

Übungen zur Physik V: Festkörperphysik (WS 2012/2013)

Prof. Dr. H. v. Löhneysen / Dr. G. Fischer

Übungsblatt 11

Besprechung am 24. Januar 2013

Aufgabe 1: (1,5 Punkte)

Im LCAO-Formalismus wird die Wellenfunktion eines stark gebundenen Kristallelektrons näherungsweise durch eine Linearkombination

$$\Psi_{n,k_x}(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \cdot \varphi_n(x - R_j)$$

atomarer Wellenfunktionen $\varphi_n(x - R_j)$ beschrieben. Ein "eindimensionaler Kristall" bestehe aus N gleichen Atomen im Abstand a an den Orten $R_j = j \cdot a$, $j = 1, \dots, N$. Zeigen Sie, dass bei geeigneter Wahl der α_j die Wellenfunktion $\Psi_{n,k_x}(x)$ als Blochwelle

$$\Psi_{n,k_x}(x) = e^{ik_x x} \cdot u_{n,k_x}(x)$$

mit $u_{n,k_x}(x + pa) = u_{n,k_x}(x)$ und $p = \pm 1, \pm 2, \dots$ geschrieben werden kann, wenn man die Summe von $-\infty$ bis $+\infty$ laufen lässt.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

In der Näherung stark gebundener Elektronen haben s-Elektronen im Festkörper die Energie

$$E(\vec{k}) = E_{\text{Atom}} - A - B \cdot \sum_l e^{i\vec{k}(\vec{a}_j - \vec{a}_l)}$$

A und B seien positiv:

$$A := - \int \varphi_n^*(\vec{r} - \vec{a}_i) V(\vec{r} - \vec{a}_i) \varphi_n(\vec{r} - \vec{a}_i) d\vec{r}$$
$$B_j := - \int \varphi_n^*(\vec{r} - \vec{a}_j) V(\vec{r} - \vec{a}_i) \varphi_n(\vec{r} - \vec{a}_i) d\vec{r}$$

- Führen Sie die Summation für ein einfach-kubisches Gitter aus. Dabei soll nur über die nächsten Nachbarn von a_j summiert werden. Wie breit ist das entstandene Energieband maximal? (1,5 P.)
- Entwickeln Sie die erhaltene Energie-Funktion aus a) für kleine k -Werte. Welcher Zusammenhang ergibt sich für E und k ? (0,5 P.)

- c) Berechnen Sie näherungsweise die Energieabhängigkeit der Zustandsdichte der oberen und unteren Bandkante (kritische Punkte). (2P.)

$$D^*(E)dE = \rho_k \int_{E(k)}^{E+dE} d^3k = \frac{\rho_k}{\hbar} \int \frac{dS_E}{v_g}$$

Wie groß ist die effektive Masse m^* an den Bandkanten?

Aufgabe 3: (2 Punkte)

In einem anisotropen Kristall sei die Energie der Kristallelektronen im Leitungsband gegeben durch

$$E(\vec{k}) = \alpha_{xx} \cdot k_x^2 + \alpha_{yy} \cdot k_y^2 + \alpha_{zz} \cdot k_z^2$$

Diskutieren Sie die Flächen konstanter Energie. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen eines Elektrons unter dem Einfluß eines äußeren elektrischen Feldes $\vec{E}$ auf.

Aufgabe 4: (1,5 Punkte)

Betrachten Sie die Energiefläche

$$E(\vec{k}) = \hbar^2 \cdot \left(\frac{k_x^2 + k_y^2}{2m_t^*} + \frac{k_z^2}{2m_l^*} \right)$$

bei der m_t^* die transversale und m_l^* die longitudinale effektive Masse ist. Eine Fläche, auf der $E(\vec{k})$ konstant ist, hat die Form eines Rotationsellipsoids. Benutzen Sie die Bewegungsgleichung

$$\frac{d(\hbar\vec{k})}{dt} = -e \cdot \vec{v}(\vec{k}) \times \vec{B} \quad \text{mit} \quad \vec{v}(\vec{k}) = \frac{1}{\hbar} \nabla_{\vec{k}} E(\vec{k})$$

und zeigen Sie, dass die Umlauffrequenz eines Elektrons im Magnetfeld $\omega_c = eB/(m_t^*m_l^*)^{1/2}$ ist, wenn das statische Magnetfeld $\vec{B}$ in x -Richtung zeigt (ω_c nennt man die Zyklotronfrequenz).

Aufgabe 5: (2 Punkte)

Betrachten Sie die Bewegung von Bloch-Elektronen im Magnetfeld mit der Bewegungsgleichung aus Aufgabe 4.

- Berechnen Sie die Bahn $\vec{r}_\perp$, d. h. die Projektion der Bahn im Ortsraum auf die Ebene senkrecht zu $\vec{B}$. (1,5 P.)
- Wie sehen mögliche Bahnen bei Edelmetallen aus (Umlaufsinn)? (0,5 P.)