Ex5-Klausur vom 15.03.2012

Aufgabe 1: Beugung

Betrachten Sie eine lineare Atomfolge ABABA...AB mit einer Bindungslänge A-B gleich $\frac{a}{2}$. Die Formfaktoren der Atome A, B seien f_a und f_b. Der einfallende Röntgenstrahl steht senkrecht auf der Atomkette. Zeigen Sie, dass die Intensität des gebeugten Strahls

a) für ungerade Beugungsordnung proportional zu $|f_a - f_b|^2$

b) für gerade n proportional zu $|f_a + f_b|^2$ ist.

Aufgabe 2: Phononen

Wir betrachten eine 1-dimensionale Kette von Atomen der selben Sorte. Die Schallgeschwindigkeiten für longitudinale und transversale Phononen sind gleich v_s.

a) Berechnen Sie die Phonendispersion.

b) Wie verhält sich die Wärmekapazität näherungsweise bei tiefen und hohen Temperaturen?

Hinweise:

$$c_V = \frac{1}{V}\frac{\partial U}{\partial T}, \qquad U = \sum_{k\text{-modes}} \hbar\omega_k \left(\frac{1}{2} + \langle n_k \rangle\right), \qquad \int_0^\infty \frac{x\mathrm{d}x}{e^x - 1} = \frac{\pi^2}{4}$$

Aufgabe 3: Das freie Elektronengas

Es ist bekannt, dass Wasserstoff ein sehr nützliches Modellsystem in der Physik darstellt. Fester Wasserstoff bei niedriger Temperatur und Normaldruck ist ein Dielektrikum. Wasserstoff würde ein Metall werden, wenn seine Fermi-Energie vergleichbar mit der Ionisierungsenergie 14 eV wäre. Um metallischen Wasserstoff herzustellen, muss man einen sehr hohen Druck und tiefe Temperatur anwenden.

Schätzen Sie den Druck ab, der auf eine Wasserstoffprobe angewendet werden muss. Beachten Sie, dass der Beitrag des Elektronengases zum Kompressionsmodul des metallischen Wasserstoffs der dominante Beitrag ist. Um die Abschätzung vorzunehmen, befolgen Sie diese Schritte:

a) Berechnen Sie die mittlere kinetische Energie eines 3D-Fermigases: $U_0 = N\langle E \rangle$
Hinweis:

$$\langle E \rangle = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\int_0^{k_F} k^2 \mathrm{d}^3 k}{\int_0^{k_F} \mathrm{d}^3 k}, \qquad \mathrm{d}^3 k = 4\pi k^2 \mathrm{d}k$$

b) Berechnen Sie den Druck des freien Fermi-Gases. Benutzen Sie $P = -\frac{\partial U_0}{\partial V}$

Aufgabe 4: Hall-Effekt

Aufgabe 5: Magnetische Flussquantisierung und Supraleitung

Wir betrachten einen normalleitenden metallischen Ring mit Durchmesser d. Die Fermi-Geschwindigkeit in Metall beträgt $2 \cdot 10^6 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

a) Welche magnetische Flussquantisierung erwarten Sie im Normalleiter im Vergleich zu einem Supraleiter für den Fall, dass die Stoßzeit $\tau_\varphi \to \infty$ ist.

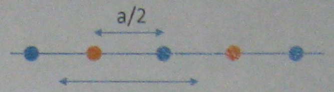
b) Wie klein muss der Ring sein, um Flussquantisierung beobachten zu können, wenn die Stoßzeit $\tau_\varphi = 10^{-11}\mathrm{s}$ ist?

Klausur 1 zur Moderne Experimentelle Physik II (15.03.2012)

1. Beugung

The scattering amplitude, diffraction condition is satisfied :

$$S_G = \sum_j f_j e^{-i\vec{G}\cdot\vec{r}_j} = f_A + f_B e^{-i\vec{G}\cdot\vec{r}_B}$$



Lattice constant: *a*,
m is the diffraction order

$$\vec{G} = m\frac{2\pi}{a}\vec{x}\,, \qquad r_B = \frac{a}{2}\cdot\vec{x}$$

$$\vec{G}\cdot\vec{r}_B = m\frac{2\pi}{a}\frac{a}{2}\vec{x}\cdot\vec{x} = m\pi$$

$$S_G = f_A + f_B e^{-i\pi m}$$

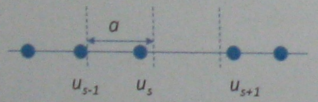
Scattering intensity:

$$I(\vec{k}) \sim |S_G|^2 \cdot \left|\delta(\vec{k}-\vec{G})\right|^2$$

m = 0,2,4, … $\quad |f_A + f_B|^2$

m = 1,3,5, … $\quad |f_A - f_B|^2$

2a. Phononen



$$F = C(u_{s+1}-u_s) + C(u_{s-1}-u_s)$$

$$m\ddot{u}_s = C(u_{s+1}+u_{s-1}-2u_s)$$

m is mass of the atom, and u_s its displacement from equilibrium position. *C* is a constant of an "effective spring".

