

ÜBUNGSAUFGABEN (VII)

(Besprechung am Donnerstag, 12.12.2013)

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Betrachten Sie ein abgeschlossenes System von N gleichartigen Teilchen, die jeweils nur über zwei (nicht entartete) Energieniveaus E_0 und $E_1 = E_0 + \Delta E$ verfügen. Das System befinde sich im thermischen Gleichgewicht bei der Temperatur T . Bestimmen Sie die innere Energie $U = \langle E \rangle$ des Systems mithilfe des Boltzmann-Faktors und leiten Sie hieraus die molare Wärmekapazität c_v als Funktion von T ab. Skizzieren Sie das Resultat grafisch in Abhängigkeit von $\Delta E/k_B T$ und interpretieren Sie es anschaulich. Diskutieren Sie schließlich Gemeinsamkeiten und Unterschiede zur molaren Wärmekapazität der Phononen.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Das Beersche Gesetz für die Absorption elektromagnetischer Strahlung in einem homogenen Medium lautet bekanntlich (3. Semester)

$$I(d) = I_0 \exp(-\alpha d)$$

mit der Anfangsintensität I_0 , der im Medium zurückgelegten Strecke d und dessen Absorptionskoeffizienten α . Als Vorbereitung auf die optischen Eigenschaften von Phononen soll ein grundlegender Zusammenhang von α mit der komplexen Brechzahl $\tilde{n}(\omega)$ des Mediums sowie deren dielektrischer Funktion $\epsilon(\omega) = \epsilon' + i\epsilon''$ hergestellt werden. Insbesondere soll gezeigt werden, dass gilt

$$\alpha \sim \epsilon'' \quad \text{für} \quad \epsilon'' \ll \epsilon'.$$

Anleitung: Gehen Sie aus von einer ebenen, in Richtung z propagierenden Welle mit dem elektrischen Feld $E(\omega, t) = E_0 \exp[i(\tilde{n}k_0 z - \omega t)]$ sowie $\tilde{n} = n + i\kappa$. Berechnen Sie die Intensität $I(z)$ und bestimmen Sie durch Vergleich den Koeffizienten α . Benutzen Sie dann die Relation $\epsilon = \tilde{n}^2$ zur Ableitung des geforderten Ausdrucks.

Aufgabe 3: (6 Punkte)

Im sichtbaren Spektralbereich ist ein Einkristall aus NaCl vollkommen transparent. Sein Brechungsindex n ändert sich kaum mit der Wellenlänge λ und kann entsprechend mit einem konstanten Wert von $n \simeq 1.5$ gut beschrieben werden. Dagegen ist NaCl für elektromagnetische Strahlung im fernen infraroten Bereich praktisch undurchlässig mit einem maximalen Reflexionsvermögen von nahezu 100% bei der Frequenz $f = 5$ THz. Geht man zu noch weit niedrigeren Frequenzen, $f \rightarrow 0$, können die elektrischen Eigenschaften von NaCl in einem Kondensator bestimmt werden. Es stellt sich heraus, dass $C_{\text{NaCl}} = 5.9 \cdot C_{\text{Vakuum}}$ ist, worin C_{NaCl} die gemessene Kapazität mit Kristall und C_{Vakuum} die Leerkapazität des Kondensators ist.

Berechnen Sie mit Hilfe dieser Daten das Reflexionsspektrum $R(\omega)$ von NaCl für senkrechte Incidenz der Strahlung und skizzieren Sie es für Winkelfrequenzen $0 \leq \omega \leq 10\omega_T$. Bei welcher Winkelfrequenz verschwindet die Reflexion?

Hinweis: Die dielektrische Funktion $\epsilon(\omega)$ lässt sich bei vernachlässigbarer Dämpfung γ ausdrücken durch $\epsilon(\omega) = \epsilon_b \cdot (\omega_L^2 - \omega^2)/(\omega_T^2 - \omega^2)$ mit den Resonanzfrequenzen transversaler Phononen ω_T und longitudinaler Phononen ω_L .