j(x) + \bar{q}_j(x)]$, Summe der mit e_j^2 gewichteten Impulsverteilungen aller möglich $q, \bar{q}$ im Nukleon
 q_j = Anteil der Partonen mit Impulsbruchteilen zwischen x und $x+dx$
 $x q_j$ = Anteil des Protonenimpulses, der von allen Partonen $[x, x+dx]$ getragen wird



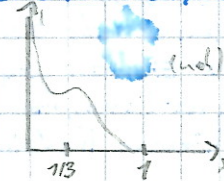
u und d-Quarks liegen als Valenz/Seequarks vor, s-Quarks (Prinzipiell auch c, b, und alle Antiquarks: nur als Seequarks)
 Experimentell: Quarks/Antiquarks tragen nur ca. 50% des Gesamtimpulses d. Nukleonen, der Rest stammt von Glukonen



Drei unabhängige Valenzquarks $F_2 = 5(1/3)$



Glukonenaustausch zw. Valenzquarks $\rightarrow$ Verschmierung
 Glukonen tragen Teil d. Impulses



Glukonenaustausch und Glukonenabstrahlung $\rightarrow$ Seequarks
 Vielzahl von Teilchen mit geringem Impuls

($x \equiv$ Auflösung
Prinzip)

kleines
 λ = hoher
Auflösung

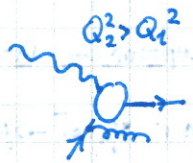
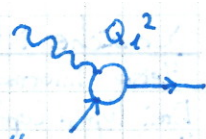
$\lambda = 1/\text{Impulsübertrag}$
d. Kollision!

Skalenverletzungen

Anschaulich: Elektronenstrahl $\approx$ Mikroskop (virtuelle Photonen)

Kleines $Q^2 \rightarrow$ geringere Auflösung des Photon-Parton-Vertex

Großes $Q^2 \rightarrow$ hohe Auflösung des Photon-Parton-Vertex, Effekte der QCD werden sichtbar
 $\hookrightarrow$ Gluonabstrahlung, $q\bar{q}$ -Paare



$\Rightarrow$ Skalenverletzungen, Abweichung von Bjorken-Skalierungsverhalten

$\hookrightarrow$ Strukturfunktionen werden Q^2 -Abhängig:

Für mittlere Werte von x : F_2 weiterhin unabh. von Q^2

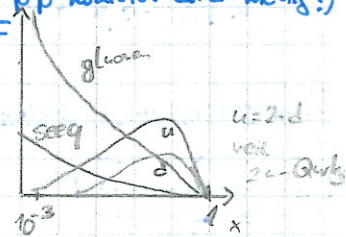
Kleine Werte von $x \rightarrow$ Mehr Partonen $\rightarrow F_2$ steigt mit Q^2 an

Große Werte von $x \rightarrow$ Weniger Partonen $\rightarrow F_2$ fällt mit Q^2 ab

$\Rightarrow$ Beschreibung der inneren Struktur von Nukleonen mittels PDFs (Parton-Density-Function)

PDFs = universelle Eigenschaft von Nukleonen $\rightarrow$ können in einem Prozess bestimmt und in anderem Prozess angewendet werden (PDF für pp Kollision LHC wichtig!)

Strategie: Gemeinsame Anpassung vieler Messungen für möglichst genaue PDF



$$\Gamma_{i \rightarrow f} \sim g(E_f) |V_{fi}|^2 \quad |i\rangle \rightarrow |f\rangle \quad \text{abh. von Zustandsdichte}$$

Energie E_f und Wechselwirkungs-Störoperator

Schwäche ist Wechselwirkung, die Teilchen verlässt

Is- Neutrino beteiligt in der Schwäche W

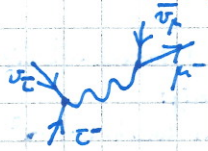
Meiste Information aus Teilchenzerfällen, da schwache W in vgl zu starker W in Teilchenreaktionen ^{stark unterdrückt}

Drei Typen: Leptonisch, semileptonisch, nichtleptonisch

Wird Ladung ausgetauscht $\rightarrow$ geladener Strom $W^\pm$, wenn Quarks/Leptonen unverändert bleiben Z^0 neutraler Strom

Leptonische Prozesse: $l + \bar{\nu}_l \leftrightarrow l' + \bar{\nu}_{l'}$

oder $\nu_\mu + e^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_e$ (Streuung)

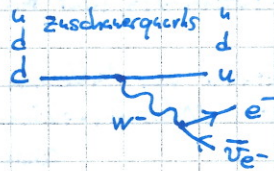


z.B. $\tau^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_\tau$

Semileptonische Prozesse: $q_1 + \bar{q}_2 \rightarrow l + \bar{\nu}_l$

oder $\pi^- (d\bar{u}) \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$

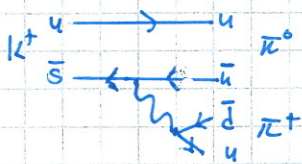
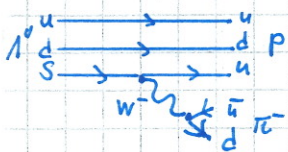
$K^- (s\bar{u}) \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$



β^- -Zerfall

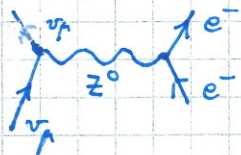
$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$

Nichtleptonische Prozesse: $q_1 + \bar{q}_2 \rightarrow q_3 + \bar{q}_4$



Aufgrund der Ladungserhaltung nur Prozesse $\pm 1e$

Neutrale Ströme: Neutrinos und Elektronen können über Z^0 -Austausch $W \rightarrow m/q$ unverändert



$\nu_\mu e^- \rightarrow \nu_\mu e^-$, Streuung von Myon-Neutrinos an Elektronen
 $\hookrightarrow$ eignet sich gut weil Leptonenzahlfamilien erhalten $\rightarrow W$ -Boson austausch ausgeschlossen

Im Allgemeinen aber schwer beobachtbar, da oft Überlagerung mit EM-Prozessen (wesentlich stärker)

"Exkurs", Zerfall geladener Pionen

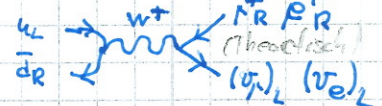
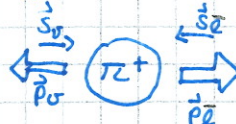
Semileptonischer Prozess, Paritätsverletzung: W -Boson koppelt nur an LH Teilchen und RH Antiteilchen

Experimentell: Zerfall in $e^+ + \text{Neutrino}$ stark unterdrückt

Erläuterung: Impuls/Drehimpulsbetrachtung

$\hookrightarrow$ Helizität d. Neutrinos festgelegt (LH)

$\Rightarrow$ Lepton kann aufgrund Helizitätsbetrachtung nur mit "falscher" Helizität emittiert werden



Lösung: Helizität $\neq$ Chiralität für massive Teilchen: Mischung von rechts/linkschändigen Komponenten

$\hookrightarrow e^+$ leichter als μ^+ $\rightarrow$ signifikante Beimischung RH Chiralität nur für Myonen

Idee: Schwache Ladung g mit der Quarks/Leptonen an W/Z -Bosonen koppeln

Phasenraum bei Zerfall e^+ größer
 $\mu^+ \sim \frac{1}{m} \rightarrow$ größerer Impuls

Quarkfamilien

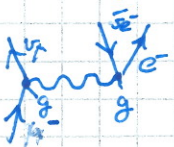
Problem: Kopplung bei β -Zerfall ($d \rightarrow u$) um 4% kleiner, bei $s \rightarrow u$ sogar 20-mal schwächer

Erläuterung: Quarkübergänge über Familien hinaus, Partner von Flavor-Eigenenzuständen $|u\rangle \neq |d\rangle$ sondern $|d'\rangle = |d\rangle + |s\rangle = |d'\rangle$

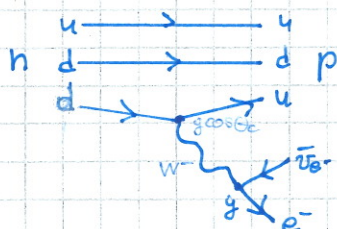
$\hookrightarrow$ Quark-Eigenenzustände beim W -Austausch ergeben sich durch Drehung um Θ_c (Cabibbo-Winkel)

$$|d'\rangle = \cos \Theta_c |d\rangle + \sin \Theta_c |s\rangle ; |s'\rangle = \cos \Theta_c |s\rangle - \sin \Theta_c |d\rangle$$

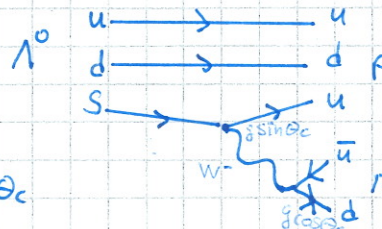
Die Übergänge $c \rightarrow d$ $s \rightarrow u$ sind demnach vgl mit $c \rightarrow s$ und $d \rightarrow u$ im Verhältnis $\frac{\sin^2 \Theta_c}{\cos^2 \Theta_c} \approx \frac{1}{20}$ unterdrückt



$M_{if} \sim g^2$



$M_{if} \sim g^2 \cos \Theta_c$



$M_{if} \sim g^2 \cos \Theta_c \sin \Theta_c$

Mit dritter Quarkgeneration: Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix.

$$\begin{pmatrix} |d'\rangle \\ |s'\rangle \\ |b'\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |d\rangle \\ |s\rangle \\ |b\rangle \end{pmatrix} \quad W_{fi} \sim |V_{q_i q_f}|^2$$

$W^\pm$ koppeln an d', s', b'

Übergänge von $3 \rightarrow 2$ ($t \rightarrow s$) ($b \rightarrow c$) 10^2 stärker unterdrückt als $2 \rightarrow 1$. $3 \rightarrow 1$ am stärksten unterdrückt

Reelle W- und Z-Bosonen

Zur Erzeugung W/Z entweder $l\bar{l}$ oder $q\bar{q}$ Reaktion. Notwendige Energie $\sqrt{s} = M_{W,Z} c^2$
 ↳ Collider z.B. $e^+e^- \rightarrow Z^0$, $W^\pm$ nur paarweise $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$ (→ höhere Energie notwendig)

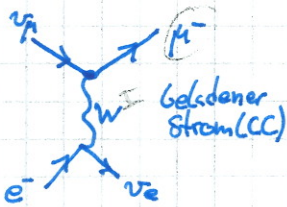
Z^0 -Nachweis: Zerfall $Z^0 \rightarrow e^+e^-$ $Z^0 \rightarrow \mu^+\mu^-$ „lego“ Diagramm → Gesamtenergie beider Leptonen $\sim M_{Z^0}$

$W^\pm$ -Nachweis: Zerfall $W^+ \rightarrow e^+ \nu_e$ $W^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$
 ↳ Schwieriger, da Neutrino nicht direkt nachweisbar → indirekt über Impulsbilanz

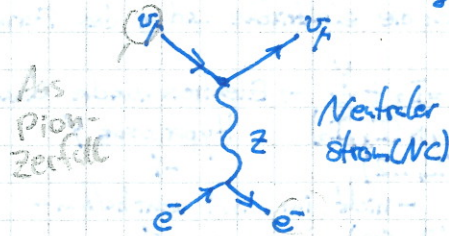
gel. Ströme β -Zerfall

Neutrale Ströme, siehe in Streuung mehr (→ Überlagerung durch viel stärkere EM-WW)

Besser: Neutrino-WW mit e^- oder Nukleonen → Neutrino- e^- Streuung, statt Myon-Neutrinos



Signatur: Myonen im Endzustand



Signatur: EM-Schauer (e^- behindert durch ν_μ Endzustand)

Nachweis: Blasenkammer (Gegenstelle, Neutrinostrahl aus Hydrogenzerfall, Impulsbilanzselektion: mag. Horn)

Unterscheidung von NC, CC Ereignissen in der Blasenkammer: In beiden Fällen e^- -Schauer bzw.

e^- Bremsstrahlung, unterschied: Bei CC produziertes Myon kann detektiert werden, da geringe WW mit Blasenkammer-Interakt → Wird e^+e^- -Kaskade ohne μ^- registriert Lsg NC vor

Wichtig: ν_μ nicht ν_e weil produzierte e^- auch einfach WW würden und nicht detektierbar (Am Ende wären) → keine Unterscheidung zwischen NC und CC
 ⇒ indirekter Z^0 -Nachweis

Elektroschwache Vereinheitlichung

Historisch: V-A-Theorie (Vektor-Axienvektor) als Kontaktwechselwirkung (vgl. Fermi-Theorie)

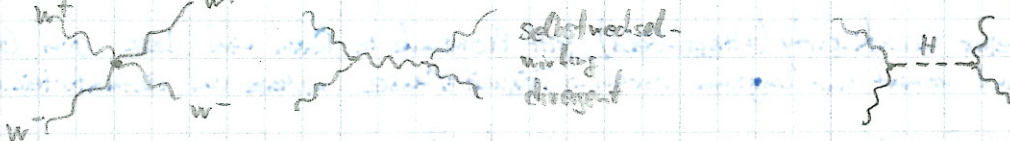
Problem: inkonsistente Theorie mit Divergenzen → Entartete Wirkungsquerschnitte wachsen quadratisch mit

Schwerpunktsenergie: $\sigma \sim s$ → Lsg Austausch massiver W-Bosonen

Aber: WW -Paarproduktion divergent → Kopplung zwischen W-Bosonen mit neutralem massiven Boson



Streuung von W-Bosonen mit longitudinaler Polarisation divergent → Lösung Austausch von skalarern Teilchen



⇒ Gesucht: Konsistente Theorie der schwachen WW mit zusätzlichen neutralen Eichbosonen (→ Z-Boson) und skalarern Teilchen (→ Higgs-Boson)

Erster Versuch: weiches neutrales schwaches Eichboson ($S=1$) $\Rightarrow$ W-Bosonen Triplet (W^+, W^0, W^-) des schwachen Isospins mit $I_3 = \pm 1, 0$

Problem: W^0 koppelt wie $W^\pm$ nur an LH Teilchen $\Rightarrow$ Widerspruch zu Experiment, neutrales Boson koppelt auch an RH Teilchen

Besser: zusätzliche $U(1)$ -Symmetrie der schwachen Hyperladung ($\neq U(1)$ -QED Symmetrie) $\rightarrow$ neues Feld mit Eichboson

Nur LH Teilchen koppeln über schwache Isospinladung an W_μ -Feld

Alle Teilchen koppeln über schwache Hyperladung an B_μ -Feld

$\Rightarrow$ Wichtig: W^0 und B sind keine physikalischen Teilchen! Mischung über „Weinberg-Drehung“

$$\begin{aligned} | \gamma \rangle &= \cos \Theta_w | B^0 \rangle + \sin \Theta_w | W^0 \rangle \\ | Z^0 \rangle &= -\sin \Theta_w | B^0 \rangle + \cos \Theta_w | W^0 \rangle \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} | \gamma \rangle &= \cos \Theta_w | B^0 \rangle + \sin \Theta_w | W^0 \rangle \\ | Z^0 \rangle &= -\sin \Theta_w | B^0 \rangle + \cos \Theta_w | W^0 \rangle \end{aligned}} \right\} \text{Photon und } Z^0 \text{ orthogonale Linearkombination von } B^0 \text{ und } W^0$$

Zusammenhang aus Θ_w , schwachen Ladungen g und g' sowie e ergibt sich aus Forderung, dass J an Ladung von LH/RH Fermionen koppelt, nicht aber an Neutrinos.

$$e = g \sin \Theta_w$$

Θ_w aus ν -e-Streuung oder Massenverhältnis $W^\pm/Z^0$ wie 2

$\Rightarrow$ Schwache Kopplungskonstante etwa 4. stärker als elektromagnetische, Propagatorterm führt zu geringerer effektiver Stärke

W-Boson koppelt an Quarks/Leptonen gleich (Universalität) und nur jeweils ein Chiralitätszustand (P-Verletzung)

Beim Z^0 -Boson spielt auch die elektrische Ladung des Fermions eine Rolle

Gell-Mann-Nishijima $Q = I_3 + \frac{Y}{2} \rightarrow$ Elektroschwache Quantenzahlen				
Fermion	Chiralität	Isospin (I, I_3)	Hyperladung Y	Ladung Q
Neutrinos	L	(1/2, 1/2)	-1	0
ν_e, ν_μ, ν_τ	R	- nicht im SA enthalten -		
e, μ, τ	L	(1/2, -1/2)	-1	-1
	R	(0, 0)	-2	-1
u, c, t	L	(1/2, 1/2)	1/3	2/3
	R	(0, 0)	4/3	2/3
d, s, b	L	(1/2, -1/2)	1/3	-1/3
	R	(0, 0)	-2/3	-1/3

$W^\pm$ koppelt an u', s', b' $\rightarrow$ Wechsel mögl.

Problem an ES-Theorie: Bei Mischung sollten Zustände ähnliche Masse haben ABER Photon masselos und $W^\pm/Z^0$ haben sehr große Massen. $\Rightarrow$ Symmetrie grundlegend verletzt

Erläuterung: Spontane Symmetriebrechung, die vom Hamiltonian gegebene Symmetrie kein in einem Eigenzustand des Systems gebrochen sein. z.B. Curie-Temperatur bei Phasenübergang, bei $T < T_c$ richten sich Dipole spontan alle in eine Richtung aus, diese Richtung ist aber völlig zufällig und vorher unbekannt

$\hookrightarrow$ Symmetrie gebrochen

z.B. Higgs-Teilchen, Spontane Symmetriebrechung

Bei uns: Vakuum-Grundzustand bricht Symmetrie, kann noch umkehren bei $T > T_c$ nur Symmetrie vernichtet erhalten

Higgs-Mechanismus: Spontane Symmetriebrechung globaler Symmetrie erzeugt masselose „Goldstone“ Bosonen

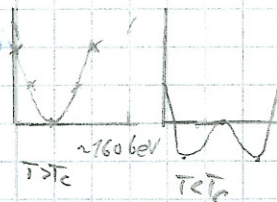
3 der Bosonen werden von Eichbosonen „geschluckt“ $\rightarrow$ Massenterme koppeln

im Lagrangian $\rightarrow$ Erhöhen 3 Eichbosonen $W^\pm/Z^0$ mit Masse, übriges Boson

„Higgs“ Boson $\rightarrow$ Falls existiert, Nachweis des Higgs-Feldes $\rightarrow$ toll

$\hookrightarrow$ koppelt (Symmetrie) nicht $\rightarrow$ bleibt masselos

Vakuumerwartungswert $\neq 0$ führt auch zu Fermionenmasse: Yukawa-Koppelung



3D-Magnetfeld Potential

Party-Analogie: Gäste bei einer Cocktailparty (= Higgs-Feld), tritt Prominente in Raum und diese von Gästen umringt und kommt nur langsam voran $\rightarrow$ Trägheit = Masse $\Rightarrow$ Masse von Elementarteilchen

Ein Gerücht fängt bei einer Person an und „kugelförmig“ weiterverbreitet, Personen werden „angeregt“, verbreitet sich langsam $\rightarrow$ Trägheit = Higgs-Masse $\Rightarrow$ Masse des Higgs Teilchens

Entdeckung 2012 LHC $H \rightarrow ZZ \rightarrow 4 \text{ Leptonen}$



Signatur: Peak in invarianten Masse

Kernkraft

Ähnelt Potential zwischen 2 Atomen, abstoßend wenn sich 2 Nukleonen („hard core“) überlappen und anziehend bei größeren Abständen, wo es exponentiell abfällt.

