3. Elektronen im Metall: Drude Theorie

- J.J. Thomson entdeckte 1896 das Elektron
- Metalle haben freie Elektronen (später studieren wir warum)

Wie bewegen sich Elektronen im FK?

- 1900, Paul Drude benutzte die Boltzmann's kinetische Theorie für Gase, um e^--Transport im Metallen zu verstehen

Annahmen

1. Elektronen streuen mit einer Wahrscheinlichkeit $\frac{dt}{\tau}$ im Zeitinterval dt
2. nach der Streuung $\vec{p} = \vec{0}$ (Impuls = Null)
3. Zwischen Streuungen reagiert das Elektron auf $\vec{E}$ und $\vec{B}$-Felder

Impulsgleichung

$$\vec{p}(t+dt) = \underbrace{\left(1 - \frac{dt}{\tau}\right)}_{\text{Nicht-Streu-Wahrscheinlichkeit}} \left(\vec{p}(t) + \vec{F}\,dt\right) + \vec{0}\,\frac{dt}{\tau}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} - \frac{\vec{p}}{\tau}} \qquad (3.1)$$

Lorentz kraft

$$\vec{F} = -e\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

- Der Term $-\frac{\vec{p}}{\tau}$ ist wie eine "Bremskraft"
- für $\vec{F} = 0$

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_{initial}\, e^{-t/\tau}$$

3.1 Elektronen im $\vec{E}$ und $\vec{B}$ - Feldern

3.1.1 für $\vec{B} = 0$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{\vec{p}}{\tau}$$

- im Gleichgewicht: $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \vec{p} = m\vec{v} = -e\tau\vec{E}$

- elektrische Stromdichte

$$\vec{j} = -en\vec{v} = \frac{e^2\tau n}{m}\vec{E}$$

n: Elektronendichte im Metall

- elektrische Leitfähigkeit σ

$$\boxed{\sigma = \frac{e^2\tau n}{m}} \quad (3.2) \qquad \vec{j} = \sigma\vec{E}$$

3.1.2 für $\vec{B} \neq 0$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -e\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right) - \frac{\vec{p}}{\tau}$$

- im Gleichgewicht: $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$

mit $\vec{p} = m\vec{v}$, $\vec{j} = -ne\vec{v}$

$$0 = -e\vec{E} + \frac{\vec{j}\times\vec{B}}{n} + \frac{m}{ne\tau}\vec{j}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{1}{en}\, j\times\vec{B} + \frac{m}{ne^2\tau}\vec{j}$$

definiere eine 3×3 Widerstandsmatrix $\underline{\underline{\rho}}$

$$\vec{E} = \underline{\underline{\rho}}\,\vec{j} \qquad (U = R\cdot I)$$

$\vec{B} \parallel \vec{z}$

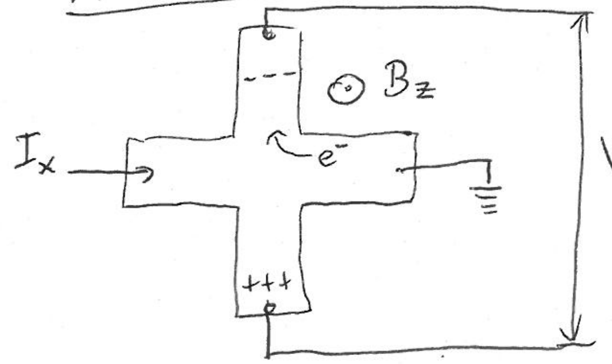
$$\rho_{xx} = \rho_{yy} = \rho_{zz} = \frac{m}{ne^2\tau} \qquad \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{yx} & 0 \\ \rho_{xy} & \rho_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{zz} \end{pmatrix}$$

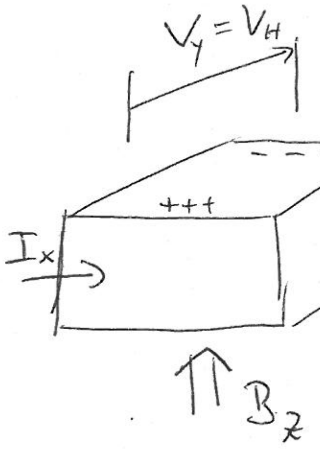
$$\rho_{xy} = -\rho_{yx} = \frac{B}{ne}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{ne} = \text{Hall-Widerstand} = R_H$$

(1879)

Hall-Kreuz





$$R_H = -\frac{1}{ne}$$

Material	$n = -\frac{1}{eR_H}$ / [Atomdichte] = Freien Elektronen	Valenz
Li	0,8	1
Na	1,2	1
K	1,1	1
Cu	1,5	1
Be	-0,2	2
Mg	-0,4	2

