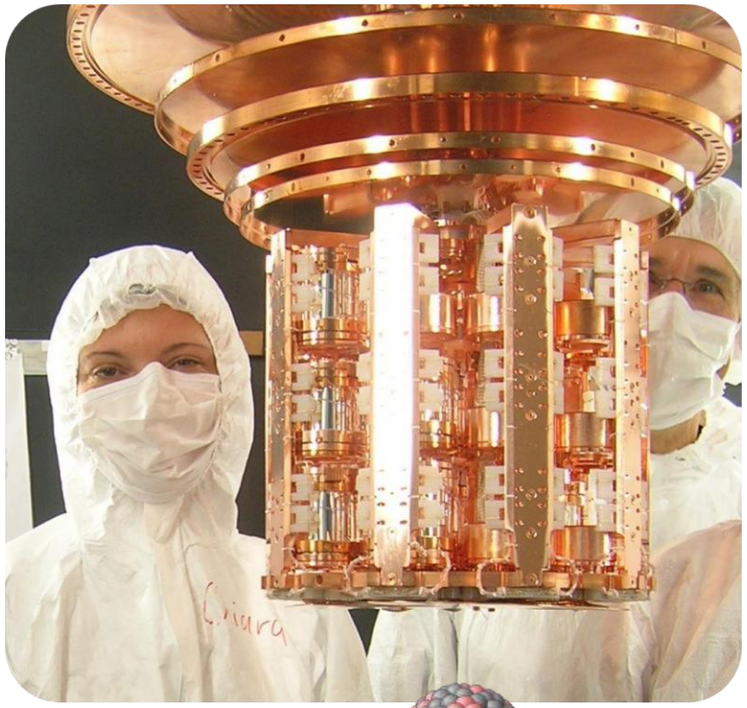
Karlsruhe Institute of Technology

Kerne und Teilchen

Physik VI

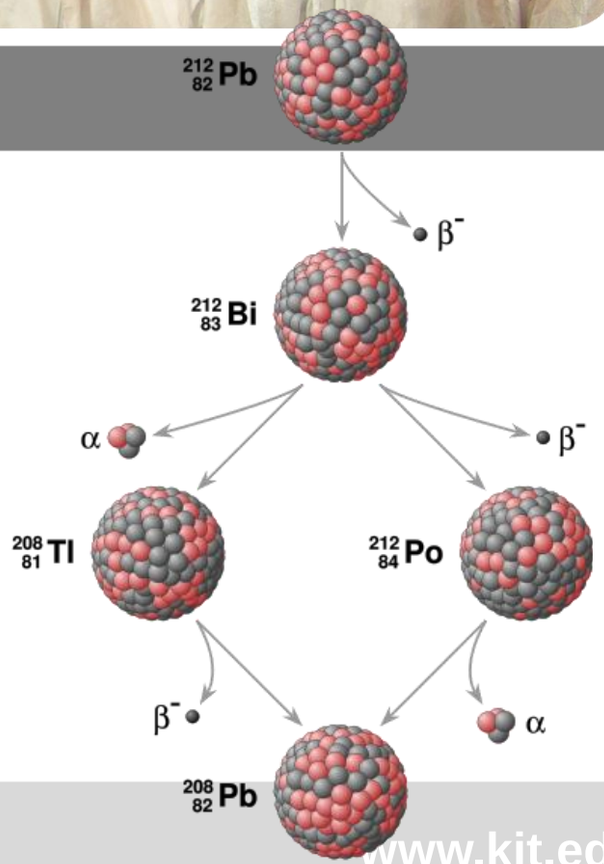
Vorlesung # 09 12.5.2010



Guido Drexlin, Institut für Experimentelle Kernphysik

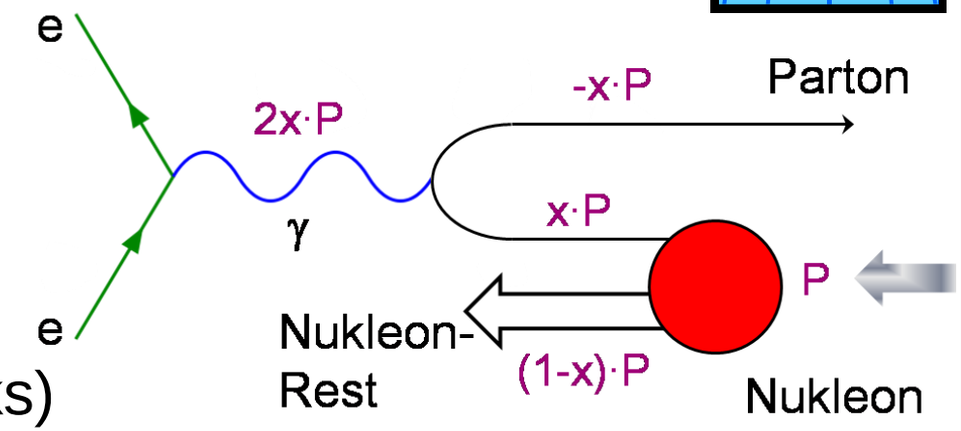
Instabile Kerne

- radioaktiver Zerfall: Grundlagen
- Lebensdauer, Zerfallskonstante
- Verzweigung bei Zerfällen
- α-Zerfall: Grundlagen
