

ÜBUNGSAUFGABEN (IX)

(Abgabe am Dienstag, 7.1.2014; Besprechung am Donnerstag, 9.1.2014)

Aufgabe 1: (8 Punkte)

Gegeben sei ein Metall, dass im Modell des freien Elektronengases pro Atom ein Elektron zur Verfügung stellt. Berechnen Sie die mittlere Energie pro Elektron bei tiefen Temperaturen, $T \rightarrow 0$, für ein

- a) eindimensionales,
- b) zweidimensionales und
- c) dreidimensionales Elektronengas.

Aufgabe 2: (8 Punkte)

Alternativ zu den in der Vorlesung vorgestellten Methoden zur Bestimmung der Zustandsdichte der Elektronen in einem Energieband lässt sich diese auch berechnen mittels der Integralbeziehung

$$D(E) = \left(\frac{L}{2\pi} \right)^n \oint_{E(\vec{k})=E} \frac{dS_k}{|\vec{\nabla}_k E(\vec{k})|},$$

wobei L die Ausdehnung des Systems im realen n -dimensionalen Raum darstellt und dS_k ein Flächenelement (bzw. Linienelement) auf der Fläche (bzw. Linie) konstanter Energie $E(\vec{k}) = E$ im k -Raum repräsentiert.

- a) Berechnen Sie mit dem Ausdruck die Zustandsdichte $D(E)$ eines dreidimensionalen freien Elektronengases.
- b) Zeigen Sie, dass die Zustandsdichte $D(E)$ eines zweidimensionalen Elektronengases im Tight-Binding-Modell in der Mitte des Energiebandes gegen unendlich strebt und bestimmen Sie näherungsweise den funktionellen Verlauf nahe der Singularität (Van-Hove-Singularität).

Anleitung zu b): Verwenden Sie die Ergebnisse der Aufgabe 2 von Blatt VIII unter Verwendung des Energieparameters $\hat{E}$. Das Ringintegral soll zunächst durch ein Linienintegral über die Raumfrequenzen k_x im 1. Quadranten ausgedrückt werden. (Beachten Sie die Integrationsgrenzen!). Vereinfachen Sie das Integral mittels der Näherung kleiner $\hat{E}$ ($\hat{E} \gtrsim 0$). Betrachten Sie dann den wesentlichen Beitrag des (analytisch nicht lösbaren) Integrals.