Wechselstromleitfähigkeit von Metallen im Drudemodell

Bewegungsgleichung für freie Elektronen

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{p}{\tau} - e\underline{E} \quad \text{mit} \quad \underline{E}(t) = \mathrm{Re}\left(\underline{E}(\omega)e^{-i\omega t}\right)$$

Lösungsansatz $\quad p(t) = \mathrm{Re}\left(p(\omega)e^{-i\omega t}\right)$

$$-i\omega p(\omega) = -\frac{p(\omega)}{\tau} - e\underline{E}(\omega)$$

$$\underline{j}(\omega) = -\frac{ne\,p(\omega)}{m} = \frac{ne^2}{m}\frac{\underline{E}(\omega)}{\frac{1}{\tau} - i\omega}$$

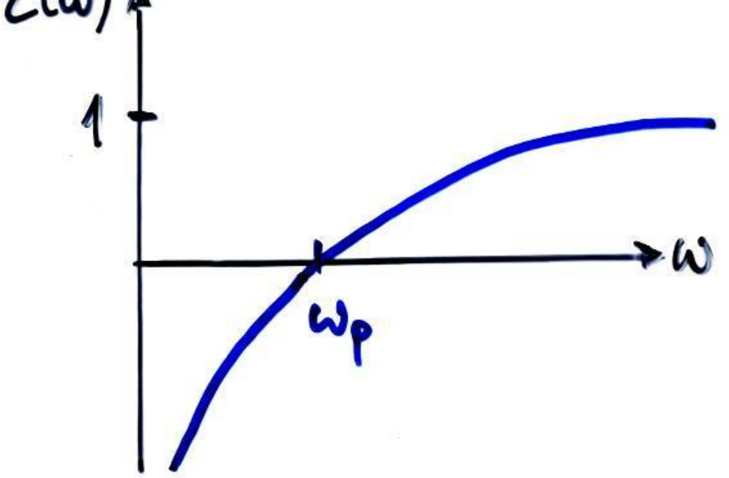
$$\Rightarrow \quad \boxed{\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau}} \quad \text{mit} \quad \sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}$$

Maxwell-Gleichungen mit $\lambda \gg l$ $\Rightarrow$ Wellengleichung

$$-\nabla^2\underline{E} = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega)\underline{E} \qquad \boxed{\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{i\sigma(\omega)}{\varepsilon_0\omega}}$$

Falls $\omega\tau \gg 1$: $\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ mit $\omega_p^2 = \frac{ne^2}{\varepsilon_0 m}$

Plasmafrequenz



$\Rightarrow$ Dispersionsrelation

$$\omega = \frac{kc}{\sqrt{\varepsilon(\omega)}}$$

„Plasmon"

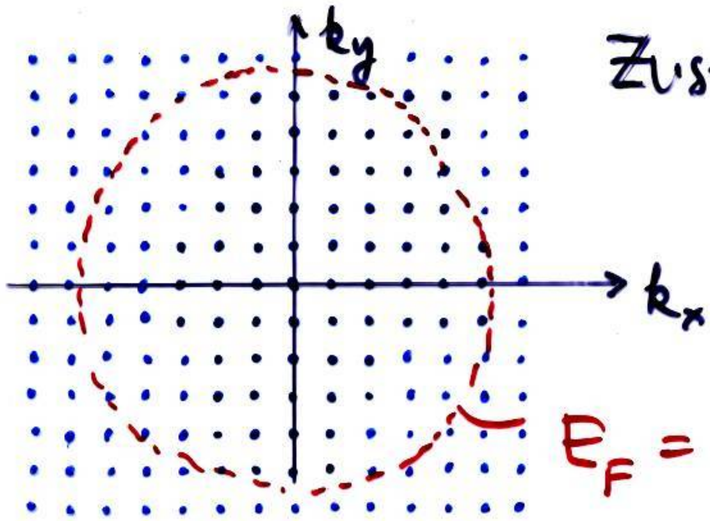
Sommerfeld-Modell des freien Elektronengases