- Wir brauchen Bandstruktur Theorie um dies zu erklären
- Drude-Modell ist sehr gut für Halbleiter
- mit dem Hall-Effekt kann man die Streuzeit τ bestimmen $\Rightarrow$ $\tau \approx 10^{-14}$ s bei 300 K

3.2. Wärmetransport

- in Metallen wird die Wärme haupsächlich durch e^- transportiert (Phononen - Warmetransport klein)
- thermische Leitfähigkeit ist definiert durch

$$\vec{j}_q = K \vec{\nabla} T \qquad \vec{j}_q : \text{Wärmestrom}$$

$\vec{\nabla} T$: Temperaturgradient

- aus Boltzmann's kinetischer Theorie folgt für die thermische Leitfähigkeit (Gase)

$$(3.3) \qquad K = \underbrace{\frac{1}{3}}_{\uparrow \text{geometrischer Faktor}} n \, c_v \langle v \rangle \lambda$$

n: e^--dichte

c_v: spez. Wärme pro Atom

$\langle v \rangle$: mittlere thermische Geschwindigkeit

$\lambda = \langle v \rangle \tau$: mittlere Streulänge

"die Elektronendichte n trägt die Wärme $c_v T$ mit der Geschwindigkeit $\langle v \rangle$ für eine Distanz λ"

- für idealer Gas $\quad c_v = \frac{3}{2} k_B$ pro Atom

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8 k_B T}{\pi m}}$$

- Annahme: dies gilt för e^-

$$\Rightarrow K = \frac{4}{\pi} \frac{n \tau k_B^2 T}{m}$$

- Um die unbekannte Streuzahl τ zu eliminieren

Lorenz-Zahl $\quad L = \frac{K}{T \sigma} = \frac{4}{\pi} \frac{k_B^2}{e^2} \approx 0.94 \cdot 10^{-8} \frac{W\Omega}{K^2}$

↑ (Eq. 3.2) $\quad \sigma = \frac{e^2 \tau n}{m}$

- kleine Korrektur: kinetische Theorie $c_V T = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle$

  $\Rightarrow$ wir sollten $\langle v \rangle^2$ mit $\langle v^2 \rangle$ ersetzen

$$\Rightarrow L = \frac{\kappa}{\sigma T} = \frac{3}{2}\left(\frac{k_B}{e}\right)^2 \approx 1{,}1 \cdot 10^{-8} \frac{W\Omega}{K^2}$$

- war großer Erfolg, da nahe am empirischen Wiedermann-Franz Gesetz (1853)

$$L \approx 2{,}1 - 2{,}9 \cdot 10^{-8}\, W\Omega/K^2$$ für viele Metalle und T

- Drudes Rechnung ist aber ganz verkehrt für Metalle
  - zwei Fehler heben sich auf: die spez. Wärme der e^- ist viel kleiner aber die Geschwindigkeit ist viel größer

ideales Gas

$$c_V = \frac{3}{2} k_B$$ aber im Festkörper: $$C = \gamma T + \underbrace{\alpha T^3}_{\text{Debye}}$$

$$\gamma T \ll \frac{3}{2} k_B \quad \text{für } T < 10^4 K$$

3.3 Peltier-Effekt

beim Peltier-Effekt sieht man das Problem noch besser

$$\vec{j}_q = \Pi \vec{j}$$

Π: Peltier Koeffizient

$\vec{j}_q$: Wärmestromdichte

$\vec{j}$: Elektronstromdichte

Wärmetransporttheorie

$$\vec{j}_q = \frac{1}{3} c_V T n \vec{v}$$

$c_V T$: Wärme transportiert bei einem e^-

n : e^--Dichte

mit $c_V = \frac{3}{2} k_B$ pro e^-

und $\vec{j} = -en\vec{v}$ $$\Rightarrow \Pi = -\frac{c_V T}{3e} = -\frac{k_B T}{2e}$$

Seebeck Koeffizient

$$S = \frac{\Pi}{T} = -\frac{k_B}{2e} = -4.3 \cdot 10^{-4}\ V/K$$

Na	-5
K	-12
Cu	1,8
Al	-1,8

$\Big\} \times 10^{-6}\ V/K$

Fehler 100 und Vorzeichen!

3.4. Summary of Drude Theorie

- auf die kinetische Gastheorie basiert
- Annahme einer Streuzeit τ

  $\Rightarrow$ Leitfähigkeit $\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}$
- Hall-Effekt kann die e^--Dichte bestimmen
- Erfolge der Drude Theorie
  - Wiedermann-Franz Gesetz okay
  - verschiedene Transporteigenschaften gut beschrieben, z.B. AC-Leitfähigkeit
  - Hall Koeffizient okay
- Versagen
  - Hall Koeff. hat oft das verkehrte Vorzeichen
  - spez. Wärme ist nicht $\frac{3}{2}k_B$
  - Peltier und Seebeck Koef. falsch (x100)
- Drude Theorie war die einzigste Theorie für 25 Jahre