- Zerfallsketten von primordialen Elementen
- Tunneleffekt: Transmissionswahrscheinlichkeit



Parton-Modell des Nukleons

- inelastische ep-Streuung als inkohärente Überlagerung **elastischer Elektron-Wechselwirkungen mit Partonen**



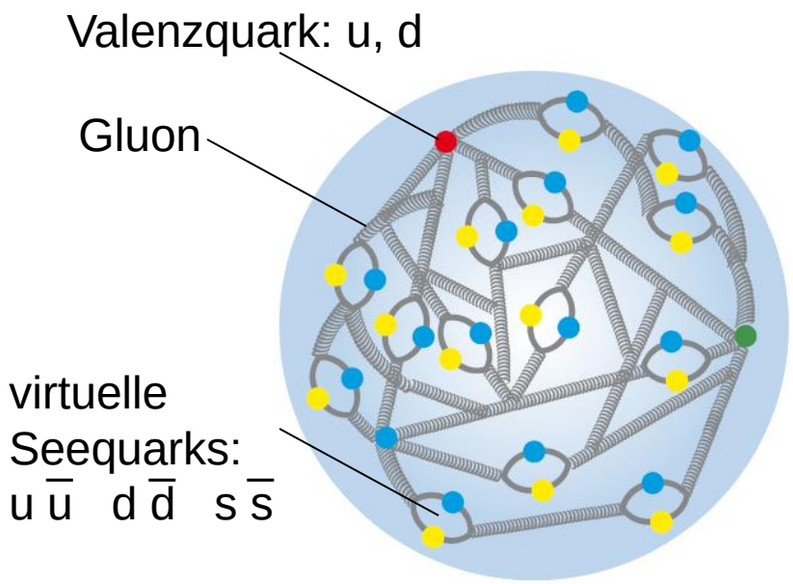
- **Strukturfunktion $F_2(x)$** beschreibt die ´elektrische´ Streuung an den Ladungen der Partonen (geladene Valenz-/See-Quarks)

