

Relativistische e-Streuung

Vorbereitung auf Kapitel 5: Gestalt der Kerne

Streuung von Projektilen an Kernen \Rightarrow Wie groß sind Kerne?

Punktförmige Projektilen besonders geeignet: e^\pm

\Rightarrow Hochrelativistische Kinematik erforderlich

4-Ortsvektor $\tilde{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, \vec{x})$

4-Impulsvektor $\tilde{p} = (E/c, \vec{p})$

Skalarprodukt

$$\tilde{a} \cdot \tilde{b} = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 = a_0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b}$$

ist Lorentz-invariant!

$$E^2/c^2 - \vec{p}^2 \text{ (= invariant)} = m_0 c^2 \quad m_0 \hat{=} \text{ Ruhemasse in einem System mit } \vec{p} = 0$$

$$E^2 - \vec{p}^2 c^2 = m_0 c^4$$

$E \simeq |\vec{p}| \cdot c$ für e^\pm schon bei einigen MeV Energie

Relativistische e-Streuung (Forts.)

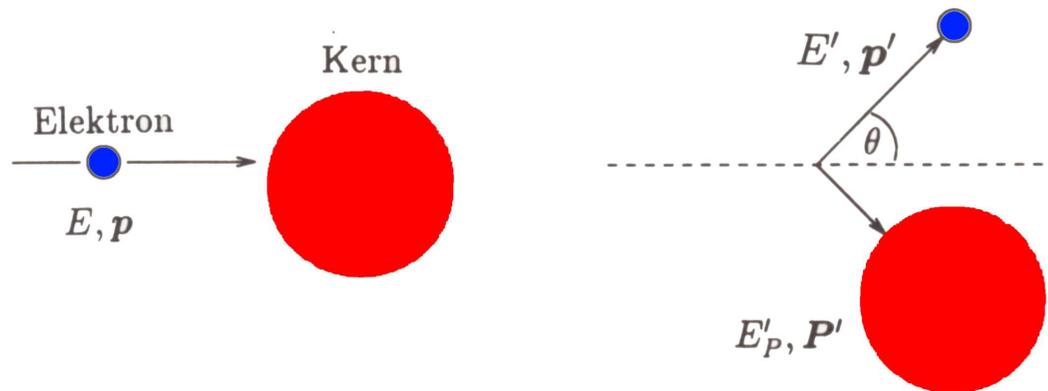


Abb. 5.1. Kinematik der elastischen Elektron-Kern-Streuung

⊖ Streuwinkel

$$\tilde{p}_e + \tilde{P} = \tilde{p}'_e + \tilde{P}'$$

Quadrieren, ausmultiplizieren und verwenden von

$$\tilde{p}_e^2 = \tilde{p}'_e{}^2 = m_e^2 c^2$$

$$\tilde{P}^2 = \tilde{P}'^2 = M^2 c^2$$

führt zu

$$\tilde{p}_e \cdot \tilde{P} = \tilde{p}'_e \cdot \tilde{P}'$$

Relativistische e-Streuung (Forts.)

Der Rückstoß des Targetteilchens wird oft nicht nachgewiesen, sondern nur das gestreute e^-

$$\begin{aligned}\tilde{\vec{p}}_e \cdot \tilde{\vec{P}} &= \tilde{\vec{p}}'_e \cdot (\tilde{\vec{p}}'_e + \tilde{\vec{P}} - \tilde{\vec{p}}_e) \\ &= \tilde{\vec{p}}'_e \cdot \tilde{\vec{p}}_e + \tilde{\vec{p}}'_e \cdot \tilde{\vec{P}} - \tilde{p}'_e{}^2\end{aligned}$$

Laborsystem: Target vor Stoß in Ruhe

$$\begin{aligned}\tilde{\vec{p}}_e &= (E_e/c, \vec{p}_e), & \tilde{\vec{p}}'_e &= (E'_e/c, \vec{p}'_e) \\ \tilde{\vec{P}} &= (Mc, 0), & \tilde{\vec{p}}'_e &= (E'/c, \vec{P}'_e)\end{aligned}$$

Einsetzen ergibt:

$$E_e \cdot M = \frac{E_e E'_e}{c^2} - \underbrace{\vec{p}'_e \cdot \vec{p}_e}_{|\vec{p}'_e| \cdot |\vec{p}_e| \cos \Theta} + E'_e M - m_e^2 c^2$$

Annahme: $m_e^2 c^4 \ll$ restl. Terme und $E_e \simeq |\vec{p}_e| \cdot c$

$$\Rightarrow E_e M c^2 = E_e E'_e (1 - \cos \Theta) + E'_e M c^2$$

Energie des gestreuten Elektrons im Laborsystem

$$E'_e = \frac{E_e}{1 + \frac{E_e}{Mc^2}(1 - \cos \Theta)}$$

Mehr Rückstoß auf Target übertragen, je grösser die relativistische Elektronenmasse E_e/c^2 im Verhältnis zur Targetmasse M ist