Kernkraft ist entfernt vergleichbar mit den Van-der-Waals-Kräften, Reichweite bei 0,4 bis 2,5 fm (hard core bis schwächer als Coulombkraft)

Spin-Abhängig, bei parallelen Spins stärker als bei antiparallelen, Berechnung mit Hilfe QCD bisher nicht möglich $\rightarrow$ Betrachte Nukleon-Nukleon Streuung und verwende phänomenologische Potentiale zur Beschreibung

Beschreibung erfolgt auf Basis von ^{z.B. Pionen} Mesonenaustauschmodellen $\rightarrow$ geringe Reichweite durch Mesonenmasse
Zwischen Atomen ist Pauli-Prinzip Grund der Abstoßung (bei kleinen Abständen) $\rightarrow$ Elektronen Zustände blockiert

Bei Annäherung zweier Nukleonen mit 6 Quarks gibt es aber erheblich mehr Freiheitsgrade:
2 Spin, Farbladung 3, 2 Isospin $\rightarrow$ insgesamt 12 bei $L=0$, auf die sich die Quarks nach dem Pauli-Prinzip verteilen können

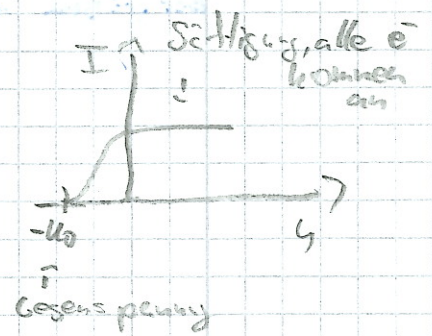
Grund der Abstoßung liegt in starker Spin-Spin W_{ss} , Δ -Resonanz ($\uparrow\uparrow\uparrow$) hat eine $\frac{1}{3}$ höhere Masse als das Nukleon $\Rightarrow$ Parallele Spinausrichtung erhöht potentielle Energie d. Systems

$\rightarrow$ gilt auch bei sich überlappenden Nukleonen, desto stärker, desto näher Nukleonen zueinander, versuchen die Quarks ihre chromagnetische Energie zu minimieren, gelingt dies nur in Übergang in einen energetisch höheren Rotationsimpulszustand ($L=1$)

Bei größerem Abstand spielt dann der Mesonenaustausch eine Rolle

WF
Orb vs.
Spin-Teil
Spin Symmetrie
 $\rightarrow$ Orb anti
 $\Rightarrow$ Abstoßung

Kennlinie
Photoeffekt



Zusammenfassung Ex IV, Atome und Kerne

Sind Systeme klein, so stellt jede Messung eine massive Störung dar.
Es gab viele experimentelle Beobachtungen, die der klassischen Physik widersprechen

Wärmestrahlungsgesetze

Schwarzer Körper: Absorbiert alle Strahlung, idealisierend, geröhrt durch Hohlraum mit kleinem Loch
Aus dem Loch austretende Strahlung identisch mit Strahlung im Inneren

=> Stefan-Boltzmann-Gesetz $P(T) = \sigma T^4$ bzw. $w(T) = \sigma T^4$ (Energiedichte)

=> Wien'sches Verschiebungsgesetz $\frac{v_{max}}{T} = \text{const.}$, Temperatur bei der Strahlung die maximale Strahlung abgibt

Klassisch hergeleitete Rayleigh-Jeans-Formel $w = \frac{8\pi}{c^3} k_B T \int_0^\infty v^2 dv$ führt zu UV-Katastrophe
=> Klassische Physik versagt, Wien für große v passen, Rayleigh für kleine v passen -> Braut Formel für beides

Planck: Ersetze Wandatome durch elektrisch geladene, lineare harmonische Oszillatoren -> Schwingung,
Austausch von Energie im Hohlraum durch Anregung. Klassisch: kontinuierliches Energiespektrum -> widerspricht

Hypothese: Energiequantelung $E_n = n E_0$ mit $n \in \mathbb{N}$

=> Planck'sche Strahlungsformel, beschreibt Experiment korrekt und geht in Grenzfällen in beide Gesetze über

Photoelektrischer Effekt

Wird eine Metallplatte mit UV-Licht bestrahlt, so kann man feststellen, dass die Ladung auf der Platte abnimmt.

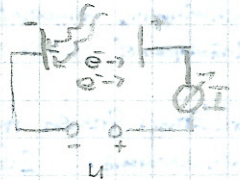
=> e^- haben die Platte verlassen

Aufbau: Evakuierter Glasbehälter mit Anoden/Kathodenplatte, Photonen lösen e^- heraus, die zur Kathode

Beobachtungen: E_{kin, e^-} ist abhängig von v des Lichts, nicht aber von seiner Intensität
Zahl der Photoelektronen ist proportional zur Lichtintensität

Intensität
~ Energie

Zwischen Lichteinfall und Elektronenaustritt gibt es keine messbare Verzögerung



Erklärung (Einstein): Jedes absorbierte γ gibt seine Energie $h\nu$ vollständig an ein Photoelektron ab.

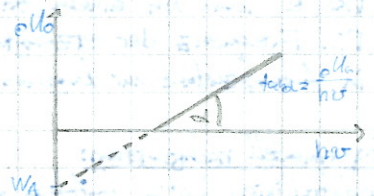
=> $E_{kin, max, e^-} = h\nu - W_A$ (W_A : Austrittsarbeit, Energie um e^- aus oberem Fermi-Niveau zu entfernen)

Um $E_{kin, max}$ zu bestimmen kann die Gegenspannung so lange erhöht werden, bis keine e^- mehr fließen

=> gegenpotentiell ist stark genug um selbst stärkste e^- abzubremesen => $E_{kin, max} = eU_0$

Bestimmung h möglich aus $E_{kin} = h\nu - W_A$ => $eU_0 = h\nu - W_A$

=> Aus Steigung h und aus y-Achsenabschnitt W_A



Compton-Effekt

Weiteres Experiment zur Teilchennatur des Lichts, Bestrahlung eines beliebigen Materials mit Röntgenstrahlung der Wellenlänge λ_0 , nach Streuung Anteile mit größerer Wellenlänge $\lambda_s > \lambda_0$. Wellenlängenverteilung stark abhängig vom Streuwinkel φ , weniger von Streumaterial. (Klassisch: kein $\Delta\lambda$!)

Modell: direkter Stoß zwischen γ und e^- , Herleitung über Impulsaustausch etc.

Photon hat $E = hf = h\nu$ und $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ mit $|\vec{p}| = \hbar k = h/\lambda = \frac{h\nu}{c}$

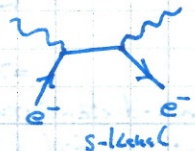
$$\Rightarrow \Delta\lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\varphi) = \lambda_c (1 - \cos\varphi)$$

λ_c -Compton Wellenlänge, gibt Zunahme d. Wellenlänge bei $\varphi = 90^\circ$ charakteristisch für Teilchen

$$\lambda_c e^- = 2,43 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

$$\lambda_c p = 1,32 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

$$\lambda_c n = 1,32 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$



Sehr geringe Wellenlängenänderung an sich Grund dafür, dass Compton-Effekt nur bei sehr kurzwelliger Strahlung, im Bereich der Röntgen/Gammastrahlung beobachtet werden kann.
~10 nm

=> Bei großer Wellenlänge relative Zunahme zu gering, scheinbar kein Energieverlust

Wellen/Teilchenbeschreibung von Licht

$$E = hf = \hbar \omega \quad \vec{p} = \hbar \vec{k} \quad |\vec{k}| = 2\pi/\lambda \quad \text{mit } \lambda = c/\nu$$

=> Enge Verknüpfung zwischen Teilchen/Wellenmodell

Beobachtung: Licht verhält sich bei sehr geringen Intensitäten wie Teilchen -> Energie wird nicht in alle Richtungen gleich "emittiert", sondern in bestimmte Richtungen, die stat. verteilt sind. Gemittelt über lange Zeit: Gleichverteilung

Beim Doppelspalt kommt es bei scheinbar einzelnen Photonen trotzdem zu Beugungseffekten (-) Interferenz mit sich selbst, wird?

Wellencharakter von Teilchen

Werde Welle/Teilchen. Dualismus von Licht auf Teilchen an because why not

$$|\vec{p}| = \hbar |\vec{k}| = \hbar \frac{2\pi}{\lambda} = h/\lambda \quad \Rightarrow \lambda_{dB} = h/p = h/mv = \frac{h}{\sqrt{2mE_{kin}}} = \frac{h}{\sqrt{3mkT}}$$

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m} = \frac{3}{2} k_B T = 940 \text{ eV}$$

Länge unbedeutend weil sehr kleiner Effekt z.B. für $\lambda_{dB} \approx 500 \text{ nm}$ bräutete man ein e^- mit $0,047 \text{ K}$.

Um bei einem Spalt Beugungseffekte zu beobachten sehr feines Gitter, nötig z.B. $U_B = 100 \text{ V}$ $\lambda_{dB} \approx 0,12 \text{ nm}$

↳ Für sichtbaren Effekt Gitter im Angströmbereich oder Kristall?

=> Nachweis 1926, nach Durchgang durch dünne Folie aus Kristall (nem Material auf Photoplatte Beugungsringe zu sehen, wird U_B größer werden Ringe kleiner, da $\lambda \sim \frac{1}{\sqrt{U_B}} \rightarrow \lambda \sim r \Rightarrow$ Auslag zu Röntgenstrahlen

↳ Bragg-Reflexion bei Kristallen (später)

Bragg-Reflexion: Beugungsphänomen von (Licht)-Wellen an Festkörpern, e^- der Atome werden zur erzwungenen

Schwingung angeregt und beginnen selbst Strahlung in Form von kugelförmigen Wellen auszustrahlen. Da die Wellen der einzelnen e^- sich in erster Näherung zu Wellen der zugehörigen Atome aufsummieren, Abstände im Kristallgitter $\sim \lambda \Rightarrow$ Interferenzerscheinungen

Erklärung: Strahlen treffen auf parallele Gitterebenen -> Beugungswinkel
konst. Interferenz: $2d \sin \delta = n\lambda$, $\delta = d \sin \nu \Rightarrow n\lambda = 2d \sin \nu$



to be continued

Bohr'sches Atommodell

Atom aus Kern und e^- , die Kern auf geschlossenen Bahnen umkreisen. 3 Postulate, die die klassische Mechanik verletzen

1. Dem e^- stehen nicht alle klassisch möglichen Bahnen zur Verfügung (sonst stört e^- in Kern vgl. E6), sondern nur bestimmte Ausgewählte von ihnen. Auf diesen Bahnen erzeugt es keine EM-Strahlung, sondern behält seine Energie. Dies sind die stationären Zustände des Atoms.
2. Das e^- kann von einem stationären Zustand in den anderen springen. $\Delta E = h\nu = \hbar\omega$ (Bohr: „Die Natur macht keine Sprünge“)
3. Die Frequenz der erzeugten/absorbierten Strahlung hängt sich der Umlauffrequenz des e^- an, wenn sich das Elektron in Anfangszustand nur langsam bewegt und in den energetisch nächstgelegenen Zustand springt. -> „Korrespondenzprinzip“

klass. Physik muss als Zufall enthalten sein

Experimentell nachgewiesen: Atomspektren unterscheiden sich durch charakteristische Anregungszustände

- Spektrallinien beim H-Atom -> Entsprechend Übergangem der Elektronen zwischen den „Schalen“

Emissionslinie: Übergang von höheren auf tieferes Energieniveau, z.B. e^- von angeregter in Grundzustand

Absorptionslinie: Einstrahlung von Licht mit kontinuierlichem Spektrum, Photonen passender Frequenz wird dann von Element (-> Atom) absorbiert -> Hebung in Energieniveau, bei Rückfall wird Photon ohne Vorzugsrichtung -> „Isotrop“ wieder emittiert

=> dunkle Linie im Spektrum, „Fraunhofer-Linie“ bei Sternen

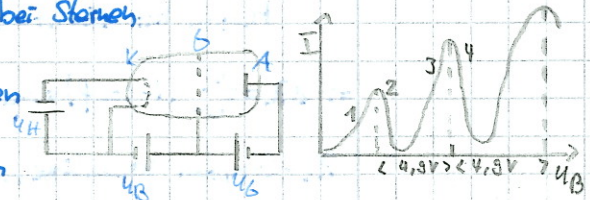
- Franck-Hertz-Versuch

Eigentliches Ziel d. Versuches: Ionisierungsenergien. Einatomiger Gase bestimmen

Beschleunige e^- zwischen K und G (freigesetzt durch Heizspannung U_H)

Bespannt zwischen G und A soll e^- , die inelastischen Stöße durchgeführt haben

diskriminieren -> kommen nicht mehr bei A an, da zu wenig Energie



Abfall der Stromstärke bei (2) zeigt, dass viele e^- auf dem Weg durch das Gas Energie verloren haben

nicht mehr genug Energie um bei A anzukommen

↳ e^- gehen ab bestimmter Energie diese bei einem inelastischen Stoß an die Atome ab (-> kolliderendes Elektron kann angeregt werden), bei geringerer Energie werden nur elastische Stöße durchgeführt

Strom sinkt nicht auf Null, gibt nach e^- , die kurz vor Gitter Energie erneuern, dann aber nicht stoßen
+ UV-Strahlung von angeregten Atomen kann durch Photoeffekt aus Kathodenmaterial, etc. e^- freisetzen

Bei höheren U_B erreichen e^- 2., 3. die benötigten $4,2 \text{ V}$ -> mehrere Stöße

Falsche Interpretation: $4,2 \text{ V}$ sind Ionisierungsenergie, nicht Wert kommt von positiven Ionen, die zur K-Methode wandern

was passiert
mit Teilchen die
nicht in rechte
Geraden durch Spalte
normale Optik?

Doppelspalt, Beugungseffekte

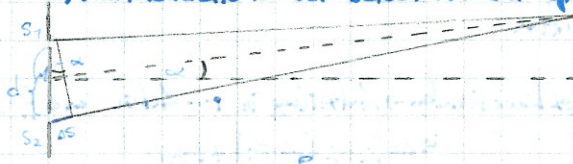
Doppelspalt als Beispiel für Wellennatur des Lichts

Wird der Doppelspaltversuch mit makroskopischen Teilchen durchgeführt, so treten keine Interferenzerscheinungen auf $I(y) = I_1(y) + I_2(y)$

Wird der Doppelspaltversuch mit Licht durchgeführt $I(y) = I_1(y) + I_2(y) + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi$ $\Delta\varphi = \Delta s \frac{2\pi}{\lambda}$
 $\Rightarrow$ Interferenzeffekte der beiden von den Spalten ausgesandten Kugelwellen ($\rightarrow$ Huygen'sches Prinzip)

Nicht sym. Energie
quantisiert!
Es sind nur diskrete
Energiezustände
einnehmbar.

$\rightarrow$ Bei Übergängen nur
aufnahme/Abgabe von
diskreten Energien



$$\sin \alpha \approx \frac{\Delta s}{d} \approx \tan \alpha = \frac{y}{D} \rightarrow \Delta s = y \cdot \frac{d}{D}$$

$$\Delta s = n\lambda \quad \text{Lichtwellen}$$

$$\Delta s = (n + \frac{1}{2})\lambda \quad \text{Gegensätze$$

Wichtige Variable: Werden viele einzelne Photonen nacheinander durch Spalt geschickt, so bildet sich nach und nach ein Interferenzmuster $\Rightarrow$ Photon wechselwirkt mit sich selbst

Wird beobachtet, welcher Spalt vom Photon genommen wird, treten keine Interferenzerscheinungen auf

$\psi = \psi_1 + \psi_2$ (Spalt 1 und Spalt 2)

$$|\psi(x=y)|^2 = |\psi_1 + \psi_2|^2 = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + \psi_1^* \psi_2 + \psi_1 \psi_2^* \rightarrow \text{wird } S_1 \text{ verschlossen } \psi_1 = 0 \Rightarrow \text{keine Interferenz}$$

Werden nun Elektronen bei geeigneter Größenordnung $\approx \lambda_{dB} e^-$ auf Spalt geschickt, tritt gleiches Muster auf. $\Rightarrow e^-$ als Wellenpaket mit Wellenfunktion, Interferenz „Mikrowellen“

$\hookrightarrow$ Welle-Teilchen-Dualismus: e^- als einzelne diskrete Ausstrahlungen = materielles Objekt
 $: e^-$ hat aber Interferenzmuster $\Rightarrow$ Welle

Fourier-Optik: Spalte als δ -Distribution darstellen $\Rightarrow$ „Transmissionsfunktion“ $I \sim |F(\tau)|^2$

Huygen'sches Prinzip von Elementarwellen $\rightarrow$ bei FI Integration über alle möglichen Wellen

Schrödinger-Gleichung

Klassische Wellenbeschreibung = ebene Welle $A(x) = A e^{i(kx - \omega t)}$ ist Lsg der Wellengleichung

$$\nabla^2 A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0 \quad \text{, Randteil relevant, Im wird ignoriert}$$

Es liegt eine lineare Dispersionsrelation $\omega = c_n k = \frac{c}{n(\omega)} k$ vor

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

1. Zerkleinerung

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

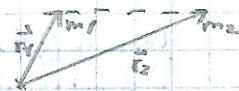
Ebene Welle

Linear
 $\rightarrow$ Superposition

Das Wasserstoffatom

Teilchen im zentralpotential $H = -\frac{\hbar^2}{2m_1} \nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m_2} \nabla_2^2 + V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$

↳ Aufteilen in Schwerpunkts/Relativkoordinaten $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \Rightarrow \psi(\vec{R}, \vec{r}) = \phi(\vec{R}) \psi(\vec{r})$



Schwerpunktbewegung: Schwerpunkt verhält sich wie freies Teilchen $-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_R^2 \phi(\vec{R}) = E^{(R)} \phi(\vec{R})$

Relativbewegung komplizierter, $V(\vec{r}) \rightarrow V(r)$ als Zentralpotential

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_r^2 + V(r)\right) \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r})$$

(sg in Kugelkoordinaten $\rightarrow$ Aufteilung in r -Abh. und θ, φ)

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{2mr^2} \hat{L}^2 + V(r)\right) \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r})$$

$$\hookrightarrow \Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2} \hat{L}^2$$

$\Rightarrow$ Separansatz $\psi(\vec{r}) = R(r) Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$

bekannt $\hat{L}^2 Y_{lm} = \hbar^2 l(l+1) Y_{lm}$

$$\hat{L}_z Y_{lm} = \hbar m Y_{lm}$$

$\rightarrow$ Ersetze $\hat{L}^2$ mit EW

$$\hookrightarrow \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} + V(r)\right] R(r) = E R(r)$$

$\rightarrow$ ne. Rand wirts vor $\rightarrow$ Eigenw. f. d. $V(r)$ sind $(2l+1)$ -f. entartet

Subs. $u(r) = r R(r) \rightarrow V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}$

$$\int |Y_{lm}|^2 = 1$$

$$\Rightarrow \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + V_{\text{eff}}(r)\right] u(r) = E u(r)$$

Forderungen $u(0) = 0$, $\psi(\vec{r})$ Quadratintegrabel

$\hookrightarrow$ Lösungsstruktur erschreiben

$$\int d\vec{r} |u(r)|^2 < \infty$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} r u(r) = 0$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} r u(r) = 0$$

$$\Rightarrow u(r) = e^{-kr} r^{l+1} p(r)$$

$$p(r) = \sum_k a_k r^k$$

Reihe muss für Normierbarkeit abbrechen

Quantenzahlen aus 3 Randbedingungen: $\psi(r, \vartheta, \varphi) = R(r) \Theta(\vartheta) \Phi(\varphi)$

$$\frac{\sin^2 \vartheta}{r} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) + \frac{\sin^2 \vartheta}{\Theta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{d\Theta}{d\vartheta}\right) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(r)) r^2 \sin^2 \vartheta = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2}$$

$$1) \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -c_1 \Phi(\varphi) \Rightarrow \Phi(\varphi) = A e^{\pm i \sqrt{c_1} \varphi}$$

Φ muss an einem Ort einen eindeutigen Wert haben: $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$

$$\hookrightarrow e^{\pm i \sqrt{c_1} 2\pi} = 1 \Rightarrow \sqrt{c_1} = m \in \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{QZ} \text{ aus Forderung der Periodizität bzw. Eindeutigkeit}$$

$$2) \frac{1}{\Theta \sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{d\Theta}{d\vartheta}\right) - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} = c_2$$

$$\text{für } m=0 \text{ mit } \xi = \cos \vartheta : \frac{d}{d\xi} \left((1-\xi^2) \frac{d\Theta}{d\xi}\right) + c_2 \Theta = 0$$

$$\text{PR-Ansatz: } \Theta(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \xi^i \rightarrow a_{k+2} = a_k \frac{k(k+1) - c_2}{(k+2)(k+1)}$$

Damit auch für $\xi = \pm 1$, d.h. $\vartheta = 0, 180^\circ$ die Reihe konvergiert, muss sie bei einem Index abbrechen

$\Rightarrow c_2 = l(l+1)$ mit $l \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{QZ}$ aus Forderung der Endlichkeit der WF

$\rightarrow$ Koeffizienten Null

3) Aus PR Ansatz für $u(r)$ folgt Abbruchbed. für Normierbarkeit (obige Grenzante)

+ Spin

$$b_j = 2b_{j-1} - \frac{k_j - a}{j(j+1) - l(l+1)} \quad \text{mit } k = \sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}} \quad \text{und } a = \frac{mZe^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}$$

$$\text{Für ein } n \in \mathbb{N} \text{ muss } k_n = a \text{ gelten} \Rightarrow -\frac{2mE}{\hbar^2} n^2 = \frac{m^2 Z^2 e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^4} \Rightarrow E_n = -\frac{Z^2 \hbar^2}{2m n^2} = -R_y \frac{Z^2}{n^2} \rightarrow \text{wie bei Bohr}$$

$$+ \text{ aus } l \leq j \leq n-1 \rightarrow l \leq n-1 \Rightarrow g_n = \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=-l}^{l} 1 = \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = n^2$$

Die WF ist für $l=0$ Kugelsymmetrisch. Summiert man die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichten $|\psi_{n,lm}|^2$ bei gegebener Hauptquantenzahl n über alle erlaubten l und m auf, so ergibt sich die gesamte Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Zustand n . Diese ist immer Kugelsymmetrisch, weshalb man die Summe aller Zustände bei festem n auch Elektronenschale nennt.

