Wolfgang Wernsdorfer, Amir-Abbas Haghighirad, Karlsruher Institut für Technologie

Übungen zur Modernen Experimentalphysik II

Festkörperphysik im WS 2021/2022

Übungsblatt 11. Besprechung am 3. Februar 2022

Aufgabe 11.1) Josephson-Effekt

Wir betrachten eine schwache Verbindung zwischen zwei Supraleitern S1 und S2, die aus einer dünnen isolierenden Schicht besteht (Siehe die Abbildung 1).

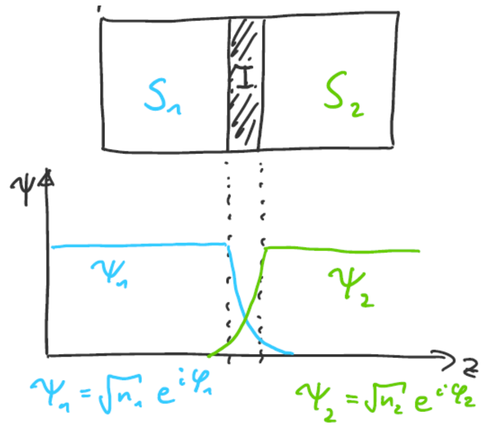

Abbildung 1: SIS-Junction bestehend aus zwei Supraleitern S1 und S2 mit einer dünnen isolierenden Schicht dazwischen.

Die schwache Kopplung zwischen beiden Supraleitern kann beschrieben werden durch eine Kopplungskonstante K:

$$\frac{\partial \Psi_{1,2}}{\partial t} = \frac{-i}{\hbar}\left(E_{1,2}\Psi_{1,2} + K\,\Psi_{2,1}\right)$$

Leiten Sie die zwei Josephson-Gleichungen her!

Hinweise:

$$I_s = I_c \sin\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\varphi = \frac{2\pi}{\Phi_0} U$$

[*2 Punkte*]

Aufgabe 11.2) London-Gleichung

a) Zeigen Sie unter Verwendung der London-Gleichung, dass in einem Supraleiter gilt:

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}) = -\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\lambda}^2}\boldsymbol{B}$$

b) In Abbildung 2 liegt die Oberfläche eines Supraleiters in der y-z-Ebene. In der z-Richtung (d.h. parallel zur Oberfläche), wird ein Magnetfeld **B** = (0, 0, B_0) angelegt. Wir nehmen an, dass das Magnetfeld innerhalb des Supraleiters eine nur von x abhängige Funktion ist, also **B** = (0, 0, $B_z(x)$). Zeigen Sie, dass gilt:

$$d^2B_z(x)/dx^2 = 1/\lambda^2 B_z(x)$$

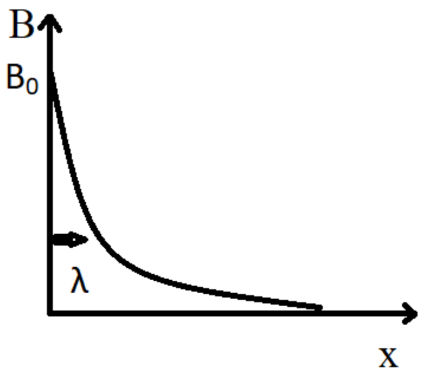

Abbildung 2: Das Magnetfeld nahe der Oberfläche eines Supraleiters im Meissner-Zustand. Das Feld nimmt exponentiell ab, und die charakteristische Länge ist durch die Eindringtiefe λ gegeben.

c) Lösen Sie die in Teil (b) auftretende Differentialgleichung und zeigen Sie, dass für das Magnetfeld in der Nähe der Oberfläche eines Supraleiters (skizziert in Abblidung) gilt:

$$B = B_0 \exp(-x/\lambda)$$

[*4 Punkte*]

Aufgabe 11.3) Vortex in einem Supraleiter

a) Ein Vortex in einem Supraleiter kann durch einen zylindrischen Kern aus normalleitendem Metall mit dem Radius ξ_0 modelliert werden. Verwenden Sie die Gleichung

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}) = -\frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{\lambda}^2}$$

Und den Ausdruck

$$\nabla \times v_s = 1/r \begin{pmatrix} e_r & re_\emptyset & e_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \emptyset} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_r & rv_\emptyset & v_z \end{pmatrix}$$

(*$\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\varphi$ and $\boldsymbol{e}_z$ sind Einheitsvektoren in die Richtungen r, φ und z im Punkt $\boldsymbol{r}$ = (r, φ, z); v_r, v_φ, v_z sind die Komponenten von $\boldsymbol{v}_s$ in den entsprechenden Richtungen*)

für die Rotation in Zylinderkoordinaten, um zu zeigen, dass das Magnetfeld $B_z(r)$ außerhalb des Kerns die Besselsche Differentialgleichung

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dB_z}{dr}\right) = \frac{B_z}{\lambda^2}$$

erfüllt.

b) Für kleine r mit $\xi_0 < r << \lambda$ ist die rechte Seite der Besselschen Differentialgleichung in Teil (a) nährungsweise null. Zeigen Sie, dass diese Nährung auf
   B_z (r) = a ln(r) + b
   mit den unbekannten Konstanten a und b führt.
c) Zeigen Sie, dass der Strom, der zu dem in Teil (b) gefundenen $B_z(r)$ gehört, durch die Gleichung:

$$\boldsymbol{j} = -\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{\mu_0 r}}\boldsymbol{e\phi}$$

   (**j** und **e** sind Vektoren)
   Beschrieben wird, was dem Suprastrom in einem Vortex bei ^{4}He ähnelt. Bestimmen Sie dann das Vektorpotential **A** sowie die Konstante ***a*** als Funktion durch den Vortex eingeschlossenen magnetischen Flusses **Φ**.

   [*4 Punkte*]