$E_e - E'_e =$ Rückstoßenergie, die auf Kern übertragen wird

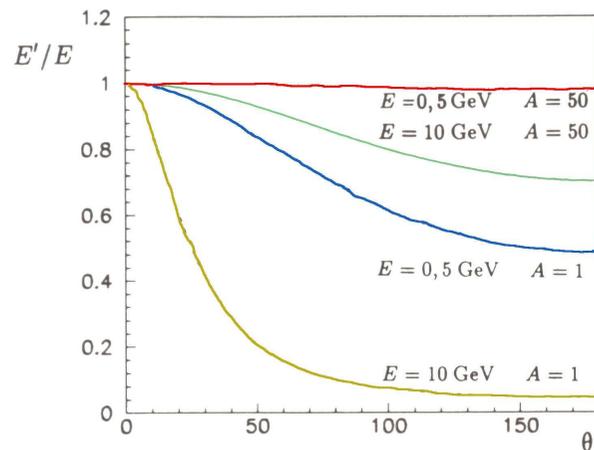


Abb. 5.2. Winkelabhängigkeit der auf die Strahlenergie normierten Elektronstreuenergie E'/E bei elastischer Elektron-Kern-Streuung. Die Kurven zeigen diesen Zusammenhang für zwei verschiedene Strahlenergien (0.5 GeV und 10 GeV) und zwei unterschiedlich schwere Kerne ($A = 1$ und $A = 50$).

Elastische Streuung:
 $E'_e \leftrightarrow \Theta$;
gilt nicht mehr bei inelastischer Streuung!

4.3 Rutherford-WQ II

e^- mit Energie E streue an schwerem Kern Ze

„ E sei nicht zu hoch“, um Rückstoß zu vernachlässigen (Rechnen mit Dreierimpulsen)

Erweiterung hier: Streuung an **ausgedehnter** Ladungsverteilung

$Z\alpha \ll 1$; **Bornsche Näherung**; e-WF sind ebene Wellen:

$$\Psi_i = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}/\hbar}, \Psi_f = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{p}' \cdot \vec{x}/\hbar}$$

V ist endliches Volumen \gg Volumen des Streuzentrums

Betr. Elektronenstrahl mit Dichte $n_a \Rightarrow \int_V |\Psi_i|^2 dV = n_a V, \quad V = \frac{N_a}{n_a}$

Goldene Regel $\Rightarrow \frac{\sigma v_a}{V} = W = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \Psi_f | \mathcal{H}_{int} | \Psi_i \rangle|^2 \frac{dn}{dE_f}$

E_f totale Energie im Endzustand ohne Rückstreuung

$\Rightarrow dE_f = dE' = dE$

4.3 Rutherford-WQ II (Forts.)

Phasenraumdicke (für Kugelschale im Impulsraum):

$$dn(|\vec{p}'|) = \frac{4\pi |\vec{p}'|^2 dp' V}{(2\pi \hbar)^3}$$

⇒ WQ für e-Streuung in Raumwinkelelement $d\Omega$:

$$\frac{d\sigma v_a}{V} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \Psi_f | \mathcal{H}_{int} | \Psi_i \rangle|^2 \frac{V |\vec{p}'|^2 dp'}{(2\pi \hbar)^3 dE_f} d\Omega$$

Für relativistische Energien kann man setzen: $v_a \rightarrow c$ sowie $|\vec{p}'| \rightarrow \frac{E'}{c}$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{V^2 E'^2}{(2\pi)^2 (\hbar c)^4} \left| \langle \Psi_f | \underbrace{\mathcal{H}_{int}}_{\text{e.m. Coulomb-WW}} | \Psi_i \rangle \right|^2$$

4.3 Rutherford-WQ II (Forts.)

WW-Operator einer Ladung e im elektr. Potential ϕ : $\mathcal{H}_{int} = e\phi$

$$\Rightarrow \langle \Psi_f | \mathcal{H}_{int} | \Psi_i \rangle = \frac{e}{V} \int e^{-i\vec{p}' \cdot \vec{x}/\hbar} \phi(\vec{x}) e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}/\hbar} d^3x$$

Definition: $\vec{q} = \vec{p} - \vec{p}'$ als „Impulsübertrag“

$$\dots = \frac{e}{V} \int \phi(\vec{x}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}/\hbar} d^3x$$

Laut **Greenschen Theorem**: $\int (u\Delta v - v\Delta u) d^3x = 0$

u, v sind Skalarfelder mit $\lim_{x \rightarrow \infty} = 0$

Laplace-Operator $\Delta = \nabla^2$ ist Summe zweifacher Ableitungen

$$\Rightarrow e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}/\hbar} = -\frac{\hbar^2}{|q|^2} \Delta e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}/\hbar}$$

Und somit gilt $\dots = -\frac{e \hbar^2}{V |q|^2} \int \Delta \phi(\vec{x}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}/\hbar} d^3x$

4.3 Rutherford-WQ II (Forts.)

Potential ϕ ist mit Ladungsdichte (hier statisch) über Poisson-Gleichung verknüpft:

$$\Delta\phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}$$

Die Ladungsdichte sei durch eine norm. Ladungsverteilungsfunktion beschrieben

$$\rho(\vec{x}) = Ze f(\vec{x})$$

mit $\int f(\vec{x}) d^3x = 1$

Also gilt

$$\begin{aligned}\langle\Psi_f|\mathcal{H}_{int}|\Psi_i\rangle &= -\frac{e\hbar^2}{\epsilon_0 V |q|^2} \int \rho(\vec{x}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}/\hbar} d^3x \\ &= -\frac{Z 4\pi \alpha\hbar^3 c}{V |q|^2} \underbrace{\int f(\vec{x}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}/\hbar} d^3x}_{\text{„Formfaktor“}}\end{aligned}$$