Ansatz: $\ddot{u}_s = -\omega^2 u_s\ ,\ u_s = u_0 e^{isKa}$

$$\omega^2 = 2\omega_0^2(1-\cos Ka),\ \omega_0 = \sqrt{C/m}$$

$$\omega = \omega_0\sqrt{2(1-\cos Ka)}$$

$$\omega = 2\omega_0\left|\sin\tfrac{Ka}{2}\right|, \qquad \upsilon_s = d\omega/dk = \omega_0/k$$

$$\omega(k) = \frac{4\pi\upsilon_s}{a}\left|\sin\tfrac{Ka}{2}\right|$$

2b. Phononen

$$c_V = \frac{1}{V}\frac{\partial U}{\partial T}, \qquad U = \sum_{k\text{-modes}} \hbar\omega_k\left(1/2 + \langle n_k\rangle\right)$$

We neglect zero-point energy, because of it does not contribute to heat capacity

$$U = \sum_{k\text{-modes}} \hbar\omega_k\langle n_k\rangle = \int_0^{\omega_D}\hbar\omega\frac{D(\omega)}{e^{\hbar\omega/k_BT}-1}d\omega \qquad D(\omega)d\omega = D(k)dk \qquad dk/d\omega = 1/\vartheta_s$$

1D linear chain, including 2 polarization of phonons $D(k)=3L/2\pi$, $3N=k_DL/\pi$

$$U = \left(\frac{k_BT}{\hbar}\right)^2\frac{3L}{\pi c}\int_0^{x_D}\frac{x\,dx}{e^x-1}\ ,\ x_D = \frac{\hbar\omega_D}{k_BT}$$

High Temperature

$$k_BT \gg \hbar\omega_D \to x_D \approx 0$$

$$U = 3Nk_BT \qquad c_V = 3nk_B$$

Low Temperature

$$k_BT \ll \hbar\omega_D \to x_D = \infty$$

$$U = \frac{3\pi}{8}N\frac{(k_BT)^2}{\hbar\omega_D} \qquad c_V = \frac{3\pi}{4}\frac{k_BT}{\hbar\omega_D}nk_B$$

3. Fermi Gas

a) Calculate the mean kinetic energy

4. Hall Effect

$$n = \frac{1}{R_He} \qquad R = \frac{E_H}{jB} \qquad n = \frac{jB}{E_He}$$

3. Fermi Gas

a) Calculate the mean kinetic energy

$$E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \qquad U = \frac{\int \frac{\hbar^2 k^2}{2m} d^3k}{\int d^3k} = \frac{3}{5}\frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} = \frac{3}{5}E_F, \quad d^3k = 4\pi k^2 dk, \qquad U_0 = \frac{3}{5}NE_F$$

b) Calculate the pressure

$$P = -\frac{\partial U_0}{\partial V} = \frac{2}{3}\frac{U_0}{V} = \frac{2}{5}nE_F \qquad E_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left[3\pi^2 \frac{N}{V}\right]^{2/3}$$

By knowing the Fermi energy of 14 eV , we can estimate electron concentration: $n = 2.34 \times 10^{29}\ m^{-3}$

The pressure of the Fermi gas at such concentration P ~ 2.1×10^{11} Pa

To reach a metal phase the hydrogen sample has to be squeezed with at least 210 GPa or 2.1 MBar (about sapphire bulk modulus)

4. Hall Effect

$$n = \frac{1}{R_H e} \qquad R = \frac{E_H}{jB} \qquad n = \frac{jB}{E_H e}$$

$$\tau = \frac{m\sigma}{ne^2}$$

a) $n = 3 \times 10^{15}\ cm^{-3}$, positive charges or holes

b) Stoss zeit = 1.75 ps

5. Flux quantization

a) The flux quantization is associated with the formation of the standing wave. The coherence length of the electron wave-function can be considered as infinite due to the lack of collision and dephasing. In normal metals charge is carried by a single electron, rather then by a Copper pair. Therefore in ideal metallic ring the flux quantum will be doubled with comparison to SC flux quantum.

$$\Phi_N = \frac{h}{e}$$

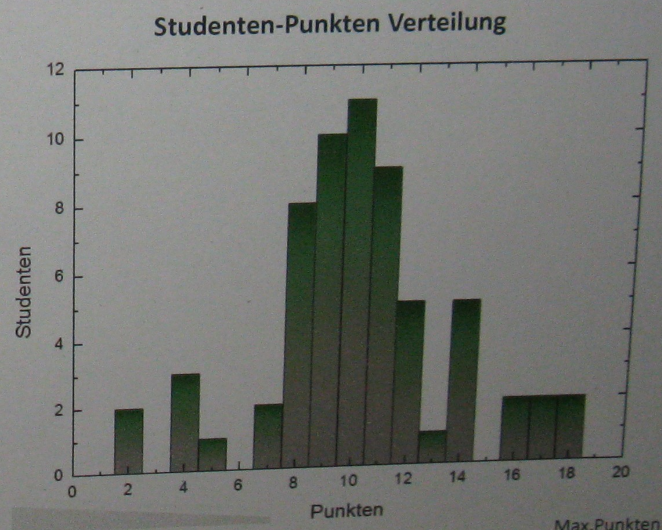
b) The collisions of electrons with the lattice result in distortion of the phase of a particle wave-function :

$$\psi = \sqrt{n_e}\, e^{i\theta(r)}$$

The length of the ring *L* should not exceed the coherence length of the electron wave-function, i.e. the characteristic length, where the phase remains unchanged.

$$L < \upsilon_F \cdot \tau \qquad d < \upsilon_F \cdot \tau / \pi$$

Fermi velocity is about 2×10^6 m/s that gives the circumference of the ring $L < 20\ \mu m$ corresponding to its diameter $d < 6\ \mu m$



Max.Punkten = 20