$$F_2(x) = x \cdot \sum_f z_f^2 \cdot \left[q_f(x) + \bar{q}_f(x) \right]$$

- **Callan-Gross Relation:**
  Streuung an Spin s = ½ Partonen

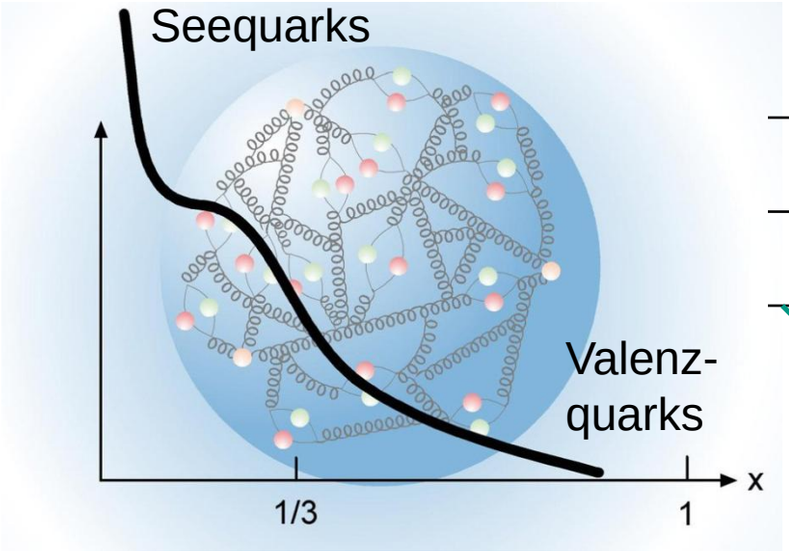
$$F_2(x) = 2x \cdot F_1(x)$$

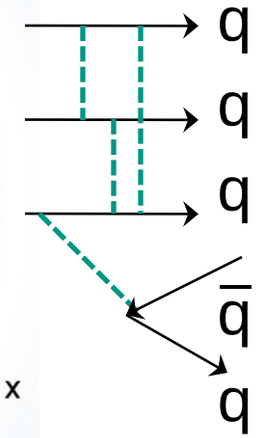
- umfangreiche experimentelle Untersuchungen von $F_2(x)$ an HERA



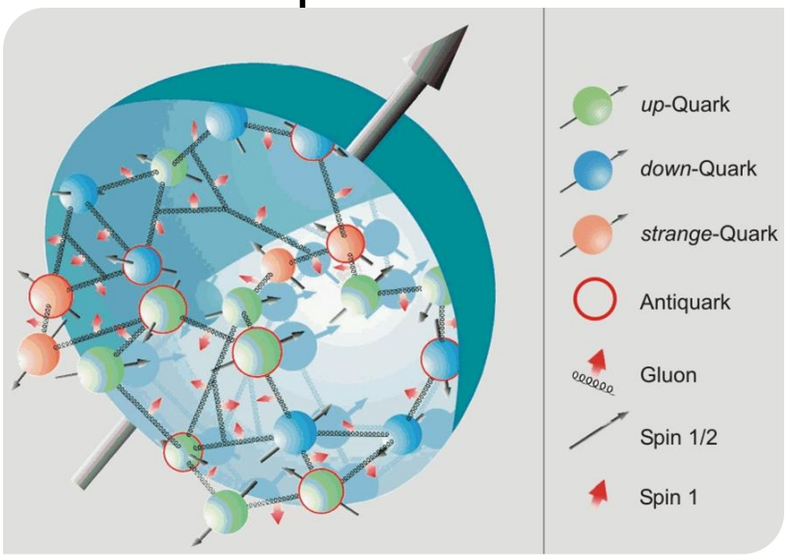
Parton-Verteilungen

- **Partondichteverteilungen** zeigen charakteristische Struktur:
  - bei großem Bjorken-x manifestieren sich die 3 Valenzquarks (u, d)
  - bei kleinem Bjorken-x dominieren die Seequarks (virtuelle Quark-Antiquark-Paare aus der Gluon-abstrahlung)
- **Strukturfunktionen** von eN und νN Streuung sind bis auf einen Ladungsfaktor 18/5 identisch!
- **Gluonen** tragen einen Anteil von ~50% des Nukleonenimpulses,
  - erster Gluonnachweis bei PETRA in 3-Jet Ereignissen