Potentialkasten, 1-El-Wfkt:

$$\psi_{\underline{k}}(\underline{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}}\, e^{i\underline{k}\,\underline{r}}$$ ebene Wellen

Period. Randbed: $k_x = \frac{2\pi n_x}{L}$, $k_y = \frac{2\pi n_y}{L}$, $k_z = \frac{2\pi n_z}{L}$

diskrete k-Werte



Zustandsdichte im k-Raum

$$Z(k) = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 = \frac{V}{8\pi^3}$$

$$E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}$$

<u>Grundzustand</u>: Sukzessives Auffüllen der erlaubten k-Zustände mit N Elektronen

$$k_F = (3\pi^2 n)^{1/3}$$

<u>Zustandsdichte</u>:

$$D(E) = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} E^{1/2}$$

$$D(E_F) = \frac{m k_F}{\hbar^2 \pi^2} = \frac{3}{2}\,\frac{n}{E_F}$$

<u>1-Elektron-Anregungen</u>: Fermi-Dirac-Verteilung

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/kT} + 1}$$

Sommerfeld-Entwicklung

Integrale der Form $\int_0^\infty H(E) f(E)\, dE$

T=0 ist einfach: $\lim_{T\to 0} \int_0^\infty H(E) f(E)\, dE = \int_0^{E_F} H(E)\, dE$

T>0: Abweichung des Integrals vom Wert bei T=0 hängt nur davon ab, wie H(E) im Bereich kT um $E=\mu$ verläuft.

Taylorentwicklung um $E=\mu$:

$$H(E) = H(\mu) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left.\frac{d^n H(E)}{dE^n}\right|_{E=\mu} (E-\mu)^n$$

Rechnung (z.B. Ashcroft-Mermin, Anhang C):

$$\boxed{\int_0^\infty H(E) f(E)\, dE = \int_0^\mu H(E)\, dE + \sum_{n=1}^{\infty} (kT)^{2n} a_n \left.\frac{d^{2n-1} H(E)}{dE^{2n-1}}\right|_{E=\mu}}$$

mit Koeffizienten a_n: $a_1 = \frac{\pi^2}{6}$, $a_2 = \frac{7\pi^4}{360}$ usw.

allg: $a_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \left(-\frac{d}{dx} \frac{1}{e^x+1}\right) dx$

Für innere Energiedichte u und Elektronendichte n nur 1. Term mitnehmen:

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \int_0^\mu E\, D(E)\, dE + \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 \left(\mu D'(\mu) + D(\mu)\right) \\ n &= \int_0^\mu D(E)\, dE + \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 D'(\mu) \end{aligned}}$$

Sommerfeld-Entwicklung für innere Energie und Teilchenzahldichte

Für $kT \ll \mu$ lineare Näherung:

$$u = \int_0^{E_F} E\, D(E)\, dE + \underbrace{E_F(\mu - E_F) D(E_F)}_{= \int_{E_F}^{\mu} E\, D(E)\, dE} + E_F \frac{\pi^2}{6}(kT)^2 D'(E_F) + \frac{\pi^2}{6}(kT)^2 D(E_F) + \ldots$$

$$n = \underbrace{\int_0^{E_F} D(E)\, dE}_{= n \text{ für } T=0} + \underbrace{\left[(\mu - E_F) D(E_F) + \frac{\pi^2}{6}(kT)^2 D'(E_F)\right]}_{=0} + \ldots$$

da n unabhängig von T!

$$u = \underbrace{\int_0^{E_F} E\, D(E)\, dE}_{= u_0} + \underbrace{\frac{\pi^2}{6}(kT)^2 \cdot D(E_F)}_{\text{therm. Energiedichte bei konstanter Elektronendichte}}$$

$$\boxed{c_v = \left.\frac{\partial u}{\partial T}\right|_n \approx \frac{\pi^2}{3} k^2 D(E_F) \cdot T = \gamma T}$$

$kT \ll \mu$

Sommerfeldkonstante