Normaler Zeeman-Effekt

Betrachte H-Atom im Magnetfeld. Hierzu nutzen wir, dass ein mag. Moment im Magnetfeld die pot. Energie $E = -\vec{\mu}_m \cdot \vec{B}$ hat.

$$\vec{\mu}_m = I \cdot \vec{A} = \frac{e \cdot v}{2\pi r} \cdot \pi r^2 \hat{n} = \frac{e v r}{2} \hat{n} = -\frac{e}{2m} \vec{L} \quad (\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m_e r v \hat{n})$$

$$\Rightarrow E_{\text{pot}} = \frac{e}{2m_e} \vec{L} \cdot \vec{B} = \frac{e}{2m_e} B L_z \quad \text{für } \vec{B} \parallel \hat{e}_z$$

$$\Rightarrow H' = H_H + \frac{e}{2m_e} B L_z$$

$[H, L_z] = 0 \rightarrow \psi$ des H-Atoms sind L_z -Eigenzustände
wirkt in H_H, L_z auf ψ bekannt

$$\Rightarrow E_{n l m_l} = -\frac{R_y}{n^2} + \frac{eB}{2m_e} \hbar m_l$$

$$\rightarrow \Delta E_m = \frac{e\hbar}{2m_e} B m_l = \mu_B B m_l$$

$\Rightarrow$ Magnetfeld hebt $2l+1$ -fache Entartung auf ($l=0$), Niveaus mit Drehimpulsgrenzanzahl l wird nun in $2l+1$ Äquidistante Niveaus aufgespalten (Distanz l -unabh.)

Bei ersten Messungen $\approx$ Theorie, bei genaueren Messungen aber Unterschiede: Alle Spaltlinien, die von s-Niveaus ausgehen zeigen zwei beobachtete Komponenten (Doublets), bei $l > 0$ sogar noch mehr.

Elektronenspin

Ablenkung von Silberatomen in einem inhomogenen Magnetfeld. Silberatome werden zuerst im Ofen verdunstet, treten dann durch Blende als Strahl in das inhomogene Magnetfeld.

Ist das Feld stark genug, so spaltet sich der Strahl und es ergeben sich 2 Maxima mit Minima in d. Mitte. Es hat also eine Kraft die Atome ablenkt, in $\vec{B}$ -Feld $\vec{F} = -\vec{\mu}_m \cdot \nabla \vec{B} \Rightarrow$ Silberatome besitzen mag. Moment.

Grundzustand des Silberatoms ist s-Zustand mit $l=0$ ($\rightarrow$ kein Bahnmoment), somit müssen Atome noch ein zusätzliches mag. Moment besitzen. (+ Silber Atome sind neutral $\Rightarrow$ keine At. (at.) F.)

$\Rightarrow$ Aufstellung der Hypothese, dass e^- einen inneren Drehimpuls besitzt + Ablenkung wird durch das Valenzelektron bewirkt, da alle anderen $\vec{s}$ sich kompensieren

Strahl hat sich in 2 Teilstrahlen aufgeteilt, wegen $-s \leq m_s \leq s$ und $m_s = 1$ folgt $s = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \mu_s = \gamma \cdot s$$

$\gamma_s = \frac{|\mu_s|}{|s|}$ "gyromagnetisches Verhältnis" kann bei Einstein-de-Haas Experiment bestimmt werden.
Experiment: Dünner Torsionsfaden mit Eisenzylinder, starkes Magnetfeld $\vec{B}$ ($\rightarrow$ Erreichen der Sättigung)

$\Rightarrow$ Ausrichten der Spins

Wird das $\vec{B}$ -Feld umgepolt, so klappen alle Spins $\vec{s}$ um, zur Gesamt-drehimpulserhaltung (≈ 0 weil vorher in Ruhe) muss dies durch $-L$ des Zylinders kompensiert werden.

Aus ΔM und ΔS $\frac{\Delta M}{\Delta S} = \gamma_s$ Bestimmung γ_s .

Während bei Bahndrehimpuls l μ_B ges. ist durch $\mu_B = \frac{|\mu_B|}{l} = \frac{e}{2m_e} \hbar = \frac{\mu_B}{\hbar}$

$$\text{ist } \mu_s = \frac{e}{m_e} \hbar = 2 \mu_B \quad \Rightarrow \vec{\mu}_s = -g_s \frac{eB}{\hbar} \vec{s} \quad \text{mit } g_s \approx 2 \text{ (Landé-Faktor)}$$

Existenz Spin aus Theo durch μ -Messungen $\rightarrow$ Dirac-Gleichung

Acht Spins
Fensterstruktur
Peschke-Deut-
Effekt
 $B > B_s$ koppelt
starkes $\vec{B}$ -Feld
"Atomspin"
nachgewiesen
 $\downarrow$
heute um
 e^- in
außen
Schale

inhomogen und sich auf beide Pole ausgleicht

Spin-Bahn-Kopplung

Im Bezugssystem des Elektrons kreist der Kern um das e^- und bewirkt als Kreisstrom damit ein Magnetfeld ($\rightarrow$ Biot-Savart). Dieses kann nun mit dem Spin $\vec{s}$ bzw. dem mag. Moment $\vec{\mu}_s$ des e^- wechselwirken. Aus $\vec{B} \sim (\vec{v} \times \vec{r}) \sim \vec{L}$ folgt zusätzlicher Term in H

$$H_{LS} = -\vec{\mu}_s \cdot \vec{B} = g_s \mu_B \frac{\mu_0 Z e}{8\pi m_e r^3} \approx \frac{\mu_0 Z e^2}{8\pi m_e r^3} \vec{s} \cdot \vec{L}$$

$$[\vec{s} \cdot \vec{L}, L_z] \neq 0 \rightarrow H, L^2, L_z, S^2, S_z$$

kein vollständiger Observablenatz

Führe Gesamtdrehimpuls $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ ein $\Rightarrow \vec{s} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2}(\vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2)$

$\hookrightarrow$ Neue Quantenzahlen $H, J^2, J_z, L^2, S^2 \rightarrow |n, j, m_j, l, s\rangle$

$$\Rightarrow \Delta E = \frac{g}{2} [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)]$$

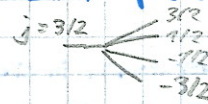
Korrektur $O(\alpha^2)$ mit $j = l \pm \frac{1}{2}$

$l=0 \rightarrow j=\frac{1}{2}$
 $l=1 \rightarrow j=\frac{3}{2} \rightarrow 2 \text{ Niveaus } 3/2, 1/2$
 $l=2 \rightarrow j=\frac{5}{2} \rightarrow 3 \text{ Niveaus } 5/2, 3/2, 1/2$
 $\hookrightarrow$ nur mit $l \geq 1$, keine m_j Aufspaltung

Anomaler Zeeman-Effekt

Unter Berücksichtigung des Spins ist die Aufspaltung der Niveaus in einem äußeren $\vec{B}$ -Feld komplizierter. Mag. Moment des Atoms $\vec{\mu}_j$ und $\vec{J}$ sind wegen d. anomalen Spinmoments nicht mehr parallel. Das Niveau wird in $(2j+1)$ äquidistante Niveaus aufgespalten. ($\rightarrow$ Zeeman-Effekt Spezialfall mit $s=0$)

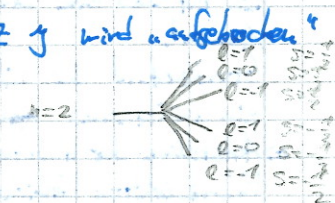
$$\Delta E = g_j m_j \mu_B B \quad g_j = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)}$$



Starkes Magnetfeld: Paschen-Back-Effekt

Bild des normalen Zeeman-Effektes mit 3-facher Aufspaltung, wohl bestimmte QZ j wird "aufgehoben"

$$\Delta E = (g_m + g_s) \mu_B B$$



Relativistische Korrekturen zum H-Atom

Relativistische Massenzunahme der Elektronenmasse bei der Bewegung des e^- im Coulombfeld, die zu einer kleinen Änderung von E_n führt.

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} \approx m c^2 \left(1 + \frac{p^2}{2m^2 c^2} - \frac{p^4}{8m^4 c^4} + \dots \right) \rightarrow \text{Störungsrechnung } H_r = \frac{p^4}{8m^2 c^2}$$

$$\Delta E_{r,l} = -E_n \frac{Z^2 \alpha^2}{n^2} \left(\frac{3}{4} - \frac{n}{l+1/2} \right)$$

$\rightarrow$ Abh. von n, l , an Größen für $n=1$ und $l=0$ $\frac{\Delta E_r}{E_n} = \frac{5}{4} \alpha^2 \rightarrow O(\alpha^2)$

Drift-Term:

Momentane Position des Elektrons nur bis auf die Comptonwellenlänge des Elektrons $\lambda_c = \frac{h}{m_e c}$ bestimmt
 $\hookrightarrow e^-$ verspürt unberechnete Werte des Coulombfeldes in Volumen λ_c^3 um seine Position $\vec{r}$
 $\Rightarrow$ Mittelung über Volumen, Rechnung ergibt Beeinflussung der $l=0$ Niveaus (s -Niveaus) $\rightarrow O(\alpha^2)$

$$\text{Insgesamt } E_{n,j} = E_n \left[1 + \frac{Z^2 \alpha^2}{n} \left(\frac{1}{j+1/2} - \frac{3}{4n} \right) \right]$$

$\Rightarrow$ Alle Zustände mit gl. n und j (z.B. $2s_{1/2}$ und $2p_{1/2}$) sind energetisch entartet in 1. ord. $\Rightarrow$ $\frac{1}{j}$ $\frac{1}{j+1/2}$ $\frac{1}{j}$ $\frac{1}{j+1/2}$

Fluktuieren mittelt sich zwar weg, da durch $\frac{1}{r}$ Poloid und nicht r -Poloid mittelt sich Beitrag eben nicht weg

$$\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle \neq \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle \quad \text{aber} \quad \langle \delta r \rangle = 0$$

Hyperfeinstruktur

Unter genauer Auflösung weitere Aufspaltung beobachtbar. Bisher wurde die Struktur des Kerns vernachlässigt. Dieser besitzt allerdings auch ein mag. Moment ($\rightarrow$ Kernspin), welches analog zur $\vec{L} \vec{S}$ Kopplung mit dem $\vec{B}$ -Feld, welches von e^- erzeugt wird, Wechselwirkt.

Das Elektron erzeugt am Ort d. Kerns ein Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r}=0) = \mu \vec{j}$ $\vec{j}$ - besetzt durch e^- .

$$H_{\text{HFS}} = A \vec{j} \cdot \vec{I} = \frac{A}{2} (\vec{F}^2 - \vec{j}^2 - \vec{I}^2)$$

$$\Rightarrow \Delta E_{\text{HFS}} = \frac{A}{2} (F(F+1) - j(j+1) - I(I+1))$$

Für Grundzustand H-Atom ist $j = \frac{1}{2}$ und $I = \frac{1}{2}$

$$\hookrightarrow F=0 \text{ oder } F=1 \quad \Delta E_{\text{HFS}} = -\frac{3}{4} A \quad (F=0) ; \quad \Delta E_{\text{HFS}} = \frac{1}{4} A \quad (F=1) \sim O(\alpha^4)$$

Lamb-Verschiebung $O(0,1 \alpha^2)$

Quantenelektrodynamische Effekte, Experimentell: Zustände liegen bereits unter rel. Korrekturen auf einem Niveau.

1) Selbstenergie $\rightarrow$ Wechselwirkung mit Vakuumfluktuationen, es werden virtuelle Photonen absorbiert/emittiert $\rightarrow$ hervorgerufene Zitterbewegung verändert das im zeitlichen Mittel wirkende Potential

Besonders relevant nahe Atomzentrum ($r=0$), vor allem in Kern, wo Potential von der Coulombform abweicht $\rightarrow l=0$ Zustände (kleine, aber vorhandene Wahrscheinlichkeit)

2) Vakuumpolarisation $\rightarrow$ Abschirmung der Kernladung, daher näher am Kern größere effektive Ladung $\hookrightarrow$ Auch eher $l=0$ betroffen; trägt 2% zur Lamb-Verschiebung bei

Exkurs: Abschirmung kann man sich als Entfernungsabhängigkeit der Kopplungskonstante betrachten.

Elektron sieht bei schwacher Ablenkung d.h. kleinem Impulsübertrag eine kleinere, durch Vakuumpolarisation abgeschirmte Ladung als bei starker Ablenkung, großem Impulsübertrag, wobei es dem Kern viel näher kommt und daher viel weniger von der Abschirmung betroffen ist.

Von der klassischen Situation herkommend ist aber gerade die abgeschirmte Ladung in großem Abstand diejenige, die man als klassische Ladung des Atomkerns misst.

Daher beschreibt man die Zunahme der Wm bei kleinen Abständen durch eine effektive Zunahme der Kopplungskonstanten mit dem Impulsübertrag.

Lamorpräzession

Präzession des Drehimpulses eines Teilchens mit mag. Dipolmoment um die Richtung eines äußeren Magnetfeldes. Frequenz der Präzession $\rightarrow$ Larmorfrequenz

Analog: Kreisell Präzession in Schwarzschildfeld $\rightarrow$ Drehmoment Richtung Drehachse

Anwendung: Kernspinresonanztomographie

Kerne werden in statisches $\vec{B}_0$ Feld gebracht $\rightarrow$ isotrope Lamorpräzession der einzelnen Kerne, kleiner Überschuss richtig ausgerichteter Kerne $\rightarrow$ Magnetisierung

Hinzufügen eines hochfrequenten Zusatzfeldes, orthogonal zum statischen Magnetfeld $\vec{B}_0$ und in Resonanz zu Larmorfrequenz $\rightarrow$ Phasensynchrone Auslenkung der Kerne $\rightarrow$ führt in xy -Ebene, Zeit wieder in z -Richtung

Messung der Transversalmagnetisierung zur Erzeugung von Schnittbildern $\rightarrow$ unterschiedliche Relaxionszeiten je Nukleon. Atom $\rightarrow$ daher e^- Konfiguration

Paritätsverletzende Übergänge $\rightarrow$ Schwache Wm

bei größeren Atomen... wieso?

$\hookrightarrow$ B.zm. β -Zerfall $\rightarrow$ β -Zerfall

Mehrelektronenatome

Heliumatom: Problem $E_{\text{pot}} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \right)$ → letzter Term in E_{pot} bewirkt, dass das Potential nicht mehr Kugelsymmetrisch ist, sondern von Winkel α zwischen den Radiusvektoren abhängt. $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\alpha$
 ⇒ Separation in Radial/Winkelanteil nicht mehr möglich

Erste (grobe) Näherung: Vernachlässige Kopplungsterm und löse S_6 separat $E_1 + E_2 = E$ $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \psi_1(\vec{r}_1)\psi_2(\vec{r}_2)$
 ↳ $E_{\text{He}}(n=1) = -Z^2 \cdot E_H = -2 \cdot 4 \cdot 13,6 \text{ eV} = -108,8 \text{ eV}$ aber $E_{\text{exp}} = 78,98 \text{ eV}$ ✗

Besserer Ansatz: Jedes der beiden Elektronen bewegt sich in Coulombpotential d. Kerns + im Zeitlichen mittel Kugelsymmetrische Ladungsverteilung des anderen e^- ⇒ C-Potential d. Kerns wird teilweise abgeschirmt ⇒ Effektive Kernladung $(Z-S)e$
 $E_{\text{He}} = -Z^2 E_H - (Z-S)^2 E_H$, für $S=0,656$ erhält man Experimentellen Wert
 ↳ $Z_{\text{eff}} = Z-S = 1,35$ ⇒ Etwa 32% der Kernladung $+2e$ werden durch ein Elektron im $1s$ -Zustand des He-Atoms für das andere $1s-e^-$ abgeschirmt. Beachte: $1s-e^-$ schirmt für e^- in höheren Zuständen wesentlich mehr Ladung ab!
 ⇒ Potential, in dem sich das 2. e^- bewegt kann beschrieben werden als Summe aus C-Potential d. Kerns und e^-e^- Potential von anderem Elektron, aber weiterhin insgesamt kein Kugelsymmetrisches Potential aber auch kein C-Potential!
 ⇒ Direkte Abstößung zwischen e^- wird durch Verminderung der Anziehung zwischen Kern und e^- ausgedrückt

Unterscheidbarkeit, Pauli-Prinzip

Teilchen sind ununterscheidbar, System wird als Ganzes beschrieben, → Überlagerung der Zustände und $|\psi|^2$ beschreibt Wahrscheinlichkeitsdichte, (liefert ein Elektron anstellen)

⇒ GesamtWF darf sich unter Vertauschung nicht ändern $|\psi_{ab}^I|^2 = |\psi_{ab}^{II}|^2 \Rightarrow \psi_{ab}^I = e^{i\phi} \psi_{ab}^{II}$ $\rho \in \mathbb{R}$
 $\psi_{ab}^I = \pm \psi_{ab}^{II}$

Ansatz: $\psi_{ab}^I = \psi_1(a)\psi_2(b)$, $\psi_{ab}^{II} = \psi_1(b)\psi_2(a)$ erfüllen Forderung nicht

$\psi_{\text{Atom}}^S = \psi_1(a)\psi_2(b) + \psi_2(a)\psi_1(b)$ $a \rightarrow b$ $\psi^S \rightarrow \psi^S$ Möglichkeit 1 $\psi_{ab} = \psi_{ba}$

$\psi_{\text{Atom}}^A = \psi_1(a)\psi_2(b) - \psi_2(a)\psi_1(b)$ $a \rightarrow b$ $\psi^A \rightarrow -\psi^A$ Möglichkeit 2 $\psi_{ab} = -\psi_{ba}$

Sind beide e^- im selben Zustand, $\psi_{ab}^A = \psi_1(a)\psi_2(a) - \psi_2(a)\psi_1(a) = 0$ ⇒ Antisymmetrische WF ex. für Zustände
 ↳ Zwei e^- mit denselben QZ (n, l, m, s) werden durch die symmetrische WF ψ_{Atom}^S beschrieben

Spinfunktionen $\chi^+(m_s = \frac{1}{2})$, $\chi^-(m_s = -\frac{1}{2})$ ermöglichen 4 Zustände (3 Symmetrische (Triplett), 1 Antisymmetrische (Singulett))
 $\chi_1 = \chi^+(1)\chi^+(2)$ $M_S = 1$ $\uparrow\uparrow$
 $\chi_2 = \chi^+(1)\chi^-(2)$ $M_S = 0$ $\uparrow\downarrow$
 $\chi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} [\chi^+(1)\chi^-(2) + \chi^-(1)\chi^+(2)]$ $M_S = 0$ $\uparrow\downarrow$
 $\chi^A = \frac{1}{\sqrt{2}} [\chi^+(1)\chi^-(2) - \chi^-(1)\chi^+(2)]$ $M_S = 0$ $\uparrow\downarrow$

$\psi_{\text{Gesamt}} = \psi_{\text{Atom}}(n_1, l_1, m_1, n_2, l_2, m_2) \chi_{\text{Spin}}(S, m_s)$

↗ Zustand mit zwei Elektronen, die unterschiedl. Orbitalen besetzen impliziert Energieaufstieg

beide $|\psi|^2 \Rightarrow \pm \psi$ Paare

Man findet nur Atomzustände, deren Gesamtwellenfunktion antisymmetrisch gegen Vertauschung zweier Elektronen ist.