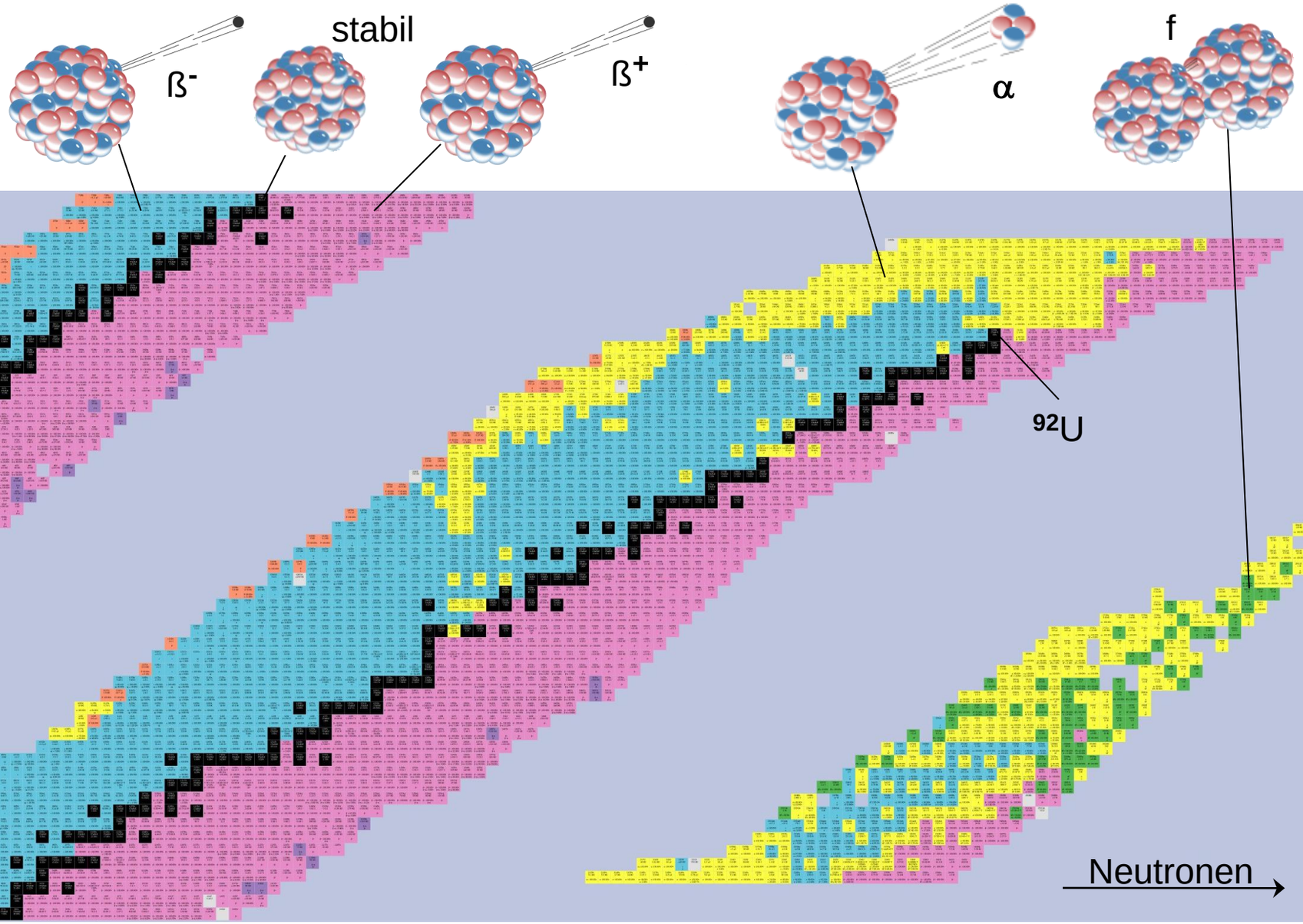


kleine x: Gluonen, Quarks & Antiquarks
große x: Valenzquarks



4. Instabile Kerne

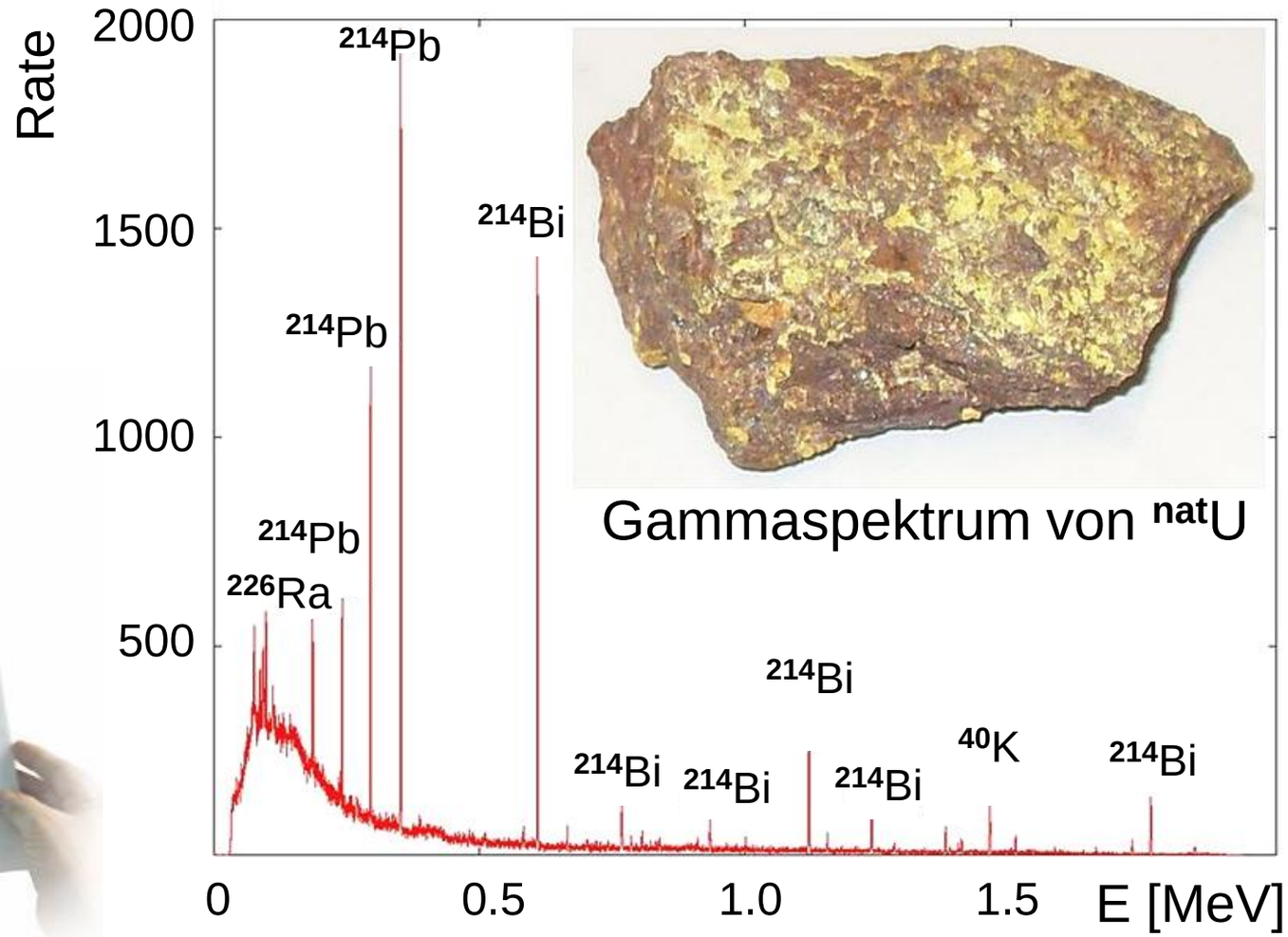
Instabilität durch
α,ß,γ-Zerfall
bzw. Spaltung



Nuklidkarte
mit instabilen
Kernen

radioaktiver Zerfall - Nuklidkarten

- Karlsruher Nuklidkarte (seit 1958) gibt einen umfassenden Überblick über alle bekannten stabilen und instabilen Kerne & ihre Zerfallsdaten:
  - Isotopenhäufigkeit
  - Zerfalls-art, -parameter
  - Spin & Parität
  - …
  - online verfügbar unter www.nucleonica.net



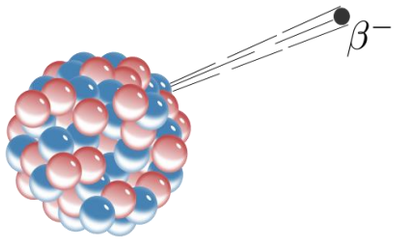
4.1 radioaktiver Zerfall

- in einem Ensemble (Quelle) mit einer großen Anzahl N instabiler Teilchen bzw. radioaktiver Kernen führen radioaktive Zerfälle in einem Zeitintervall dt zu einer Abnahme dN der Ensemble-/Kern-Anzahl

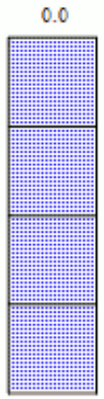
$$\boxed{dN = -\lambda \cdot N \cdot dt}$$

