

Übungen zur Modernen Experimentalphysik II

Festkörperphysik im WS 2019/2020

Übungsblatt 11. Besprechung am 16. Januar 2020

Aufgabe 34) Josephson-Effekt

Wir betrachten eine schwache Verbindung zwischen zwei Supraleitern S1 und S2, die aus einer dünnen isolierenden Schicht besteht (Siehe die Abbildung 1).

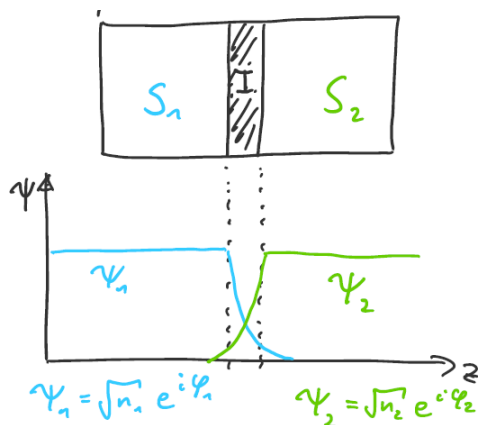


Abbildung 1: SIS-Junction bestehend aus zwei Supraleitern S1 und S2 mit einer dünnen isolierenden Schicht dazwischen.

Die schwache Koppelung zwischen beiden Supraleitern kann beschrieben werden durch eine Kopplungskonstante K:

$$\frac{\partial \psi_{1,2}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} \left(E_{1,2} \psi_{1,2} + K \psi_{2,1} \right)$$

Finde die zwei Josephson-Gleichungen?

$$I_s = I_c \sin \varphi$$
$$\frac{d}{dt} \varphi = \frac{2\pi}{\Phi_0} U$$

[2 Punkte]

Aufgabe 35 London-Gleichung

a) Zeigen Sie unter Verwendung der London-Gleichung, dass in einem Supraleiter

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = -\frac{1}{\lambda^2} \mathbf{B}$$

gilt.

- b) In Abbildung 2 liegt die Oberfläche des Supraleiters in der y-z-Ebene. In z-Richtung also parallel zur Oberfläche, wird ein Magnetfeld $\mathbf{B} = (0, 0, B_0)$ angelegt. Wir nehmen an, dass das Magnetfeld innerhalb des Supraleiters eine nur von x abhängige Funktion ist, also $\mathbf{B} = (0, 0, B_z(x))$. Zeigen Sie, dass dann

$$d^2 B_z(x)/dx^2 = 1/\lambda^2 B_z(x)$$

gilt.

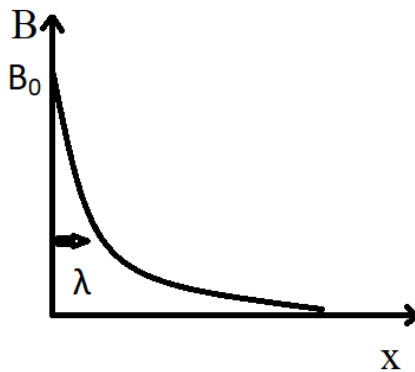


Abbildung 2: Das Magnetfeld nahe der Oberfläche eines Supraleiters im Meissner-Zustand. Das Feld klingt exponentiell ab, wobei die charakteristische Länge durch die Eindringtiefe λ gegeben ist.

- c) Lösen Sie das Teil (b) auftretende Differentialgleichung und zeigen Sie, dass Magnetfeld in der Nähe der Oberfläche eines Supraleiters die in Abbildung 2 skizzierte Form $B = B_0 \exp(-x/\lambda)$ hat.

[3 Punkte]

Aufgabe 36 Vortex in einem Supraleiter

- a) Ein Vortex in einem Supraleiter kann durch einen zylindrischen Kern aus normalleitendem Metall mit dem Radius ξ_0 modelliert werden. Verwenden Sie die Gleichung

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = -\frac{\mathbf{B}}{\lambda^2}$$

Und den Ausdruck

$$\nabla \times \mathbf{v}_s = 1/r \begin{pmatrix} e_r & r e_\phi & e_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_r & r v_\phi & v_z \end{pmatrix}$$

$\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\phi$ und $\mathbf{e}_z$ sind Einheitsvektoren in die Richtungen r , ϕ und z im Punkt $\mathbf{r} = (r, \phi, z)$ sind; v_r , v_ϕ , v_z sind die Komponenten von $\mathbf{v}_s$ in den entsprechenden Richtungen.

für die Rotation in Zylinderkoordinaten, um zu zeigen, dass das Magnetfeld $B_z(r)$ außerhalb des Kerns die Besselsche Differentialgleichung

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dB_z}{dr} \right) = \frac{B_z}{\lambda^2}$$

erfüllt.

- b) Für kleine r mit $\xi_0 < r \ll \lambda$ ist die rechte Seite der Besselschen Differentialgleichung in Teil (a) näherungsweise null. Zeigen Sie, dass diese Näherung auf $B_z(r) = a \ln(r) + b$ mit den unbekannten Konstanten a und b führt.
- c) Zeigen Sie, dass der Strom, der zu dem in Teil (b) gefundenen $B_z(r)$ gehört, durch

$$\mathbf{j} = -\frac{a}{\mu_0 r} \mathbf{e}_\phi$$

($\mathbf{j}$ und $\mathbf{e}$ sind Vektoren)

gegeben ist, was dem Sprastrom in einem Vortex bei ^4He ähnelt. Bestimmen Sie dann das Vektorpotential $\mathbf{A}$ sowie die Konstante a als Funktion des Vortex eingeschlossenen magnetischen Flusses Φ .

[4 Punkte]