⇒ Pauli-Prinzip fordert, dass Gesamtwellenfunktion Antisymmetrisch ist → jeder Satz von QZ muss einmalig sein sonst $\psi_1(n_1, l_1, m_1, s_1) = -\psi_1(n_1, l_1, m_1, s_1) \Rightarrow \psi_1 - \psi_1 = 0$ → Existiert nicht

Für Atom: Ist Ortsfunktion symmetrisch, so muss Spinorfunktion antisymmetrisch sein. Ist die Spinor funkt. symmetrisch, so muss sind die Bahnkonfigurationen nicht identisch (Antisymmetrische Ortsfunkt. ex. nicht!)

Termchema Heliumatom

Die $2e^-$ können nun unter Berücksichtigung des Pauli-Prinzips beliebig angeordnet werden. Z.B. in einer Schale als Singulett oder in 2 Schalen in einem der Triplett-Zustände.

- In Triplettzustand haben e^- größeren Abstand (weil nicht gleiche Orts-WF) → Halten sich mit größerer Wahrscheinlichkeit auf verschiedenen Seiten des Kerns auf. ⇒ Abschirmung der Kernladung durch erstes e^- wird für zweites e^- kleiner
 ↳ Anziehung durch Kern wird größer, Energie wird abgesenkt

- Wegen größeren e^- -Abstand geschieht weniger e^-e^- Abstößung, Energie wird zusätzlich abgesenkt

Wegen $\Delta S = 0$ sind Übergänge vom Singulett- ins Triplett-System verboten.

Schalenmodell der Atomhüllen

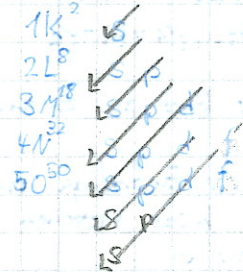
$$(l = n - 1)$$

Zu jedem l gibt es $2l+1$ m_l und zu jedem n gibt es n mögliche Werte für l (z.B. $n=2$, $l \in \{0, 1\}$). Für festes n gibt es also n^2 versch. Zustände, die mit $2n^2$ e^- besetzt werden können. Die Summe der Aufenthaltswahrscheinlichkeiten bei festem n über alle möglichen l und m_l liefert eine kugelsym. Verteilung mit Maxims bei von r -Abh. Werten r_n . Der Hauptteil der Ladung ist in einem $r_n \pm \frac{a_0}{2}$ Intervall konzentriert. Jede Schale kann mit $2n^2$ e^- besetzt werden.

Aufbauprinzip und Hund'sche Regeln

Die Madelungregel gibt die Reihenfolge an, in der die Orbitale gefüllt werden. Die ~~energie~~ minimiert u.t.l. Somit wird die Gesamtenergie aller Elektronen für den Grundzustand minimiert.

Hund'sche Regeln geben an, wie das Orbital zu füllen ist, wenn nicht genügend e^- vorhanden sind um es vollständig zu füllen.



1. 'sche Regel: Volle Schalen haben Gesamtdrehimpuls Null. Regel ergibt sich aus Pauli-Prinzip. Für eine gefüllte Schale müssen alle möglichen Quantenzahlen belegt sein $\rightarrow$ gleich viele pos/neg Werte für m_l, m_s .

2. 'sche Regel: Gesamtspin S nimmt maximal möglichen Wert an $\rightarrow \uparrow$; möglichst parallel. $\uparrow\uparrow$ -Spins ergeben symmetrischen Anteil der Wf. $\rightarrow$ Bahnanteil muss Antisymmetrisch sein $\rightarrow e^-$ weiter voneinander entfernt $\rightarrow$ kleinere Coulomb-WW.

3. 'sche Regel: Erlaubt das Pauli-Prinzip mehrere Konstellationen mit $\hat{S}_{max}$, dann werden die Unterzustände mit der mit der Magnetquantenzahl m_l so besetzt, dass der Gesamt-Bahndrehimpuls L_{max} wird. $\rightarrow$ Im Einkleidenfall Abstand e^- -Kern $\sim m_l \rightarrow e^-$ mit großen m_l weiter von Kern entfernt $\rightarrow$ Auch weiter von anderen e^- entfernt.

4. 'sche Regel: Ist eine Unterschale höchstens zur Hälfte gefüllt, dann ist der Zustand mit minimaler Drehimpulsquantenzahl j am stärksten gebunden. Bei mehr als halb vollen Unterschalen ist es umgekehrt: weniger halb voll: $j = |L-S|$, mehr halb voll: $j = |L+S|$ (Für mag. Verhalten entscheidend).

s-Zustände haben wellenverschobene Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Kern $\rightarrow$ Absicherung der anderen e^- nicht so sehr benachteiligt $\rightarrow$ Energiehöch. s-Orbitale

Moleküle

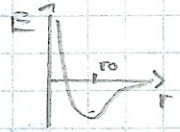
Molekülspektren wesentlich komplizierter als Atomspektren da Energieniveaus nicht nur durch e^- sondern auch durch Schwingung d. Kerne (Rotation d. Kerngerädes) bestimmt werden

Lösungsansätze: Born-Oppenheimer-Näherung

↳ Masse der Kerne $m_K \gg m_e \Rightarrow$ löse Sb für Elektronen mit „stationären“ Kernen. H_2^+ sogar analytisch lösbar als modifiziertes lt in Elliptischen Koordinaten

Generell: Für jeden Kernabstand wird Sb numerisch gelöst und Energie e^- bestimmt

$E(r)$ -mittlere Energie des e^- in H_2^+ , $E(r_0)$ -Bindungsenergie des e^- bei konstanter Bindung



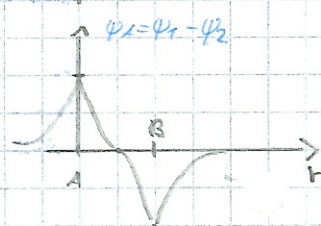
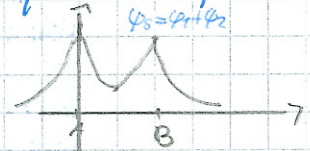
LCAO (Linear Combination of Atomic Orbitals)

Molekulare WF wird als Linearkombination der atomaren WF zusammengesetzt. Es ergeben sich eine symmetrische / antisymmetrische WF.

$$\psi_s = \psi_1 + \psi_2, \quad \psi_A = \psi_1 - \psi_2$$

↳ $E_s < E_A$ (Bsp. 1.4 eV vs 1.6 eV)

$\Rightarrow \psi_s$ ergibt Bindenden Zustand, ψ_A ergibt Antibindenden Zustand



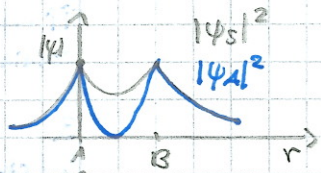
ψ_s Bindender Zustand, da maximale Aufenthaltswahrscheinlichkeit der e^- in der Mitte

↳ e^- ziehen beide Protonen Richtung Mitte, energetisch günstiger weil zu geteilt Abstoßung gemindert wird

↳ e^- hat in ψ_s mehr Raum $\rightarrow$ größere Ortsunschärfe $\rightarrow$ kleinere Impulsunschärfe $\rightarrow$ weniger $E_{kin} = \frac{p^2}{2m}$

ψ_A Antibindender Zustand, e^- halten sich eher an beiden Seiten auf:

↳ e^- ziehen Protonen voneinander weg, begünstigen Abstoßung $\rightarrow$ Energetisch ungünstiger



↳ Kein He_2^+ -Molekül weil mit den 4 e^- bindendes/antibindendes Orbital gefüllt $\rightarrow$ Energetisch günstiger Bindungszustand wird durch den Antibindenden kompensiert.

$\Rightarrow$ Gesamtsystem liegt energetisch nicht niedriger, es kommt keine Bindung zustande



Theoretisch auch Mischung von Orbitalen möglich $\rightarrow$ sp-Hybridisierung

Nissan defizit bei Molekülen zu ungenügend, Masse zu groß und

Bindungsenergie zu klein

Kovalente Bindung

Überlapp der WF führt zu Bindend/Antibindenden Zustand. Elektronen finden auf dem günstigen Bindenden

Orbital Platz. Kovalente Bindungen können nur unvollständig besetzte Orbitale eingehen $\rightarrow$ ein e^-

Wäre das Orbital vollständig besetzt, so müssten die restlichen e^- in der Antibindenden Orbital $\rightarrow$ Energetisch nicht mehr günstig $\rightarrow$ Pauli-Prinzip verhindert Aufenthalt von mehr als 2 e^- im Bindenden Orbital.

Bei der kovalenten Bindung werden e^- zwischen den Kernen angeheftet $\rightarrow$ Abstoßung der Kerne wird durch e^- vermindert $\rightarrow$ Energetisch günstiger

Möglichkeit der „Hybridisierung“, s -Orbital können von s -Orbital in p -Orbital gehen, damit z.B. 3 p -Orbitale mit jeweils einem e^- zur Verfügung stehen $\rightarrow$ Energetisch insgesamt günstiger, obwohl e^- im Energiezustand angehoben weil mehr Bindungen nun möglich sind z.B. Kohlenstoff $\rightarrow$ Diamant

Ionenbindung

Wichtig ist Ionisationsenergie I (=Energie, die aufgewendet werden muss, um ein Elektron aus einem neutralen Atom zu entfernen) und Elektronenaffinität A (=Energiegewinn, wenn man einem neutralen Atom ein Elektron hinzufügt).

Bei einer vollständigen Bindung geht ein e^- von einem Atom auf ein anderes Atom über. Dabei muss die Energie $A-I$ aufgebracht werden. Anschließend gewinnt man durch die C-Anziehung wieder Energie.

z.B. $NaCl$ $I(Na) = 5,14 eV$, $A(Cl) = 3,77 eV \Rightarrow$ Es müssen $1,43 eV$ aufgewendet werden, Elektrostat. Anziehung zwischen Ionen führt zu $4,51 eV$ Energiegewinn $\Rightarrow \Delta E = +3,08 eV$, Atome können sich nicht zu nahe kommen, bei zu viel Nähe müssen die höheren Antibindenden Orbitale gefüllt werden $\rightarrow$ Energetisch ungünstiger

Rein ionische Bindungen, an den ein e^- vollständig übergehen wird kommt nicht vor. Ionische Bindung tritt immer zusammen mit kovalenter Bindung auf. Ionische Bindung $\rightarrow$ Anteil überwiegt ggü kovalenter Bindung

$\rightarrow$ Ionisier, Nichtleiter ($\rightarrow$ Band voll gefüllt, keine freien e^-)

Hohe Temperatur: Ionenleitfähigkeit

1-2
Bild

Leide (Lage)
C-Kette,
derlo
Stärke von Wille
→ sehr
populär

Van-der-Waals-Bindung

Wozel
Tritt grundsätzlich immer auf, ist aber verglichen mit anderen Bindungen sehr klein → wird nur bei Atomen mit geschlossener Schale (→ Edelgase) oder gesättigten Molekülen beobachtet

Unschärfe, Fluktuationen erzeugen temporäre Dipolmomente → Anziehung zwischen 2 temporären Dipolen

Mittleres Dipolmoment = 0

Schlechter Leiter von Wärme, Dielektrizität, tiefer Schmelzpunkt, leicht komprimierbar / deformierbar z.B. CH_4 , Cl_2

Metallische Bindung

"Bindung, die in Metall vorkommt" (Wor!), Ähnlich zu kovalenten Bindungen, bloß mit s-förmigen überlappenden WF → viele Atomrümpfe tragen zur Bindung bei

→ Elektronen sind im Metall delokalisiert, freie e^- sind "Kleber" der pos. Atomrümpfe zusammenhält

→ Bindungskräfte sind aufgrund starker "Verschmierung" nicht gerichtet

Podgy: Verschmierung führt zu einer starken Reduktion der Valenzelektronen (→ Unschärferelation)

→ Absenkung der Gesamtenergie

Wasserstoffbrücken-Bindung

H-Atom sehr klein, bei kovalenter Bindung mit anderem Atom, besonders bei stark elektronegativen, wird eine Seite des Protons als nicht positive Ladung frei, da e^- in bindenden Orbital zwischen den beiden Atomrümpfen sitzt. → Nicht positive Ladung sehr effektiv zur Bindung an e^- -Wolke

z.B. H_2O → Eiskristall



Unter einem Kristall wird eine räumlich starke Anordnung von Materieteilchen verstanden, die sich in einer oder mehreren räumlichen Richtungen periodisch wiederholt. Von besonderer Bedeutung ist dabei die Basis, und das Gitter des Kristalls.

Unter der Basis, die in den meisten Fällen aus mehreren Atomen / Molekülen besteht, wird ein kleiner räumlicher Abschnitt aus dem Gitter verstanden, durch dessen diskrete Translation entlang jeder Linear kombination

$$\vec{R} = z_1 \vec{a}_1 + z_2 \vec{a}_2 + z_3 \vec{a}_3 \quad z_i \in \mathbb{Z}$$

der Gittervektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ vollständig rekonstruiert wird.

Das Gitter ist durch die Menge aller Vektoren $\vec{R}$ gegeben, wenn zudem die zugehörige Basis nicht mehr weiter in identische Abschnitte unterteilt werden kann.

Bei 2 Teilchen 2 mögliche Bindungen → Bei N Teilchen N Bindungen

$2 \cdot 10^{-10}$
 1 Å

Die Beugung an periodischen Strukturen

Direkte Abbildung von atomaren Strukturen wird durch das hochauflösende Elektronenmikroskop/Tunnelmikroskop.

Zur Aufklärung von Strukturen weiterhin Beugungseffekte nötig. $\rightarrow$ e⁻, Röntgenstrahlen, Neutronen, Atome

$\rightarrow$ unterschiedliche λ für unterschiedliche Strukturen $\rightarrow$ e⁻, Röntgen für Elektronenhülle, Neutronen für Kerne ($\rightarrow$ hat keine adre λ in λ)

Einfallende Welle soll die streuende Materie an allen Orten $\vec{r}$ zur Emission von Kugelwellen anregen

Feste Phasenbeziehung zw. Primärwelle und jeweils emittierter Kugelwelle wird angenommen (kohärente Strahlung)

"kinematische Streuung" $\rightarrow$ Emittierte Kugelwellen werden kein 2. Mal gestreut

Ebene Welle mit Frequenz ω_0 und Wellenvektor $\vec{k}_0$ mit $A(t) = A_0 e^{i(\omega_0 t - \vec{k}_0 \cdot \vec{r})}$ trifft auf Streuzentrum

$\rightarrow$ Kugelwelle $A_2(t) = \frac{\tilde{A}}{R} e^{-i(\omega_0 t - \vec{k}_0 \cdot \vec{r})}$

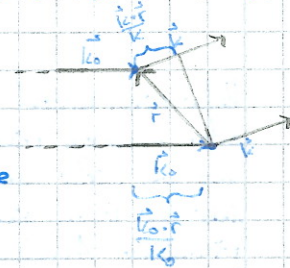
Phasendifferenz der jeweiligen Kugelwellen enthält Streuinformation $\phi = (\vec{k} - \vec{k}_0) \cdot \vec{r}$ (el. Streuung $|\vec{k}| = |\vec{k}_0|$)

Gesamtamplitude der Streustrahlung am Detektor: $A_s(t) = \underbrace{\frac{\tilde{A}}{R_0} e^{-i(\omega_0 t - \vec{k}_0 \cdot \vec{r}_0)}}_{\text{wird von Verschiebungsfaktor bestimmt}} \underbrace{\int_V g(\vec{r}) e^{-i(\vec{k} - \vec{k}_0) \cdot \vec{r}} dV}_{\substack{\mathcal{K}(\vec{K}) \text{ Streuamplitude mit} \\ \vec{K} = \vec{k} - \vec{k}_0 \Rightarrow \text{FT von } g(\vec{r})}}$

Prinzipiell aus $\mathcal{K}(\vec{K})$ $g(\vec{r})$ über $g(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathcal{K}(\vec{K}) e^{i\vec{K} \cdot \vec{r}} d^3K$ bestimmbar.

Aber: mit $\sin^2$ Expansion kann nicht Amplitude, sondern nur Intensität ^{der Streustrahlung} gemessen werden ($\rightarrow$ reflekt. Teilchen $j(\vec{r})$)

$\rightarrow$ Wichtige Teil d. Information geht verloren



Fourier-Entwicklung von Punktgittern

Kristalle sind translationssymmetrisch, Streuchichtverteilung $g(\vec{r})$ somit periodisch $\rightarrow$ Symmetrie nutzen

Entwickle $g(\vec{r})$ in Fourier-Reihe $g(\vec{r}) = \sum_{h,k,l} g_{hkl} e^{i\vec{G}_{hkl} \cdot \vec{r}}$ $h,k,l \in \mathbb{Z}$

Fourier-Koeff $g_{hkl} = \frac{1}{V_2} \int_{V_2} g(\vec{r}) e^{-i\vec{G}_{hkl} \cdot \vec{r}} dV$, Integration über Periode der Fkt, also das Volumen V_2 der primitiven Elementarzelle.

Schreibe $\vec{G}_{hkl} = h\vec{b}_1 + k\vec{b}_2 + l\vec{b}_3$, da h,k,l ganze Werte annehmen bildet jedes $\vec{G}_{hkl}$ den Punkt eines Gitters $\rightarrow$ Reziprokes Gitter, das unterliegt Einschränkungen ($\rightarrow$ Translationsinvarianz)

$g(\vec{r}) = g(\vec{r} + \vec{R}) = \sum_{hkl} g_{hkl} e^{i\vec{G}_{hkl} \cdot (\vec{r} + \vec{R})} = \sum_{hkl} g_{hkl} e^{i\vec{G}_{hkl} \cdot \vec{r}} e^{i\vec{G}_{hkl} \cdot \vec{R}}$

wobei $\vec{R} = n_1\vec{a}_1 + n_2\vec{a}_2 + n_3\vec{a}_3$ Gittervektor Kristall

$\rightarrow e^{i\vec{G} \cdot \vec{R}} = 1 \Leftrightarrow \vec{G} \cdot \vec{R} = 2\pi p$ mit $p \in \mathbb{Z}$

Kann nur für bel. n_i und h,k,l gelten, wenn $\vec{b}_i \cdot \vec{a}_j = 2\pi \delta_{ij}$

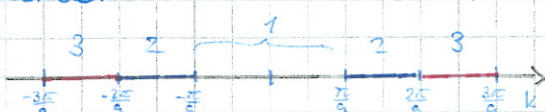
$\Rightarrow \vec{b}_1 = \frac{2\pi}{V_2} (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)$ $\vec{b}_2 = \frac{2\pi}{V_2} (\vec{a}_3 \times \vec{a}_1)$ $\vec{b}_3 = \frac{2\pi}{V_2} (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2)$ $V_2 = (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \cdot \vec{a}_3$, $\frac{(2\pi)^3}{V_2} = (\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) \cdot \vec{b}_3$

Vektoren des reziproken Gitters haben die Dimension einer inversen Länge, denn sie ex. nicht im Ortsraum, sondern im $\vec{k}$ -Raum.

$1/\text{L} = \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow \text{wellenl. invers}$

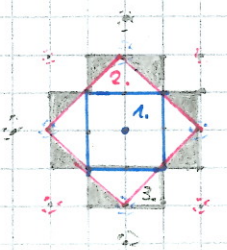
Brillouin-Zone

Wie im reellen Gitter Wigner-Seitz-Zelle (Konstruktion durch Normalebenen auf Verbindungsstrecken zw. Gitterpunkten) lässt sich im Rezi-Gitter definieren. Erweiterte BZ: weitere entfernte Punkte in Aufbau miteinbeziehen



Reziprokes Gitter einer linearen Kette 1.BZ $-\frac{\pi}{a} \leq k \leq \frac{\pi}{a}$

Beachte: Hälften der höheren BZ besitzen zusammen genauso V wie 1.BZ



Rechteck Gitter mit BZ, durch Verschieben der Teile aus höheren Zonen um ganze Rezi-Gittervektoren können sie wieder zu einem Quadrat mit der Fläche der 1.BZ zusammengefügt werden

Millersche Indizes

Ebene im Kristall, die durch Gitterpunkte aufgespannt wird, bez. man als Kristallgitter-/Netzebene. Aufgrund der Translationsinvarianz d. Kristalle gibt es jeweils (unendlich) viele äquivalente Ebenen, die parallel zueinander verlaufen.