Zerfallskonstante λ

neg. Vorzeichen, da Teilchenabnahme



- **Zerfallskonstante λ ist Teilchen- bzw. Kern-spezifisch, λ in [s^{-1}]**
  Beispiel: α-Zerfall von ^{226}Ra:
  $\lambda = 1.4 \cdot 10^{-11} / s$
  = statistische Wahrscheinlichkeit für einen ^{226}Ra-Kern, im Zeitintervall dt = 1 s zu zerfallen



- $$\boxed{A = \frac{dN}{dt} = -\lambda \cdot N}$$

  Aktivität A einer Quelle (keine Konstante!) :
  ~ zur Zerfallskonstanten λ,
  ~ Ensembleanzahl N (nimmt ab, damit auch A)

exp. Zerfallsgesetz & Halbwertszeit $t_{1/2}$

- in einem Ensemble N(t), das zum Zeitpunkt t = 0 aus N(0) Kernen besteht, beobachtet man eine **exponentielle Abnahme** der Kerne

$$\int_{N_0}^{N} \frac{dN}{N} = -\lambda \cdot \int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad N(t) = N(0) \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

exponentielles Zerfallsgesetz

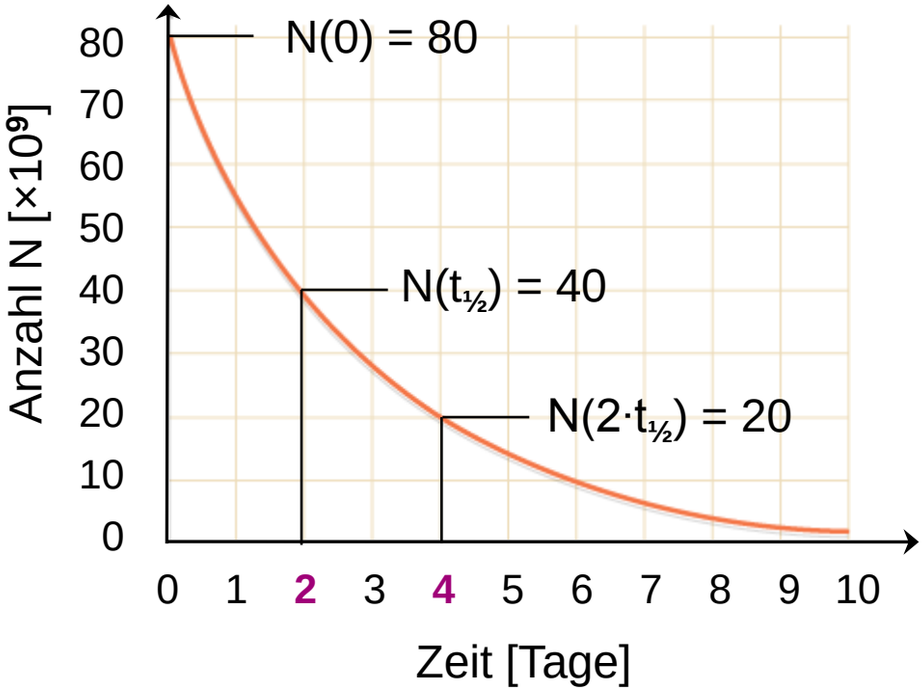
t = 0 ist beliebig wählbar !

- bei exponentiellen Zerfällen mit einer Zerfallskonstanten λ lassen sich 2 charakteristische Zeiten definieren:

1. Halbwertszeit $t_{1/2}$:

nach dem Zeitintervall $t = t_{1/2}$ sind noch die Hälfte der ursprünglichen Kerne vorhanden, d.h. eine Hälfte N(0)/2 des Ensembles ist bereits zerfallen

$N(t_{1/2}) = \frac{1}{2} \cdot N(0) \leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{(-\lambda \cdot t_{1/2})}$



exp. Zerfallsgesetz & mittlere Lebensdauer

- **2. mittlere Lebensdauer τ:**

  nach einem Zeitintervall t = τ (d.h. der mittleren Lebensdauer) sind noch $N(\tau) = N(0)/e$ radioaktive Kerne vorhanden **(1/e = 36.788% noch übrig)**

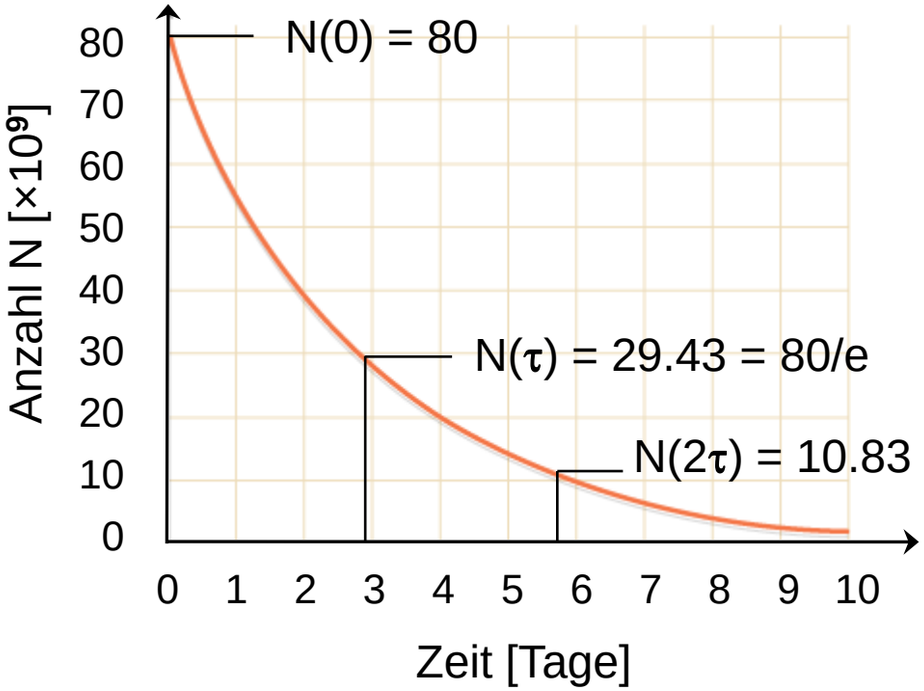
$$\tau = \frac{1}{\lambda}$$

mittlere Lebensdauer = Inverses der Zerfallskonstanten

$\tau = 10^{-24}$ s ($\Delta^{++} \rightarrow p + \pi^{+}$) ⇨ … τ = 12.3 a (T_2 ß-Zerfall) ⇨ … 10^{21} a (2νßß) …

$$t_{1/2} = \tau \cdot \ln 2 = 0.693 \cdot \tau$$
$$t_{1/2} = \ln 2/\lambda = 0.693/\lambda$$