Bei der Charakterisierung der Gitterebenen werden reziproke Längen gesetzt $\rightarrow$ Millersche Indizes (hkl) steht für eine Schaar von parallelen Ebenen. Wobei h, k, l die jeweiligen Normalkomponenten sind. $(100) \rightarrow$ Ebenenschar in yz -Ebene.

Da inverse Längen liegt (200) -Ebene näher am Ursprung als (100) -Ebene.

Der reziproke Gittervektor $\vec{G}_{hkl}$ steht senkrecht auf den Netzebenen (hkl) , Abstand d_{hkl} zwischen

zwei benachbarten Netzebenen geg. durch $d_{hkl} = \frac{2\pi}{|\vec{G}_{hkl}|}$

Streuung an Kristallen

Amplitude des Streusignals $\sim$ Streuamplitude $A(\vec{k})$, somit

$$I(\vec{k}) \sim |A(\vec{k})|^2 = \left| \int_{V_p} g(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} dV \right|^2 = \left| \sum_{nkl} S_{nkl} \int_{V_p} e^{i(\vec{G}-\vec{k})\cdot\vec{r}} dV \right|^2$$

Da die Exponentialfunktion oszilliert, mitteln sich die Beiträge weg, wenn V_p groß ggü. der Periode der Oszillationen ist. $\hat{=}$ Auslöschen der Streubeiträge der einzelnen Atome durch Interferenz

$\hookrightarrow$ Beitrag nur bei Streubedingung $\vec{k} = \vec{G}$ $\rightarrow \int_{V_p} e^{i(\vec{G}-\vec{k})\cdot\vec{r}} dV \approx \begin{cases} V_p & (\vec{k} = \vec{G}) \\ 0 & (\vec{k} \neq \vec{G}) \end{cases}$ falls $V_p \gg \frac{2\pi}{|\vec{G}-\vec{k}|}$

„Laue Bedingung“

In Grenzfall eines unendlichen V_p stellt dort das δ -Hut in den drei Raumrichtungen. $\rightarrow$ ist V_p endlich, so weicht die Bedingung etwas auf.

Der Experimentator gibt durch die räumliche Anordnung von Strahlungsquelle, Strahlungsdetektor und durch die Orientierung der Probe die Lage von $\vec{k}$ im reziproken Gitter vor.

$\hookrightarrow$ Wird Streuung beobachtet, so ist auch $\vec{G}$ festgelegt

$\Rightarrow$ Beobachtete Streuung an einer periodischen Schwingung der Streudichte ($\rightarrow$ Atomrumpfe) ist erfolgt, die Periode der Streudichte ist durch $d_{hkl} = 2\pi/|\vec{G}_{hkl}|$ gegeben.

$$\frac{1}{d_{hkl}^2} = \frac{h^2 a^2 + k^2 b^2 + l^2 c^2}{a^2 b^2 c^2} \quad \text{aus Beziehung zw. Netzebenenabstand und Gitterkonstanten}$$

Es gilt $|\vec{k}| = |\vec{k}_0| \quad |\vec{k}| = |\vec{k} - \vec{k}_0| = 2k_0 \sin\theta = \frac{4\pi \sin\theta}{\lambda}$

Aus (1) folgt $2 d_{hkl} \sin\theta = \lambda$
 $\rightarrow$ Vgl. Maley-Bragg-Bed. Ex 4

bzw. $2 d \sin\theta = n\lambda$ (Höheren Ordnungen können auch Beitrag leisten)

Strukturfaktor

Bisher haben wir nur besprochen, welche Gitterreflexe durch die Periodizität entstehen können, aber nicht wie stark diese sind.

Das wird durch S_{hkl} bestimmt, die Information über die Basis enthalten. ($\rightarrow$ Versch. Bestandteile d. Elementarzelle tragen bei) Lage der Atome in der BZ

Wir spalten den Ortsvektor auf: $\vec{r} = \vec{R}_m + \vec{r}_\alpha + \vec{r}'$
Lage der Elementarzelle „durchläuft“ dann das Atom

$$\Rightarrow S_{hkl} = \frac{1}{V_Z} \int_{V_Z} g(\vec{r}) e^{-i\vec{G}\cdot\vec{r}} dV = \frac{1}{V_Z} \sum_{\alpha} e^{-i\vec{G}\cdot\vec{r}_\alpha} \int_{V_Z} g_{\alpha}(\vec{r}') e^{-i\vec{G}\cdot\vec{r}'} dV'$$
$$= \frac{1}{V_Z} \sum_{\alpha} f_{\alpha}(\vec{G}) e^{-i\vec{G}\cdot\vec{r}_\alpha}$$
$$= f_1 \vec{a}_1 + f_2 \vec{a}_2 + f_3 \vec{a}_3$$

$$S_{hkl} = S_{hkl} V_Z = \sum_{\alpha} f_{\alpha}(\vec{G}) e^{-2\pi i (h u_{\alpha} + k v_{\alpha} + l w_{\alpha})}$$

Je nach Basis kann der Beitrag verschwinden.

Experimentelle Methoden

Um aus dem breiten Spektrum einer kontinuierlichen Strahlung ein monochromatisches zu machen, nutzt man den „Monochromatorkristall“ → Bekannter Einkristall mit Bragg-Reflexion (→ Reflektiertes Licht hat nur noch eine λ)
Die Streubedingung enthält 2 Größen, die im Experiment variiert werden können → λ und Kristallorientierung

Lane-Verfahren

Einkristall wird mit kontinuierlichem Spektrum bestrahlt → Viele Kristallebenen erfüllen gleichzeitig die Streubedingung
Wird entlang einer Symmetrieachse gestreut, so entsteht ein Beugungsbild mit Symmetrieelementen.

↳ Bei einem Kristall mit unbekannter Struktur können Hauptsymmetrieachsen ermittelt werden

Vorteil: Beobachtung von dynamischen Prozessen in Kristallen (→ Proteinkristalle) → Funktionsebene Proteine

Nachteil: Indizierungsproblem, nicht nachvollziehbar welcher Reflex von welcher Wellenlänge stammt

Drehkristallverfahren

Monochromatische Strahlung auf Einkristall, Drehachse sollte mit Achse hoher Kristallsymmetrie zusammen fallen
Nun wird der Kristall rotiert, es tritt immer dann ein Reflex auf, wenn eine Netzebenenscher im Verlauf der Drehung die Bragg-Bedingung erfüllt

Debye-Scherrer-Verfahren

Feinpulverisierte Kristalle werden mit monochromatischer Wellen bestrahlt. Kristallite, deren Gitterebenen zufällig so liegen, dass sie die Bragg-Bedingung erfüllen, verursachen einen Reflex. → Beugungsringe auf Film sichtbar (Von konzentrischem Kreisbogen)
Ordnungen entstehen durch Reflexion an versch. Gitterebenen $d = \frac{a}{2 \sin \theta}$

→ möglich, um den Kristall zu analysieren

Gitterdynamik

Meiste FK-Eigenschaften lassen sich auf Bew. der Atome oder e^- zurückführen (Gitterdynamische-/Elektrodynamische Eigenschaften)

Separate Behandlung der Untersysteme: Adiabatische/Born-Oppenheimer Näherung → e^- bewegen sich wesentlich schneller als Atome

Annahme: Auslenkung der Atome aus Ruhelage mit parabolformiger Variation der pot. Energie des FK verbunden

Es breiten sich im FK ^{longitudinale/transversale} Schallwellen mit linearer Dispersionsrelation aus. $\omega = v \cdot q$

Gitterschwingungen

Abweichung von Schallwellen, wenn Wellenlängen vergleichbar mit Gitterkonstanten sind. Aus Symmetriegründen kompensieren sich alle Kräfte, die nicht in Ausbreitungsrichtung wirken. → Näherung als lineare Kette möglich

Gitter mit einatomiger Basis

n -tes Atom wird aus seiner Equilibritium-Position ausgelenkt: $\delta x_n = x_n - x_n^{eq}$

Klassisches Modell mit Masse-Feder-System

$$V_{\text{tot}} = \sum_i V(x_{i+1} - x_i) = \sum_i \frac{1}{2} (x_{i+1} - x_i - a)^2 = \sum_i \frac{1}{2} (\delta x_{i+1} - \delta x_i)^2 \rightarrow F_n = -\frac{\partial V}{\partial x_n} = \kappa (\delta x_{n+1} - \delta x_n) + \kappa (\delta x_{n-1} - \delta x_n)$$

Aus $F=ma$ $m \ddot{\delta x_n} = F_n = \kappa (\delta x_{n+1} + \delta x_{n-1} - 2\delta x_n)$

Wellenansatz $\delta x_n = A e^{i\omega t - i k_n a} = A e^{i\omega t - i k n a}$

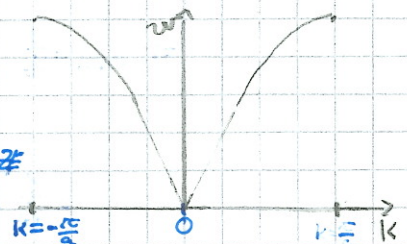
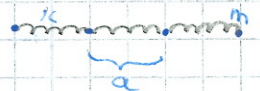
$$\Rightarrow \omega = 2 \sqrt{\frac{\kappa}{m}} \left| \sin\left(\frac{k a}{2}\right) \right|$$

Phasenunterschied zwischen benachbarten Atomen nur zwischen 0 und 2π → Wellenvektor lässt sich ohne Verlust der Allgemeingültigkeit auf $-\frac{\pi}{a} < k \leq \frac{\pi}{a}$ beschränken

↳ Liegt ein Wellenvektor außerhalb der 1. BZ lässt er sich mithilfe $k' = k + \frac{2\pi p}{a}$ $p \in \mathbb{Z}$ zurück in die 1. BZ führen

Allesing: Wie soll k und $k + \frac{2\pi}{a}$ die gleiche Welle beschreiben? Tun sie prinzipiell nicht, es sind 2 Wellen, aber Welle bei k ist nur an Atomrümpfen bzw. durch deren Auslenkung def. → Ist egal, ob sie zwischen Atomrümpfen unterschiedlich sind, die physikalische Welle ist nur an Atomrümpfen definiert

Phänomen, dass 2 Wellen identisch sind, wenn sie nur an best. Punkten gesampelt werden → Allesing (Radio-technik)



Im langwelligem Grenzfall ($\rightarrow k \rightarrow 0$) vereinfacht sich die Gleichung zu $\omega = a \sqrt{\frac{K}{m}} k$, dies ist äquivalent zu unserer linearen Dispersion im Schallwellenfall.

Aber: Bei größeren k nicht mehr linear

Gruppengeschw.: Geschwindigkeit, mit der sich ein Wellenpaket bewegt $v_g = \frac{d\omega}{dk}$

Phasengeschw.: Geschwindigkeit, mit der sich die individuellen Maxima/Minima bewegen $v_p = \frac{\omega}{k}$

Im kurzwelligen Grenzfall ($\rightarrow k \rightarrow \frac{\pi}{a}$) schwingen die benachbarten Ebenen in Gegenphase, da die Phase benachbarter Atome $= e^{ika} = -1$ für $k = \frac{\pi}{a}$

$\Rightarrow$ Stehende Wellen mit $k = \frac{\pi}{a}$ und $\lambda = 2a$, $v_g = \frac{d\omega}{dk} = 0$ für $k = \frac{\pi}{a}$ für alle Werte von K, m

Insgesamt Anzahl an Normalmoden = $\frac{K\text{-Range}}{\text{Spaz. zwischen } k} = \frac{2\pi/L}{2\pi/L/a} = N \Rightarrow$ Eine Normalmode pro Masse im System.

Phononen sind quantisierte, Zähl wert erhalten + sind nicht lokalisiert $\rightarrow$ überall im Kristall
Quantenmoden: Phononen Teilchen: Schwingung, Eingeb. Oszillatoren

QM-Oszillator bei geg. ω die Energien $E_n = \hbar \omega (n + \frac{1}{2})$

Hier ist nun kein einzelner Oszillator sondern eine kollektive Normalmode bei $\omega = \omega(k)$, somit können bei gegebenem k die Eigenenergien gemäß $E_n = \hbar \omega(k) (n + \frac{1}{2})$ besetzt werden. Jedes n , also Anregung der Normalmode wird "Phonon" genannt.

Anwendung der Bose-Statistik zur Besetzung $n_B(\beta \hbar \omega)$

$$\Rightarrow E_k = \hbar \omega(k) (n_B(\beta \hbar \omega(k)) + \frac{1}{2})$$

$$\Rightarrow U_{\text{tot}} = \sum_k E_k = \sum_k \hbar \omega(k) (n_B(\beta \hbar \omega(k)) + \frac{1}{2})$$

$$\rightarrow \frac{N}{2\pi} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} dk \hbar \omega(k) (n_B(\beta \hbar \omega(k)) + \frac{1}{2})$$

Kristallmoment

Moment $\hbar k$ von Phononen schwer beschreibbar, da gleiches Phonon ob $\hbar k$ oder $\hbar(k + \frac{2\pi}{a}) \Rightarrow$ Nachbrechung k wird immer innerhalb der 1. BZ beschrieben!

$\Rightarrow$ Moethor-Theorem, aus Symmetrie folgt Erhaltungsgröße (Raum invariant unter Verschiebung um a)

Gitter mit mehratomiger Basis

Jetzt: Ketten mit Massen m_1, m_2 und K_1 und K_2

Selber Wellenansatz, EV-Problem mit Matrix

$$\omega_{\pm} = \sqrt{\frac{K_1 K_2}{m} \pm \sqrt{K_1^2 + K_2^2 + 2K_1 K_2 \cos(ka)}}$$

Für jedes k gibt es nun 2 Normalmoden $\Rightarrow 2N$ Moden insgesamt

akustische Mode: Zweig linearer Dispersion für $k \rightarrow 0$

Optische Mode: Nicht Null für $k=0$, Name kommt daher, dass bei Absorption von Photonen im FK Energie/Momentum erhalten bleiben: $\omega_{\text{licht}} = ck$ sehr groß, Phononen haben maximales k , somit ist nur für kleine k eine Absorption möglich, für kleine k ist akustischer Zweig $\rightarrow 0$, somit wird Photon in oberer Dispersionskurve $\omega_{\text{opt}} = ck$ aufgenommen. Somit kann Energie/Impuls erhalten werden.

(Phonon-Photon - Wir direkt nicht möglich, da Photonen $s=1$ haben und Phononen $s=0 \Rightarrow s$ nicht erhalten)

Für $k \rightarrow 0$ vereinfacht sich das EV-Problem und es lassen sich EV für Akk. und optische Moden finden

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \rightarrow \rightarrow$$

Massen schwingen zusammen, Analog zu Schallwellen $\rightarrow$ Kompression, Relaxation entlang Richtung

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \rightarrow \rightarrow$$

Massen schwingen Gegenphasig, Ausdrücklich: Mehr Energie vorhanden weil ständige Kompression/Auslenkung

$\rightarrow$ 1Dus, 2Dus, 3Dus

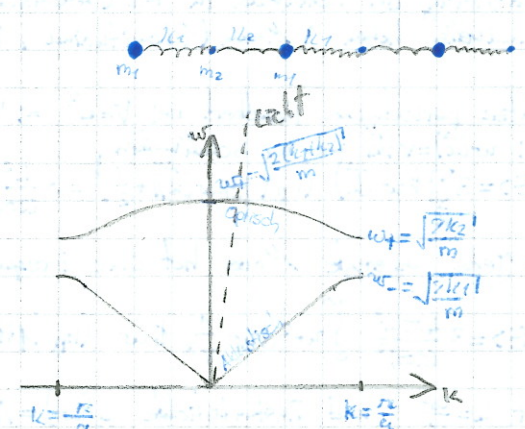
In 3D: 3n Freiheitsgrade, immer 3 Akk. also $3(n-1)$ optische (n = Anzahl Atome pro Einheitszelle)
 $\Rightarrow$ Aufteilung in Zweige nur bei hoher Symmetrie, sonst optisch/Akk. Zweig entartet

beim $k_1 \rightarrow k_2$ so nähern sich die beiden Zweige an, bis es wieder zur einatomigen Kette wird

Phononen beschreiben Ausg. d. gesamten Gitters, d. Phononen nicht kollektivem Schwingen zugeordnet werden

Indirekte Neutronenstreuung $\rightarrow$ Anregung Alone

Anregung durch dazugegen haben



Spezifische Wärmekapazität

Wird durch thermisch angeregte Phononen bestimmt, außer für tiefe Temperaturen Beschreibung durch
 Dulong-Petit-Gesetz: $C = 3k_B$ bei Raumtemperatur, logisch betrachtet $C \rightarrow 0$ ($T \rightarrow 0$), da die Freiheitsgrade einfrieren
 bequandele Energieniveaus, wenn Energie weit unten nicht mehr groß genug ist um nicht höheres Niveau
 Boltzmann-Modell: Atome an nächsten Nachbarn gebunden, Harmonisches Potential durch Interaktion mit Nachbarn
 Rechnung (klass. Zustandssumme) bestätigt Dulong-Petit Gesetz
 anregen, wird nichts angeregt $\rightarrow$ eingefroren

Einstein-Modell

Festkörper besteht aus N harmonischen Oszillatoren der Einstein-Frequenz ω_E (Konstant)

$$E_i = \hbar \omega_E \left(n_i + \frac{1}{2} \right)$$

$$Z_{10} = \sum_n e^{-\beta \hbar \omega_E \left(n + \frac{1}{2} \right)} = \frac{e^{-\beta \hbar \omega_E / 2}}{1 - e^{-\beta \hbar \omega_E}} = \frac{1}{2 \sinh(\beta \hbar \omega_E / 2)}$$

$$\langle E \rangle = \langle E \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial Z}{\partial \beta} = \frac{\hbar \omega_E}{2} \coth \left(\frac{\beta \hbar \omega_E}{2} \right) = \hbar \omega_E \left(n_B(\beta \hbar \omega_E) + \frac{1}{2} \right)$$

$\hookrightarrow$ Energieniveau auf wird mit n_B Bosonen besetzt

$$C = \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} = k_B (\beta \hbar \omega_E)^2 \frac{e^{\beta \hbar \omega_E}}{(e^{\beta \hbar \omega_E} - 1)^2} \rightarrow C = k_B \quad (T \rightarrow \text{hoch})$$

$$3D: \langle E_{3D} \rangle = 3 \langle E_{1D} \rangle$$

Für kleine T gute Beschreibung, Freiheitsgrade "frieren ein", einziger Parameter ist Einstein Frequenz ω_E (passl merke
 gut aber z.B. bei Diamant weniger, da dieser sehr starke Bindung)

Debye-Modell

Einstein's Theorie zwar erfolgreich, weicht aber immer noch von Experiment ab: Bei niedrigen $T \sim T^3$ (Metall + $\sim T$ Term),
 Einstein aber exponentiell

Quantisierung der Schwingen in FK (Atomenschwingung wie Schallwelle), Haupt Unterschied zu Licht außer in Ausbreitungsgeschw.
 Schwingen haben 3 Moden (1 Longitudinal, Atombewegung $\parallel \vec{k}$ und 2 transversale Atombewegung $\perp \vec{k}$)

Nutze periodische Randbed. bei $V = L^3 \Rightarrow$ Wellenvektor einer Welle $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ $\vec{k} = \frac{2\pi}{L} (n_1, n_2, n_3)$ $n_i \in \mathbb{Z}$ $\frac{1}{L} \rightarrow \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int d\vec{k}$
 Sei $\omega(\vec{k}) = v|\vec{k}|$ wie bei Schallwellen

$$\langle E \rangle = 3 \sum_{\vec{k}} \hbar \omega(\vec{k}) \left(n_B(\beta \hbar \omega(\vec{k})) + \frac{1}{2} \right) = 3 \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} \hbar \omega(\vec{k}) \left(n_B(\beta \hbar \omega(\vec{k})) + \frac{1}{2} \right)$$

$\rightarrow$ jede angeregte Mode hat eine Frequenz $\omega(\vec{k})$ und ist im Mittel mit n_B Bosonen (Phononen) besetzt

$$\langle E \rangle = 3 \frac{4\pi L^3}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \omega^2 d\omega \frac{1}{v^3} \hbar \omega \left(n_B(\beta \hbar \omega) + \frac{1}{2} \right) = \int_0^\infty d\omega g(\omega) (\hbar \omega) \left(n_B(\beta \hbar \omega) + \frac{1}{2} \right)$$

mit $k = \frac{\omega}{v}$ und Zustandsdichte $g(\omega) = N \frac{9\omega^2}{\omega_d^3}$ $\omega_d^3 = 6\pi^2 n v^3$ (Zustände pro Frequenzintervall)

$+\frac{1}{2}$ -Term gibt uns T -unabh. Term $\rightarrow$ interessiert nicht arg

$$\langle E \rangle = 9N \frac{(k_B T)^4}{(\hbar \omega_d)^3} \frac{\pi^4}{15} + T \text{ unabh.} \Rightarrow C = \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} = N k_B \frac{(k_B T)^3}{(\hbar \omega_d)^3} \frac{12\pi^4}{5} \sim T^3$$

Problem: dir für große T , unendlich große k erlaubt $\rightarrow$ mehr Moden als Atome im System
 $\rightarrow$ nur so viele Moden, wie System Freiheitsgrade hat $3N = \int_0^{\omega_{\text{max}}} d\omega g(\omega)$

$$\langle E \rangle = \int_0^{\omega_{\text{max}}} d\omega g(\omega) \hbar \omega \left(n_B(\beta \hbar \omega) + \frac{1}{2} \right) = k_B T \int_0^{\omega_{\text{max}}} d\omega g(\omega) = 3k_B T N$$

$$n_B \rightarrow \frac{k_B T}{\hbar \omega} \quad \text{für hohe } T$$

$$\rightarrow C = \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} = 3k_B N \text{ bzw. } 3k_B \text{ pro Atom}$$

Problem: Einführung von ω_{max} verzerrt exakter Ausweg als phys. Tatsache, lineare Dispersionsrelation $\omega = vk$ gilt für hohe
 k nicht, in mittleren T immer noch ungenau
 Metalle: $C = \gamma T + \alpha T^3$, T -Abh. nicht vorhanden

Drude Theory

Anwendung der kinetischen Gastheorie auf Elektronen im Metall

1) e^- haben mittlere Stoßzeit τ (Phänomenologisch, da zu viele unterkante v_m mit e^-) $\rightarrow$ Stoßfrequenz ist $\frac{1}{\tau}$

2) Nach dem Stoß steht das Elektron ($\vec{p}=0$)

3) Zwischen den Stößen reagiert das e^- auf äußere Felder

Erhalte New. Gleichung $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = -\frac{e}{c} \vec{E}$ $\vec{F} = -e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$, ohne Feld $\vec{p}(t) = \vec{p}_{init} e^{-t/\tau}$

Drift: ohne Feld e^-
ber. mit Fermi-ber.
lithon. Geschw.

Im $\vec{E}$ -Feld

$\frac{d\vec{p}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{\vec{p}}{\tau}$, Im Gleichgewicht ist $\vec{p}=0$ also $\vec{p} = -e\tau \vec{E} \equiv m\vec{v}$

$\rightarrow$ insgesamt Voraussetz. $\Rightarrow$ Stromdichte $\vec{j} = -en\vec{v} = \frac{ne^2\tau}{m} \vec{E}$

$\rightarrow$ Leitfähigkeit $\sigma = \frac{e^2\tau n}{m}$

isotrop $\Rightarrow$ μ nicht 0

Durch $\vec{E}$ -Feld gerichtet Im elm. Feld

Drift $v_d \sim 10^{-4} \frac{m}{s}$
 $v_{th} \sim 10^6 \frac{m}{s}$

$\frac{d\vec{p}}{dt} = -e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) - \frac{\vec{p}}{\tau}$, im bb $0 = -e\vec{E} + \frac{\vec{v} \times \vec{B}}{n} + \frac{m}{ne\tau} \vec{j}$ mit $\vec{p} = m\vec{v}$ und $\vec{v} = \frac{\vec{j}}{ne}$

$\Rightarrow \vec{E} = \left(\frac{1}{ne} \vec{j} \times \vec{B} + \frac{m}{ne^2\tau} \vec{j} \right) = \mathcal{R} \vec{j}$

g-3x3 Widerstandsmatrix $S_{xx} = S_{yy} = S_{zz} = \frac{m}{ne^2\tau}$
und für $\vec{B} \parallel \vec{e}_z$ $S_{xy} = -S_{yx} = \frac{B}{ne}$

Baugleichung?

Hall-Effekt: Wird ein Magnetfeld senkrecht zu einem Stromfluss angelegt, so kann senkrecht zu beiden eine Spannung gemessen werden

$V_H = A_H \frac{IB_z}{d} \Rightarrow$ Bestimmung $\vec{B}$ mit Hallsonde bzw. $R_H = -\frac{1}{ne}$ für Elektronen



Kleine Ladungsträgerdichten positiv $\rightarrow$ Bauteilstruktur später

Anwendung Drude Theorie auf Wärmetransport, Verhältnis $\frac{\kappa_{therm}}{\sigma}$ Leitfähigkeit Lorentz-Mann L passt relativ genau aber 2 Fehler: spez. Wärme $c_v = \frac{3}{2} k_B$ stimmt in Metallen nicht sondern Debye (Phononen) + $\sim T$ Term in kleinen T, Resultat trotzdem so gut weil v als viel zu klein angenommen wurde

Peltier-Effekt: Fließender Strom transportiert auch Wärme (stimmt bei Drude ganz und garnicht)

Stromfluss: Fermi-Kugel wird durch Kraft verschoben $\rightarrow$ Es tragen e^- in

Freies Elektronengas = Sommerfeld Theorie

Char. Längsk. = Energie durch N

e^- in Metallen lassen sich näherungsweise durch ein konstantes effektives Potential beschreiben, nur am Probenrand ex. eine Potentialbarriere $\rightarrow e^-$ können Fl. nicht verlassen e^- v_m nicht miteinander aber Pauli-Prinzip gilt

Werte der Fermi-Fläche zum Ladungsträger bei $\rightarrow$ große v

Betrachte Fermi-Besetzung für System von freien e^- mit Potential μ und Energie E $n_F(\beta(E-\mu)) = \frac{1}{e^{\beta(E-\mu)} + 1}$
für kleine T $n_F(\beta(E-\mu)) \rightarrow \Theta(\mu-E)$, für große T verschm. n_F

Annahme Period. Randbed. in V-L3 und $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ Wellen mit $\vec{k} = \frac{2\pi}{L}(n_1, n_2, n_3)$ $n_i \in \mathbb{Z}$
 $\Rightarrow E = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$

$\Rightarrow N_e = \sum_{\vec{k}} n_F(\beta(E(\vec{k})-\mu)) = 2 \frac{V}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} n_F(\beta(E(\vec{k})-\mu))$

Def. Fermi-Energie E_F als $\mu(T=0)$, "Fermi-level" Zustände bei $T=0$ gefüllt sind "Fermi-See"

Hd d.c. v_m und alle Temperatur $\rightarrow$ T_F

Fermi-Temperatur $T_F = E_F / k_B$, k_F durch $E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}$, $p_F = \hbar k_F$, $v_F = \frac{\hbar k_F}{m}$

E_F für Metall mit N Elektronen $N = 2 \frac{V}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} \Theta(E_F - E(\vec{k})) = \frac{2V}{(2\pi)^3} \int_{|\vec{k}| \leq k_F} d\vec{k} = 2 \frac{V}{(2\pi)^3} \left(\frac{4}{3} \pi k_F^3 \right)$

$\Rightarrow$ Elektronen Ball in k-Raum mit $r = k_F$ mit $n = \frac{N}{V}$ $k_F = (3\pi^2 n)^{1/3} \Rightarrow E_F = \frac{\hbar^2 (3\pi^2 n)^{2/3}}{2m}$

Da bekannt v_m e^- ca. in Metall für z.B. Kupfer $E_F = 80.000$ K ($T_F \gg T$ (Raumtemperatur), Metalle schmelzen kochen weit unter ihrer Fermi-Temperatur. $v_F \approx 1\% c \rightarrow$ kommt von Pauli-Prinzip, da so viele e^- müssen hohe Zustände mit viel Energie besetzt werden. Ist $T \approx T_F$ verhält sich Metall klassisch...
Reist werden e^- nahe an Oberfläche angeregt, da sehr viel Energie notwendig wäre, "tieferes" e^- anzuregen

Elektronische Wärmekapazität

$$E_{tot} = \frac{2V}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} \epsilon(\vec{k}) n_F(\beta(\epsilon(\vec{k}) - \mu))$$

$$N = \frac{2V}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} n_F(\beta(\epsilon(\vec{k}) - \mu))$$

$$d\vec{k} \rightarrow 4\pi k^2 dk$$

$$k = \sqrt{\frac{2Em}{\hbar^2}} \Rightarrow dk = \sqrt{\frac{m}{2E\hbar^2}} dE$$

$$\hookrightarrow E = V \int_0^\infty dE \epsilon g(\epsilon) n_F(\beta(\epsilon - \mu))$$

$$N = V \int_0^\infty dE g(\epsilon) n_F(\beta(\epsilon - \mu))$$

$$\text{mit } g(\epsilon) = \frac{(2m)^{3/2}}{2\pi^2 \hbar^3} \epsilon^{1/2} \quad \text{bzw.} \quad g(\epsilon) = \frac{dn}{2E_F} \left(\frac{\epsilon}{E_F}\right)^{1/2} \quad \text{mit} \quad \frac{(2m)^{3/2}}{\hbar^3} = \frac{3\alpha^2 n}{E_F^{3/2}}$$

$g(\epsilon)d\epsilon$ ist Number Zustände mit Energie zwischen ϵ und $\epsilon+d\epsilon$

Da näherungsweise gilt $T \ll T_F$ bzw. $k_B T \ll E_F$

$$E \approx E_0 + \frac{k_B^2}{6} g(E_F) (k_B T)^2 \Rightarrow C_V \approx \frac{\pi^2}{3} g(E_F) k_B^2 T = \frac{\pi^2}{3} \frac{T}{T_F} \frac{3n k_B}{2} = \gamma T$$

es liegen nur ϵ an Fermi-Oberfläche bei

$$\text{somit } C_V = \gamma T + \begin{cases} 3n k_B & \text{für } T > \Theta \\ \beta T^3 & \text{für } T \ll \Theta \end{cases}$$

Bei hohen Temperaturen ($T > \Theta$) dominiert Gitterbeitrag aus Dulong-Petit-Gesetz, bei niedrigen T trägt das Gitter den Term βT^3 zur spez. Wärme bei

Pauli-Paramagnetismus: Im Magnetfeld anheben/senken der Energie $H = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + g \mu_B \vec{B} \vec{\sigma}$

$$\epsilon(k, \uparrow) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \mu_B B$$

$\rightarrow$ Wird $\vec{B}$ -Feld angelegt, ist es energetisch günstiger $\downarrow$ -Zustand zu haben $\rightarrow$ Mehr $\downarrow$ -Zustände

$$\epsilon(k, \downarrow) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu_B B$$

$\rightarrow$ Magnetisierung in Richtung des angelegten $\vec{B}$ -Feldes

parallele Ausrichtung

Bei Elektronendrift bewegt sich Fermi-Sphäre fort $\rightarrow$ Layssche Bewegung

Aber: Streuung an Atomen nicht berücksichtigt

Wieso zählen nur manche Elektronen und andere haben keinen Einfluss?

Unterschiedliche Absorptionsspektren von Metallen werden nicht erklärt

Man würde erwarten, dass Elemente mit nicht vollen Schalen auch freie e^- haben, ist aber z.B. bei Diamant nicht der Fall $\rightarrow$ guter Isolator, obwohl äußere Elektronenschale der C-Atome nur halb gefüllt

Generell kleiner e^- beitragen, da nur e^- an Fermi-Oberfläche zur Wärmekapazität beitragen können ($\rightarrow$ Anregbar)

$$h_g(x) = \frac{1}{e^x - 1}$$

Unterschied EW Populationsoperator $\hat{n}$

$$n_F(x) = \frac{1}{e^x + 1}$$

(Eigentlich durch Besetzungsoptionen der Niveaus gegeben)

$$n_B = 0, 1 \quad n_F = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Elektronen im periodischen Potential

Füge ein periodisches Potential hinzu für das gilt $\tilde{V}(\vec{r}) = \tilde{V}(\vec{r} + \vec{R})$ wobei $\vec{R}$ bel. Gittervektor
Entwickle Potential nach reziproken Gittervektoren, entwickle $\tilde{e}$ nach ebenen Wellen

$$\tilde{V}(\vec{r}) = \sum_{\vec{G}} \tilde{V}_{\vec{G}} e^{i\vec{G}\vec{r}}$$

$$\psi(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} c_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

$$\text{Einsetzen SG } \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \tilde{V}(\vec{r})\right) \psi = E \psi$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - E\right) c_{\vec{k}} + \sum_{\vec{G}} \tilde{V}_{\vec{G}} c_{\vec{k}-\vec{G}} = 0$$

Darstellung SG für $\tilde{e}$ in periodischem Potential. Für jedes $\vec{k}$ ein Gleichungssystem mit $\psi_{\vec{k}}(\vec{r})$ und EW $E_{\vec{k}}$.

Entwicklungskoeffizienten unterscheiden sich um Reziproke Gittervektoren

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \left(\sum_{\vec{G}} c_{\vec{k}-\vec{G}} e^{-i\vec{G}\vec{r}}\right) e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

Ausdruck in Klammern ist Fourier-Entwicklung einer Gitterperiod.

Funktion $\rightarrow$ Gitterperiodischer Modulationsfaktor $u_{\vec{k}}(\vec{r})$

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = u_{\vec{k}}(\vec{r}) e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

$$u_{\vec{k}}(\vec{r}) = u_{\vec{k}}(\vec{r} + \vec{R})$$

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r} + \vec{R}) = u_{\vec{k}}(\vec{r} + \vec{R}) e^{i\vec{k}\vec{r}} e^{i\vec{k}\vec{R}} = \psi_{\vec{k}}(\vec{r}) e^{i\vec{k}\vec{R}}$$

$e^{i\vec{k}\vec{R}}$ nur Phasenfaktor

Im Fall freier $\tilde{e}$ ist $u_{\vec{k}}(\vec{r})$ konst.

Die Wellenfunktionen der $\tilde{e}$ und ihre EW wiederholen sich im $\vec{k}$ -Raum periodisch. Somit genügt es, sich auf 1. BZ zu beschränken, da diese 1. BZ in diesem Teil des $\vec{k}$ -Raumes bereits die ganze Information enthalten $\rightarrow$ „Reduktion auf die 1. BZ.“ im „reduzierten Zonenschema“

Quasi-freie-Elektronen

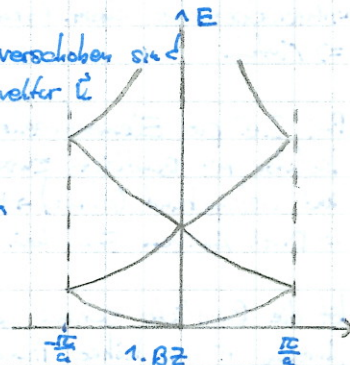
Annahme kleines Period. Potential $V_0 \ll 0$, Symmetrie d. Gitters soll aber periodische Lsg erzwingen $\rightarrow$ „Leeres Gitter“

$$E_{\vec{k}} = E_{\vec{k}+\vec{G}} = \frac{\hbar^2}{2m} |\vec{k} + \vec{G}|^2$$

$\rightarrow$ Parabeln, die in $\vec{k}$ -Raum um $\vec{G}$ gegeneinander verschoben sind
 $\rightarrow$ Verschiedene Eigenwerte $E_{\vec{k}}$ zum gleichen Wellenvektor $\vec{k}$

In 3D leider etwas komplizierter, Reduktion auf 1. BZ ruft Entartung hervor, da gleiche Teile der $E_{\vec{k}}$ -Kurven zu unterschiedlichen Reziproken Gittervektoren gehören.

$$E_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2}{2m} [(k_x + G_x)^2 + (k_y + G_y)^2 + (k_z + G_z)^2]$$



Aluminium, $V_0 \ll 0$ passt ziemlich genau, Entartungen werden im Realen Bild aber aufgehoben + Energie Lücken an BZ-Grenze ($\rightarrow$ endliche Stärke d. Potentials)
Bereich zwischen Energie Lücken werden als Energiebänder bezeichnet.

SG besitzt an Zonengrenze zwei Lsg mit unterschiedlicher Energie $\rightarrow$ Auftreten Energie Lücke

Durch hinzufügen Potential kommt es an BZ-Grenze zu Aufspaltung (Wieso da? 2. Ordnung Störungstheorie Term dir. für $\vec{k}' = -\vec{k} \rightarrow$ Entartung)

$$E(\vec{k}) = E_0(\vec{k}) + \sum_{\vec{k}' \neq \vec{k}} \frac{\langle \vec{k}' | V | \vec{k} \rangle^2}{E_0(\vec{k}) - E_0(\vec{k}')}$$

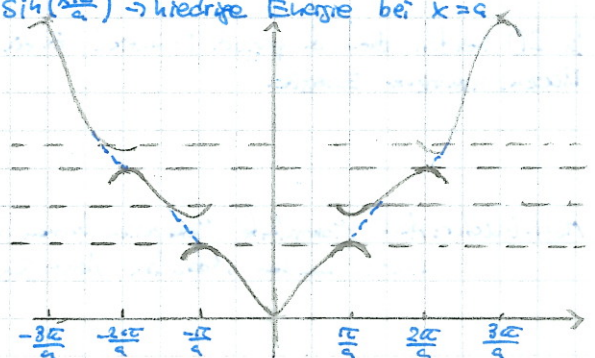
div. für $E_0(\vec{k}) = E_0(\vec{k}')$ bzw. $\vec{k}' = \vec{k} + \vec{G}$

$\rightarrow$ hole Energie bei $x=0$

bei $|x|/2$

$\rightarrow$ Entartete Störungstheorie $\psi_+ \sim \cos(\frac{x\pi}{a})$ $\psi_- \sim \sin(\frac{x\pi}{a})$ $\rightarrow$ niedrige Energie bei $x=a$

Aufspaltung der Dispersionsrelation mit erlaubten Bändern und verbotenen Zonen.



Bandlückengröße d.h. nur period. Potential, desto stärker Potential desto größer ist die Lücke.

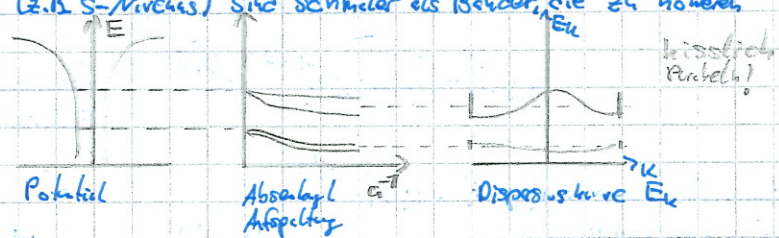
Tight-Binding-Elektronen

Annahme, dass e^- sich vorzugsweise in der Nähe der Atomrümpfe aufhalten $\rightarrow$ Gut für Molekül/Ionenkristalle
Störungstheoretische Behandlung der SB für das einzelne Atom $\rightarrow$ Analog zu LCAO Überlapp $\rightarrow$ Deswegen gut für Ionenkristalle $\rightarrow$ Konzentrierte Bindungen
 $\Rightarrow$ Störungspotential durch andere Atomrümpfe

$\rightarrow$ Dispersionskurve wie bei freien Elektronen, aber Dispersion hat max. und min. Energie
 $\hookrightarrow$ Cosinus Terme $\rightarrow$ Entspricht $\propto k^2$

Absenkung der Atomniveaus durch benachbarte Atome (vgl. tight-kontakt Bindung), Aufspaltung der abgesenkten Niveaus durch Überlapp der WF. je nach Abstand unterschiedl. starke Überlapp

Tiefer liegende Bänder, zu denen stark lokalisierte WF gehören (z.B. s-Niveaus) sind schmaler als Bänder, die zu höheren Atomniveaus mit ausgedehnten WF gehören.



Berechnung der Bandstruktur mit stark gebundenen e^-

zeigt, dass Auftreten von Energiebändern nicht an Periodizität

des Gitters gebunden ist. Da nur Nachbaratome Einfluss haben,

lässt sich Rechnung auf amorphe Materialien ausdehnen. $\rightarrow$ Deswegen Bänder auch in nicht-periodischen Strukturen

Überlapp der Bänder möglich $\hookrightarrow$ höhere Orbitale weiter zusammen oder andere Atom sehr nah

Aufspaltung der Atome durch andere Atome... desto weiter, desto mehr Aufspaltung

Energiebänder (Tanz)

Anzahl der Bänder $N \sim$ Anzahl Atome in Zelle $\rightarrow N$ Atome N Bänder bzw. noch mit Orbitalen $\rightarrow$ 1 Band pro Orbital

Durch Spin können Bänder jeweils von $2e^-$ besetzt werden (bzw. p-Band $6e^-$ obwohl das sich je e.g. auf 3 Bänder aufteilt)

Ist ein Band mit einem e^- gefüllt, so können durch anlegen eines E -feldes einige k -Zustände angehoben/abgesenkt werden

$\hookrightarrow$ Unterschiedliches chem. Potential an den Seiten $\rightarrow$ Ungleiches μ an e^- an den Seiten $\rightarrow$ Strom

$\Rightarrow$ Metall (Fermi-Niveau liegt im Band)

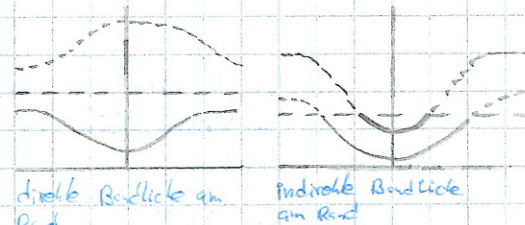
Isolator jeweils $2e^-$ Metall

Bei $2e^-$ pro Elementarzelle z.B. kann ein Band komplett gefüllt werden:

Isolator mit Bandlücke zwischen (chem. Potential bzw. E_F zwischen Bändern) Valenzband (unten)

und Leitungsband (oben) $\rightarrow$ Energie notwendig, um e^- in höheres Band anzuheben

$\rightarrow$ Durch Anlegen Feld kein Strom (Bandisolatoren)



Ist die Bandlücke schmal genug, $\sim kT$ können bei Raumtemperatur durch therm.

Anregung e^- ins höhere Band gelangen $\rightarrow$ Teilweise Leitfähigkeit $\Rightarrow$ Halbleiter

Bei Halbmetallen liegt geringerer Bandüberlapp vor.

In 2D werden durch das period. Potential Zustände in der 1. BZ weg von dem E -kern getrieben (weil da höhere E -niveaus) Rückzug Bereiche niedrigerer Energie.



Mott-Isolator: Auch Monomolekulare Materialien können Isolatoren sein, bisher e^-e^- Interaktion komplett vernachlässigt aber zu machen: Elektronen-Abstoßung extrem stark $\rightarrow$ keine e^- können zwischen Atomen wandern

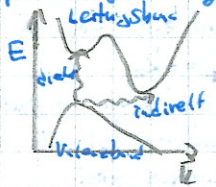
Optische Eigenschaften

Isolatoren können Photonen, dessen Energie kleiner als die Bandlücke ist nicht absorbieren $\rightarrow$ nicht genug Energie, um e^- in höheres Band anzuregen
Ist Bandlücke $> 3,2 \text{ eV}$ ist Material durchsichtig ($\rightarrow$ Sichtbares Licht hat nicht genug Energie) z.B. Diamant
HL können einige sichtbare Photonen absorbieren, andere nicht

Indirekte/Direkte Bandlücke: Liegen das Valenzbandmaximum und das Leitungsbandminimum beim selben k -Wert handelt es sich um eine direkte Bandlücke.

Ist dies nicht der Fall und die Min/Maxima sind nicht beim gleichen k -Wert, so handelt es sich um eine indirekte Bandlücke.

Anregungen über die indirekte Bandlücke sind möglich (durch Photonen) aber seltener aufgrund von Impuls/Energieerhaltung
 $\rightarrow$ Absorption unter Bandlückenabformung möglich aber selten



Metalle etwas komplizierter, da viele überlappende Bänder. Prinzipiell können die vielen Leitungselektronen einfach angeregt werden und emittieren Photonen dem würde $\rightarrow$ Metall glänzend

Bloch-OS-Kontinuum?

Elektronische Transporteigenschaften

Um Teilchen darzustellen nutzt man Wellenpakete ($\rightarrow$ Superposition ebener Wellen)

$$\psi(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} g(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \hbar\vec{k}^2 t / 2m)} \quad \rightarrow \text{Nütze im FK Superposition von Bloch-Wellen}$$

Wellenpaket sollte möglichst kleine k -Unschärfe besitzen, zur Beschreibung innerhalb der 1. BZ

$\Rightarrow$ Ausdehnung des Wellenpaketes wesentlich größer als Gitterabstand a

Die Geschw. des Wellenpaketes ist durch seine Gruppengeschwindigkeit gegeben

$$\vec{v} = \vec{v}_n(\vec{k}) = \frac{1}{\hbar} \nabla_{\vec{k}} E_n(\vec{k}) = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E_n(\vec{k})}{\partial \vec{k}} \quad \Rightarrow \text{„semiklassische Bewegungsgleichung“}$$

Effektive Masse: Dispersionsrelation kann in Minimum/Maximum quadratisch angenähert werden $\rightarrow$ Dispersionsfreies Teilchen

Minimum/Maximum der Bänder interessant, in Minimum (Krümmung positiv) ist die mess positiv und in einem Maximum (Krümmung negativ) ist mess negativ. $m^* = \hbar^2 \left[\frac{\partial^2 E}{\partial k^2} \right]^{-1}$

Stromdichte $\vec{j} = -\frac{e}{V} \sum_{\vec{k}} \vec{v}(\vec{k})$ nur besetzte Zustände tragen zum Stromfluss bei

$$\vec{j} = -\frac{e}{4\pi^3} \int d\vec{k} \vec{v}(\vec{k}) n_F(E(\vec{k})) \quad \rightarrow (\vec{j}=0) \quad \vec{j} = -\frac{e}{4\pi^3} \int_{\text{besetzt}} \vec{v}(\vec{k}) d^3k = \frac{e}{4\pi^3 n} \int_{\text{besetzt}} \nabla_{\vec{k}} E(\vec{k}) \quad (E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \nabla_{\vec{k}} = \frac{\hbar \vec{k}}{m})$$

Bei Kristallen mit Inversionssymmetrie gilt $E(\vec{k}) = E(-\vec{k})$

$$\vec{v}(-\vec{k}) = \frac{1}{\hbar} \nabla_{-\vec{k}} E(-\vec{k}) = -\frac{1}{\hbar} \nabla_{\vec{k}} E(\vec{k}) = -\vec{v}(\vec{k})$$

Elektronen mit entgegengesetzten Wellenvektoren laufen in entgegengesetzte Richtungen. Das Integral nimmt daher den Wert Null an (weil $\vec{v}(-\vec{k}) = -\vec{v}(\vec{k})$).

Legt man ein Feld an, ändert dies nichts an der Argumentation, in diesem Fall werden die Zustände nur unbesetzt. $\rightarrow$ Volle Bänder tragen nicht zum Stromfluss bei

Aufspaltung des $\vec{j}$ -Integrals: Integriere über gesamte BZ und ziehe nicht besetzte Zustände ab

$$\vec{j} = -\frac{e}{4\pi^3} \int_{\text{besetzt}} \vec{v}(\vec{k}) d^3k = -\frac{e}{4\pi^3} \left[\underbrace{\int_{\text{BZ}} \vec{v}(\vec{k}) d^3k}_{=0 \text{ weil voll, somit kein Beitrag!}} - \int_{\text{leer}} \vec{v}(\vec{k}) d^3k \right] = \frac{e}{4\pi^3} \int_{\text{leer}} \vec{v}(\vec{k}) d^3k$$

$\Rightarrow$ Stromtransport erfolgt durch „positive“ Ladungsträger auf leeren, nicht von e^- besetzten Zuständen.

Vorteil: Bei fest gefülltem Band nur Kenntnis über leere Zustände möglich, einfache Rechnung durch Parabel-Näherung

$f(-x) = -f(x)$
 $\rightarrow$ antisymmetrisches Integral

Bloch-Oszillation: Durch $\vec{E}$ -Feld wirkt konstante Kraft auf $\vec{e}$ $\rightarrow$ glm. Bewegung im $\vec{k}$ -Raum

Da sich WF und Energieeigenwert eines Kristallelektrons im $\vec{k}$ -Raum periodisch wiederholen resultiert eine period. Geschwindigkeitsänderung. $\rightarrow$ Im Idealfall stoßfreier Bewegung gibt es in einem unendlich ausgedehnten Kristall keine Gleichstromleitfähigkeit $\rightarrow$ Bei $T=0$ in perfekten Kristall nur Bloch-Oszillationen

Anschaulich: $\vec{e}$ erfahren bei Annäherung an Grenze Bragg-Reflexion $\rightarrow$ Umkehrung Bewegungsrichtung obwohl $\vec{E}$ gleich gerichtet
Aber: In realen Materialien stoßen $\vec{e}$ durch Verunreinigungen sehr viel öfter $\rightarrow$ $\vec{e}$ - $\vec{e}$ müsste vernachlässigt werden ($\rightarrow$ niedrige T)

Leitfähigkeit: Ist Band nicht voll, bewirkt das Anlegen eines Feldes eine Veränderung der Geschwindigkeitsverteilung innerhalb des Bandes. Ohne Stöße würden $\vec{e}$ Bloch-Oszillationen durchführen.

Durch Stöße werden $\vec{e}$ im $\vec{k}$ -Raum verschoben $\rightarrow$ Besetzung nicht mehr symmetrisch $\Rightarrow \vec{j} \neq 0$!

Löcher sind nicht gefüllte $\vec{e}$ Zustände und verhalten sich wie positive Ladungsträger

Wird z.B. ein $\vec{e}$ mit k_n angeregt in ein anderes Band, so hat das resultierende Loch den Wellenvektor

$$k_p = -k_n$$

Die Löcher befinden sich immer an der Oberseite der Bänder, da die $\vec{e}$ immer die niedrigsten Zustände besetzen wollen $\rightarrow$ Ist ein Loch „unter“ einem Elektron, so wechselt das Elektron in diesen leeren Zustand („Loch“), es wird Energie frei

Wird ein Feld angelegt, so werden $\vec{e}$ beschleunigt und es stellt sich nach kurzer Zeit aufgrund von Stößen ein Nichtgleichgewichtszustand ein.

$\Rightarrow$ Die Verteilungsfunktion ändert sich $\rightarrow$ Zeitliche und räumliche Entwicklung durch Boltzmann-Gleichung beschrieben

Elektronenstrom Boltzmann-Gl.

Temperaturabhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit

Leitfähigkeit Kupfer bei tiefen T konstant, fällt dann rasch ab und bei Raumtemperatur $\sim \frac{1}{T}$

Die Relaxationszeit τ der Leitungselektronen wird durch Streuung an Defekten / Gitterschwingungen bestimmt.

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_{\text{Defekte}}} + \frac{1}{\tau(T)_{\text{Gitterschwingung}}}$$

Abweichung vom Poiss. Potential gibt Aufschluss zur Streuung

Elektrischer Widerstand $\rho = \frac{1}{\sigma}$ kann auch aufgespaltet werden

$$\rho = \frac{m}{ne^2\tau} = \rho_0 + \rho_G = \frac{m}{ne^2\tau_0} + \frac{m}{ne^2\tau_G(T)} \quad \text{Matthiessensche Regel}$$

Bei Metallen tritt bei $T \rightarrow 0$ ein temperaturunabhängiger Restwiderstand auf ($\rightarrow$ Streuung an Defekten)
 $\rho(300K) / \rho(4,2K) = 1000 \rightarrow$ Defekte geringe Auswirkung bei reinen Materialien.

Bei hohen T dominiert in reinen Metallen die Streuung der e^- an den Phononen. Die inverse mittlere freie Weglänge steigt mit Phonondichte $n \sim T \Rightarrow \sigma \sim \tau_G(T) \sim T^{-1}$

Bei stark legierten / amorphen Metallen ist Temperaturvariation vergleichsweise schwach: $\frac{\rho(300K)}{\rho(4,2K)} \approx 1$
 $\Rightarrow$ Streuung der e^- an Phononen kaum bemerkbar

Thermische Leitfähigkeit

Bei Raumtemperatur Elektronen verantwortlich, bei sehr tiefen T dominieren ebenfalls die e^- , da die spez. Wärme der $e^- \sim T \rightarrow$ sinkt linear, spez. Wärme des Gitters $\sim T^3$

$\Rightarrow$ Bei tiefen T gibt es mehr e^- als Phononen

Generell: Elektronen / Phononen tragen „Wärmechergie“ in Form von erhöhter E_{kin}?

Bei hohen T nahezu konstant, viele Phononen mit $w_{ph} \rightarrow$ viele e^- streuen an Phononen

$$\Lambda \sim C_V \cdot L \sim T^0 \sim \text{const.}$$

↑
nimmt durch
 e^- Streuung $\sim T^{-1}$
↓
wächst durch
Phononen
 $\sim T$

Thermische Leitfähigkeit der Phononen relativ klein $\rightarrow$ nur in stark erzwungenen Metallen / Legierungen von Relevanz

Halbleiter

Leitfähigkeit zwischen Metallen und Isolatoren. Zum Bsp. Elemente des 4. HG Silizium und Germanium.
 Am Nullpunkt verhalten sich HL wie Isolatoren, Valenzband vollständig besetzt, keine thermische Anregung möglich.
 Bei $T > 0$ werden e^- in das Leitungsband gehoben $\rightarrow$ machen Material leitfähig.
 Durch Dotieren können die Eigenschaften von HL gezielt verändert werden.

Intrinsische Halbleiter

Bandlücke zwische 1 bis 3 eV ca. 1,12 bei Si $E_g = E_L - E_V$
 Die el. Eigenschaften von HL werden vor allem durch Elektronen im Leitungsbandminimum und Löcher im Valenzbandmaximum bestimmt.
 Sowohl e^- als auch Löcher tragen in HL zum Stromtransport bei.
 Bei thermischer Eigenleitung liegt E_F in der Mitte $\rightarrow$ Ausläufer der Fermi-Verteilung reichen nur knapp in die Bänder.

E_F genau in der Mitte weil $p = n$

$\rightarrow$ p/n dotiert $\rightarrow$ misst Hallspannung und schaut nach v_H
 $\Rightarrow$ Unterschied $\text{Löcher}/e^-$

Dotierung

$\sim 1 \text{ Donator} / 10^7 \text{ Atome}$

Unvermeidbare Verunreinigungen bzw. gezielte Dotierung verändern Eigenschaften.
 Zum Beispiel 4-wertiges Si bzw. Ge $\rightarrow$ im Gitter 4 kovalente Bindungen durch sp^3 -Hybridisierung (4 Außenelektronen).
 (Hybridisierung zunächst energetisch ungünstiger, ermöglicht aber gleichzeitige Atombindungen)

z.B. As Arsen?

Hinzufügen eines 5-wertigen Fremdatoms ergibt wieder 4 kovalente Bindungen + ein freies e^-
 Bei Raumtemperatur kann sich dieses e^- vom Atomrumpf trennen $\rightarrow$ Durch delokalisierung bleibt „positiver“ Atomrumpf mit Elektronenwolke um sich herum zurück. $\Rightarrow$ Donatoren, da sie e^- abgeben **N-HL**

z.B. Beryllium

Hinzufügen eines 3-wertigen Fremdatoms ergibt 3 kovalente Bindungen + „Loch“, das fehlende e^- wird abwechselnd den benachbarten Si entzogen $\rightarrow$ scheinbares Kriechen einer positiven Ladung um B-Kern $\Rightarrow$ Akzeptoren, da e^- aufnehmen **P-HL**

Die Bewegung d. e^- bzw. des Loches um das Fremdatom kann mithilfe des Wasserstoffatommodells beschrieben werden, mit effektiver Masse, Dielektrizitätskonstante ϵ ($\rightarrow$ Beschreibt Wirkung Nachbaratome, Abschirmung C-Potentiale)

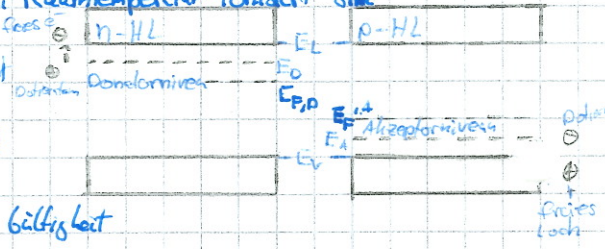
$\rightarrow$ Energieeigenwerte 100 bis 1000 reduziert, Bohr Radius $\cdot 50$ größer $\Rightarrow$ innerhalb Elektronenbahn 1000 Gitteratome

Für $n=1$ erhält man die Ionisierungsenergie, diese ist so klein, dass diese bei Raumtemperatur ionisiert sind

Raumtemperatur:
 Bei p-Dotierten HL gibt es eine erhöhte Lochanzahl: Fermi-Energie verschiebt sich Richtung Grundzustand

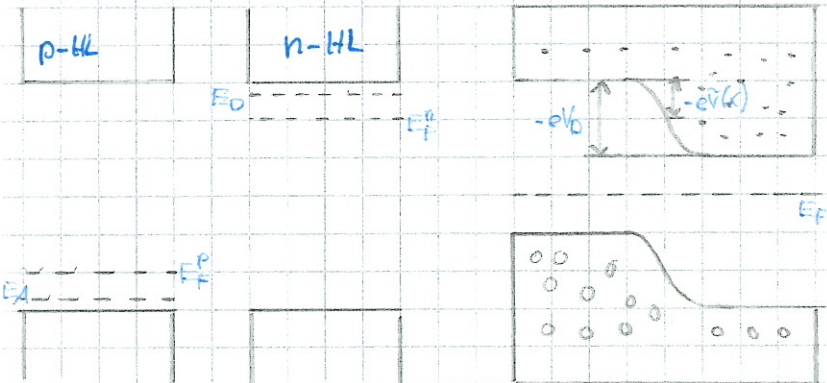
Bei n-Dotierten HL gibt es eine erhöhte e^- -Anzahl: Fermi-Energie verschiebt sich Richtung Leitungsband

Bei sehr hohen T werden viele Ladungsträger thermisch erzeugt $\rightarrow$ Dotierung verliert Gültigkeit



p-n-Übergang

schärfe abrupten Übergang Fermi-Niveaus liegen bei RT auf unterschiedlichen Höhen, bei Kontakt gleichen sich die Fermi-Niveaus an $\rightarrow$ Elektronen diffundieren aus n-Bereich und füllen im p-Bereich die Löcher bzw. umgekehrt
 $\Rightarrow$ Es baut sich eine Spannung auf, welche die chem. Potentiale so gegeneinander verschiebt, dass in der Probe ein einheitlicher Wert besteht $\Rightarrow$ Bandverbiegung $\rightarrow$ Ströme, die Diffusion entgegenwirken



Der Diffusionspotential V_d ist durch die Differenz der ursprünglichen Fermi-Niveaus bestimmt.

$$eV_b = E_F^n - E_F^p = k_B T \ln \left(\frac{n_0 p_A}{n_i^2} \right) \approx E_g$$

Ladungsträger, die sich in vorgg. Gebiet aufhalten:
 e^- bei n, Löcher bei p) Majoritätsladungsträger

In falschen Gebiet $\rightarrow$ Minoritätsladungsträger



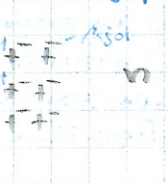
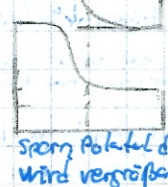
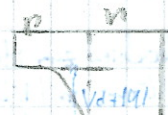
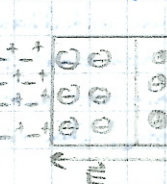
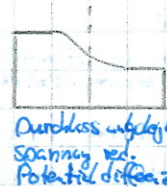
je nach dotierung ist RLZ symmetrisch/asymmetrisch

Diffusionsstrom (Rekombinationsstrom) ist Folge des p-n-Übergangs $\rightarrow$ Ladungsträger rekombinieren nach Durchlaufen der Raumladungszone mit Partnern ($\rightarrow$ Auf anderer Seite in großer Zahl vorhanden)
Der Diffusionsstrom führt zur Diffusionsspannung $\rightarrow$ El.-Feld in der Raumladungszone, welches dem Diffusionsstrom entgegenwirkt. $\Rightarrow$ Gleichgewicht zwischen Gefälde/therm. Bewegung
 $\Rightarrow$ Zone ohne freie Ladungsträger entsteht (Verarmungszone), in der nur noch die ortsfesten Raumladungen der Dotierstoffe verbleiben. Energiegewinn durch Rekombination vs. Aufwandsarbeit zur Gefälde

Unter anlegen einer äußeren Spannung wird die Gleichgewichtsthermodynamik gestört, die angelegte Spannung U fällt in erster Linie in der Raumladungszone ab, die einen großen Widerstand besitzt, da sich in ihr nur wenig freie Ladungsträger aufhalten.

+ Polung p-Seite Durchlass

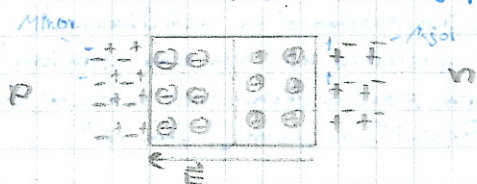
- Polung p-Seite Sperr



Sperrbetrieb: Potentialdifferenz wird erhöht, Raumladungszone verbreitert sich $\rightarrow$ Auch thermisch stark angeregte e^- werden abgebanst
Sperrstrom trotzdem durch Minoritätsträger möglich (Entstehen durch Eigenleitfähigkeit $\rightarrow$ therm. Anregung), $\rightarrow$ können Sperrschicht durchqueren

Durchlassbetrieb: Minuspol n-Seite drückt e^- in RLZ

$\rightarrow$ RLZ wird abgeklart, Stromfluss möglich ab z.B. 0,6V



$\rightarrow$ Dotierungsabhängig

Raumladungskapazität: Mit Raumladungszone Dielektrikum (keine freien Ladungsträger vorhanden) $\rightarrow$ Ränder der RLZ sind kleine Kondensatorplatten $\rightarrow$ Kondensator mit Fläche der RLZ, Dielektrikum und Spannung
Besonders beliebt in Sperrrichtung $\rightarrow$ Bel. einstellbar $\rightarrow$ Varaktor, Varicap

Zener-Durchbruch: In Sperrrichtung kann das Leitungsband ^{so} stark nach unten gedrückt werden, dass es auf demselben Energieniveau liegt wie das Valenzband $\rightarrow$ Elektronen können auf Leitungsband tunneln
 $\rightarrow$ Durchbruch mit hoher Stromstärke, unerwünscht bei HL-Dioden da Zerstörung durch hohe Verlustleistung, hohe Stromstärke $\rightarrow$ Z-Diode dafür ausgelegt (für hohe I)

Solarzelle

Wird ein Photon in einem HL absorbiert, so wird ein e^- - h^+ -Paar erzeugt: Photon „boxt“ e^- aus Valenzband in Leitungsband $\rightarrow$ Loch im Valenzband, e^- im Leitungsband

$\rightarrow$ Photon muss genug Energie haben, um Bandlücke zu überwinden

Geschieht dies außerhalb der RLZ, so Rekombinieren das e^- - h^+ -Paar wieder. Geschieht dies aber innerhalb der RLZ, so werden die beiden Ladungsträger durch das Feld getrennt, bevor sie rekombinieren können.

$\Rightarrow$ Überschuss von e^- auf n-Seite und viele Löcher (=Elektronen abwesend) auf p-Seite. $\rightarrow$ Spannung

BeWert: 1 μ m n-Schicht auf 0,6mm p-Schicht $\rightarrow$ Sonnenlicht soll vorzugsweise an p-n-Übergang absorbiert werden. $\rightarrow$ zur Stromerzeugung einbaufähiges Verbrauchermaterial

Photodiode

Einstrahlung von Licht bewirkt Stromfluss, da bei Absorption eines Photons jeweils ein e^- - h^+ -Paar erzeugt wird ist bei (ausreichender $\rightarrow$ genug für Bandübergang) Wellenlänge der Stromintensität d. Lichts.

$\Rightarrow$ Betrieb in Sperrrichtung, Intensitätsmessung möglich

Leuchtdiode

Im Durchlassbereich rekombinieren Majoritätsträger nach Durchquerung der RLZ. Bei Übergang des e^- von Leitungs- in Valenzband erfolgt die Emission eines Photons. $\rightarrow$ Umkehrung optischer Absorptionsprozess.

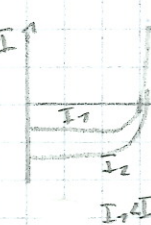
Bei indirekter Bandlücke läuft Rekombination meist strahlungslos ab, da nach Energie an Phononen abgegeben wird.

desto stärker Material dotiert, desto effizienter Rekombination $\rightarrow$ geringe Sperrströme $\rightarrow$ Feld nimmt schnell zu, da sehr viele Träger

$\rightarrow$ RLZ dünn

Rekombination in RLZ?

Verdienen



Ergebnis I von RLZ kaputt?

• Toyok (Supra) Leitung

Leitfähigkeit von Metallen wird durch Stöße der e^- mit Phononen begrenzt, unter $T_c > 0$ verschwindet der el. Widerstand komplett $\rightarrow$ Supraleitung

Meisten Metalle werden Supraleitend, wobei ihre strukturelle Ordnung ohne Bedeutung ist. $\rightarrow$ Es kann sich um reine Kristalle, Legierungen oder amorphe Proben handeln.

Ferromagnetische Elemente bleiben normalleitend.

Unterhalb von T_c wird Material zum idealen Leiter, d. Widerstand verschwindet ($\rightarrow$ Ströme können quasi "unendlich" lange durchfließen)

Meißner-Effekt: Supraleiter bleibt bei B -Feld feldfrei durch Abschirmströme im Inneren, welche B -Feld entgegenwirken $\rightarrow$ Idealer Diamagnet

Unterschied zum idealen Leiter: wird B -Feld vor Phasenübergang eingelegt, so bleibt dieser nicht feldfrei

Erläuterung mithilfe der Ginzburg-Landau Theorie von Phasenübergängen ($\rightarrow$ Ordnungssparameter)

$\Rightarrow$ Higgs-Mechanismus

Hier wird die Eichsymmetrie der EHM-Potentiale gebrochen, weil im Supraleiter bei der WF der Cooper-Paare eine Phase ausgezeichnet ist $\Rightarrow$ Photon hat in Supraleitern Masse, da exp. schlüssig im Inneren

Mikroskopische Beschreibung durch Cooper-Paare (BCS-Theorie)

Bei Normalleitern erlaubt das Anregungsspektrum von e^- den Transfer von beliebigen kleinen Energien zwischen e^- und Gitter(Phononen).

Bei Supraleitern wird von einer effektiven W zwischen den e^- ausgegangen

$\Rightarrow$ Grundzustand d. Fermi-See nicht mehr stabil, weil Energie der beiden e^- abgesenkt wird, indem nicht mehr auf Fermi-Fläche sondern "tauchen ein"

$T > T_c$		$T < T_c$		
				il. Leiter
				Supraleiter
$B=0$	$B \neq 0$	$B=0$	$B \neq 0$	

Aber eigentlich C-Abstoßung zwischen e^- ? e^- flücht durch Gitter, im Kielwasser ($\rightarrow$ dahinter) bildet sich eine positive Ladungswelle, da das e^- im Vorbeiflug die positiven Ladungsträger quert

Da die Reaktion der Gitterpunkte um $1/4$ Periode verzögert ist sind wechselwirkende e^- rel. weit voneinander entfernt und e^- sieht eher Ladungswelle als anderes e^-

Wechselwirkung erfolgt durch virtuellen Phononen (Austausch $\rightarrow$ Gitterschwingung), die Energie der Cooper-Paare wird durch die W reduziert $\Rightarrow$ BCS-Grundzustand

$\rightarrow$ Gitterdefekte leiten nicht Supra, da deren e^- nur schwach an die Phononen koppeln

WF des Lösungsansatz ist symmetrisch, da GesamtWF Antisymmetrisch ist, muss der Spinanteil antisymmetrisch sein.

$\Rightarrow$ Spins entgegen gerichtet $\Rightarrow$ Gesamtspin $s=0$ $\rightarrow$ Cooper-Paare verhalten sich wie Bosonen

$\Rightarrow$ Beschreibung mithilfe der Bose-Statistik $\rightarrow$ Mikroskopische Beschreibung des Grundzustands

Ausbilden eines kohärenten Zustands, bei dem sich die Paare mit der gleichen Geschwindigkeit in die gleiche Richtung streng zueinander gekoppelt bewegen

Die Ausdehnung der Cooper-Paare ist sehr groß 100 bis 1000 nm $\rightarrow$ Erstreckt sich über viele Gitteratome

$\rightarrow$ Josephson-Effekt, 2 schwach miteinander gekoppelte WF ($\sim i 0,1$ bis $1 \mu m$)

$\Rightarrow$ Elektrischer Strom in Supraleitern wird von C-Paaren und nicht von einzelnen e^- getragen

Durch große Ausdehnung der C-Paare können diese durch dünne nicht-supraleitende Barrieren zwischen 2 Supraleitern hindurch tunneln $\rightarrow$ Josephson-Kontakt, verhält sich weiterhin wie ein Supraleiter ohne Unterbrechungen

$\rightarrow$ SQUID, präzise Messung extrem geringer Magnetfeldänderung

London-Gleichungen beschreiben cyclische Eindringung des Magnetfeldes beim Supraleiter

Typ II-Supraleiter: Eindringen vom Magnetfeld möglich, erfolgt in Form sog. Flussquanten im Material

$\rightarrow$ Bsp. Perlitium Hochtemperatursupraleiter-Schichten

Erregung Cooper-Grundzustand vs. Fermi-Niveau

Magnetismus basics

Bei FK abh. von Spin/Bahndrehimpuls der e^- . $\vec{O} = \mu_B (\vec{H} + \vec{A})$

Bethelet/kern-Querschnitt

- Diamagnetismus: Äußeres Feld wird durch innen induziertes Gegenfeld geschwächt
→ Bei Einschalten eines Feldes wird nach Lenz' Regel Strom induziert, welcher der Änderung entgegenwirkt $\Rightarrow$ Mg. Moment welches $\vec{B}$ -Feld ($\vec{H}$) entgegengerichtet ist
→ Landa-Diamagnetismus bei FK Felden 1/3 Pauli-Paramagnetismus

Paramagnetismus: Probe enthält mag. Dipolmomente $\rightarrow$ Atome/Moleküle mit ungerader e^- -Zahl oder teilweise gefüllten inneren Schalen.

Mg. Moment μ setzt sich aus Spin/Bahndrehmomenten zusammen $\rightarrow$ Landé-Faktor

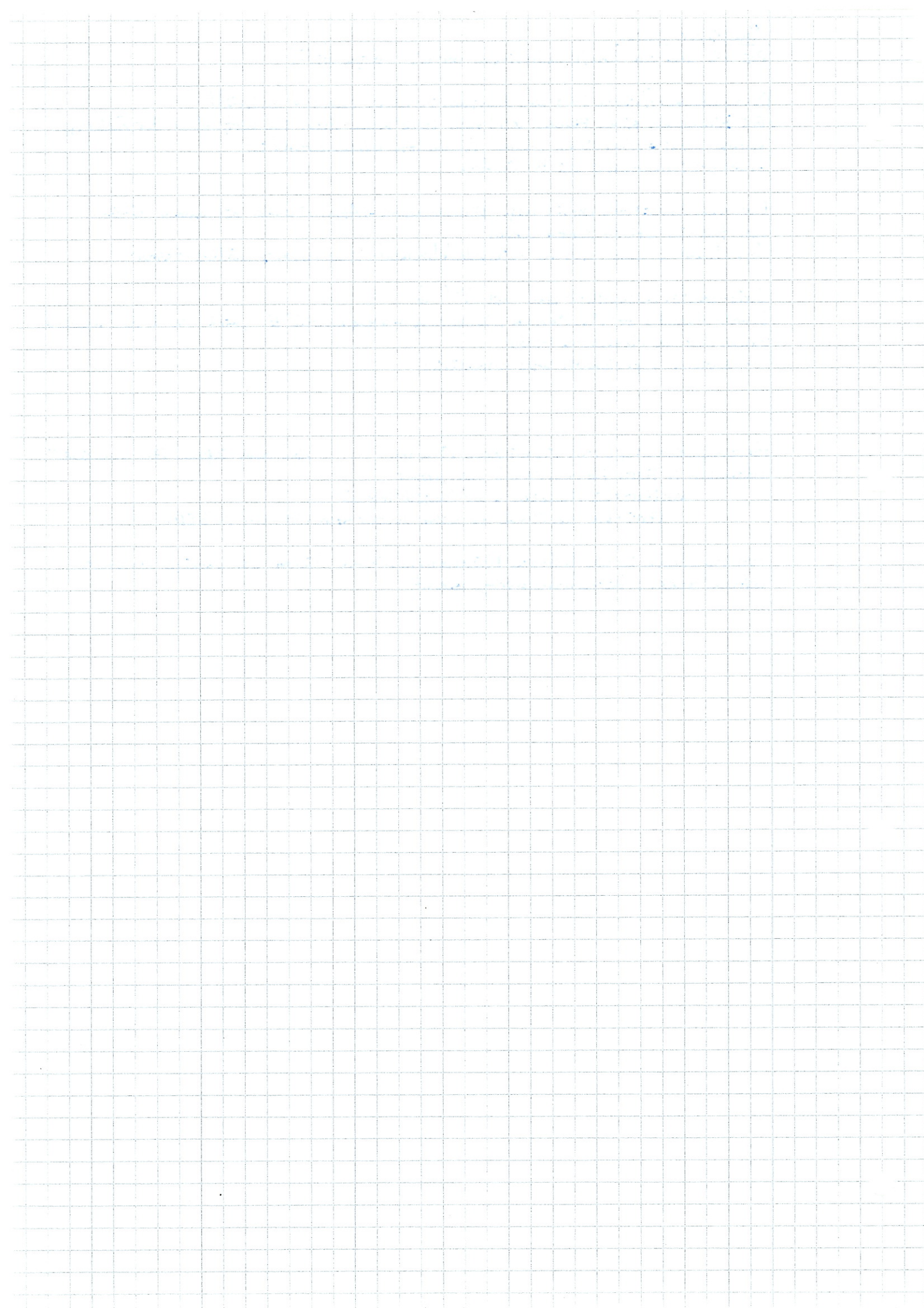
Curie-Gesetz: Suszeptibilität nimmt mit T^{-1} ab $\rightarrow$ thermische Unordnung
beinhaltet: Ausrichtung der Mg. Momente, Magnetisierung $\sim$ angelegtem Feld H , wird das H -Feld abgeschaltet verschwindet die Magnetisierung wieder
Wz zwischen Mg. Momenten wird vernachlässigt

Ferromagnetismus: Spontane Magnetisierung $M_s \rightarrow$ mag. Momente sind ohne äußeres Feld ausgerichtet
Unterscheidung in Ferro: Alle mag. Momente gleich gerichtet $\uparrow\uparrow\uparrow$

anti Ferro: Die Magnetisierung der Untergitter hebt sich auf $\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow$

Ferri: Die mag. Momente der beiden Untergitter unterscheiden sich in Größe $\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow$

Ferromagnetismus ist ein kollektives Phänomen, mag. Momente können nicht unabhängig voneinander betrachtet werden $\rightarrow$ Austauschwechselwirkung relevant



Schrödinger-Mill

$$E = \hbar \omega \quad \lambda = \frac{h}{p} \quad \vec{k} = \frac{\vec{p}}{\hbar}$$

$$E = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow \hbar \omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$\omega = \frac{\hbar}{2m} k^2$$

$$\text{Optik: } \omega = c_n k = \frac{c}{n(\omega)} k$$

Dispersion $\omega = f(k)$

$$v_{\text{phase}} = \frac{\omega}{k}$$

$v_g = \frac{d\omega}{dk}$ "Geschwindigkeit d. Wellenpakets"

ist v. Phase konstant, keine Dispersion (Abh. der phys. Größe n. der Frequenz)

Für 1D-Wellen $\phi = A e^{-i\omega t + i k x}$

mit $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$E = \hbar \omega$$

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

$$\psi = A e^{-\frac{iE}{\hbar} t + \frac{i p}{\hbar} x} \quad (1)$$

Ständiges Problem $\psi(x,t) = \psi(x) e^{-i\omega t} = A e^{i k x} e^{-i\omega t}$

$$\partial_x^2 \psi = -k^2 \psi = -\frac{2m}{\hbar^2} E_{\text{kin}} \psi \quad (2)$$

$$\partial_t^2 \psi = -\omega^2 \psi$$

Klassik: $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

2. kan. imaginärer Anteil, keine Dispersion? einfache Zeitabhängigkeit weil reell kan. imaginärer Anteil?

(1) nach ∂_t $\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} E_{\text{kin}} \cdot \psi$

für $v=0$ $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} = i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$ mit (2)

imaginäre Anteil kommt von einfacher Zeitabhängigkeit?

Forderung: Wellengl. 1. Ordnung in der Zeit

Wenn? Dort ist eine Aufgabe, die zeitunabhängig ist, aber wie? Mit komplexen Zahlen. Warum?

+ Quadratische Dispersionsrelation $\Rightarrow$ De-Broglie $\omega_L + \hbar \omega$

Zeitabh. z.unch. WF aufteilen

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi = i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

stat. $(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V) \psi = E \psi$

Messung von $|\psi|^2$, ψ nicht messbar! Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung

Messbedingung

Hund'sche Regel Algorithmen

v_g -Bewegung der Hüllkurve eines Wellenpakets

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

v_{ph} -Bewegung eines Punktes auf der Welle

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k}$$

- 1) Hohlraumstrahlung
- 2) Photoeffekt
- 3) Comptoneffekt
- 4) Absorption/Emission
- 5) FHV
- 6) e-Bewegung

$$E = \hbar \omega$$

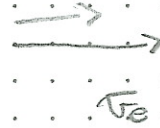
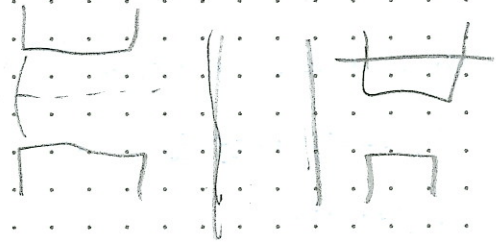
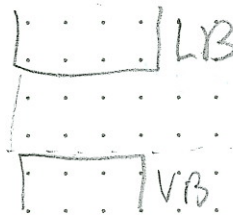
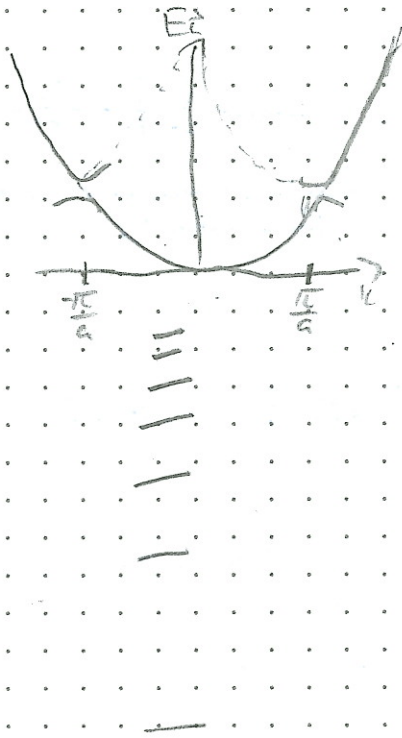
$$\vec{p} = \hbar \vec{k}$$

$$\lambda_e = \frac{h}{p}$$

$$\hbar \Delta \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi$$

$$\psi(\vec{r}) = u(\vec{r}) \cdot e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

$$\psi(\vec{r} \rightarrow \vec{R})$$



$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$