$$\tau = 1.443 \cdot t_{1/2}$$



- **Zerfallsbreite Γ:**

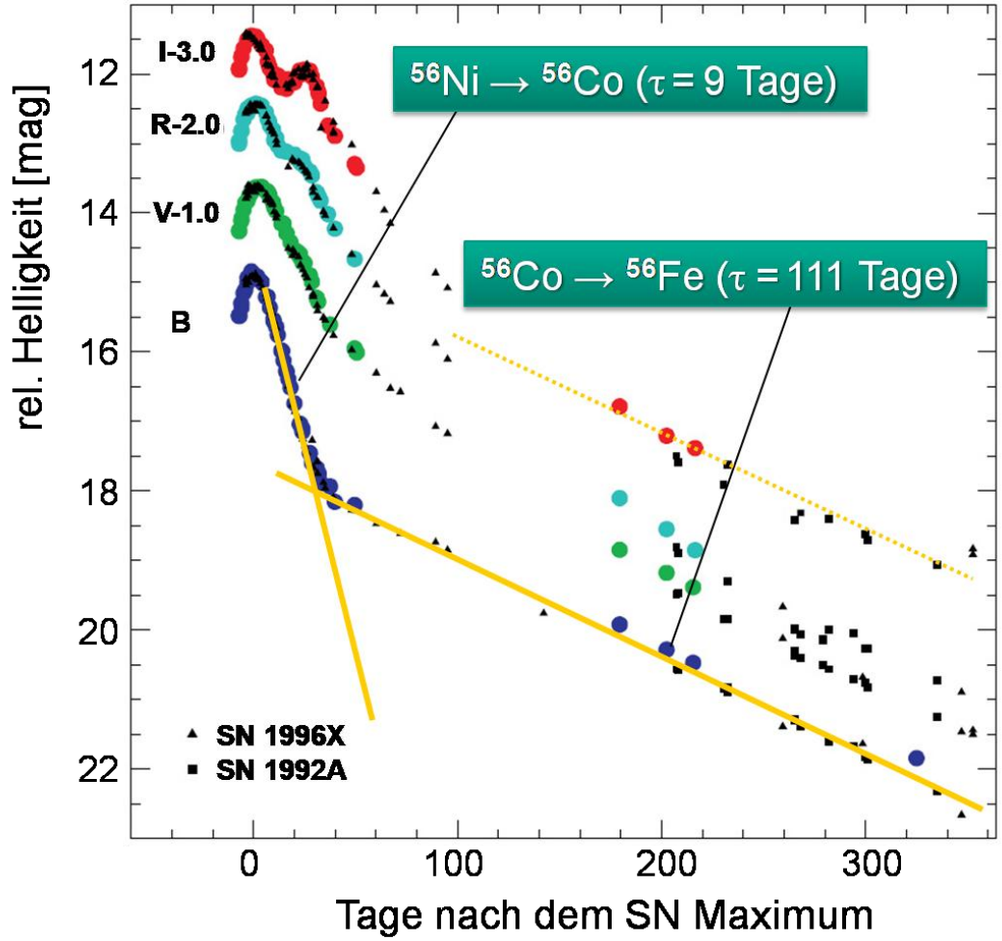
  ein instabiler Zustand (Resonanz) hat eine charakteristische Energie-Breite Γ

$$\Gamma = \frac{\hbar}{\tau} = \hbar \cdot \lambda$$

Heisenberg´sche Unschärferelation

radioaktive Lebensdauer: SNIa Lichtkurve

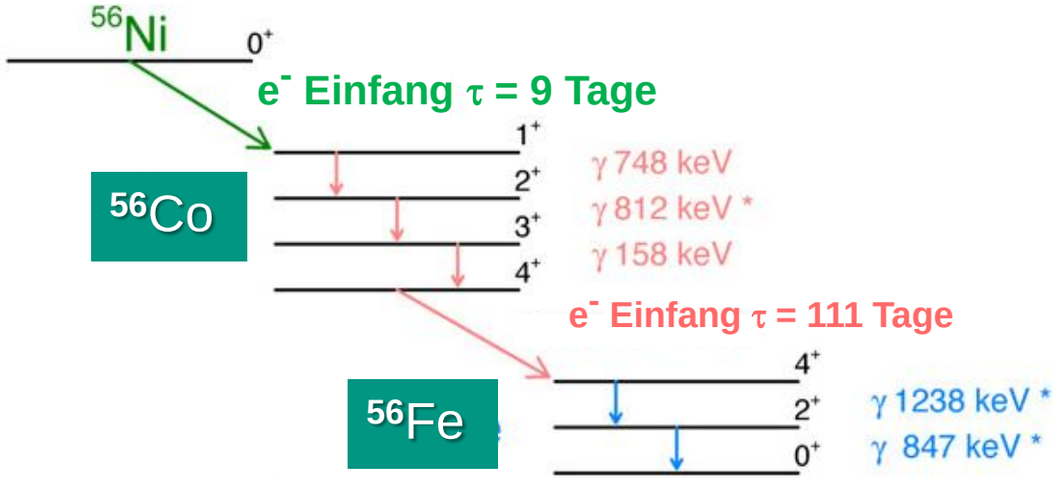
- **SNIa**: bei der thermonuklearen Detonation eines weißen Zwergs werden bei t = 0 große Mengen an ^{56}Ni erzeugt, das mit einer mittleren Lebensdauer τ (^{56}Ni) = 9 Tage durch Elektroneneinfang zerfällt, erzeugtes ^{56}Co zerfällt weiter radioaktives Zerfallsschema ^{56}Ni → ^{56}Co → ^{56}Fe



SN-Lichtkurven folgen τ des Zerfalls

Gammaquanten aus radioaktiven Zerfällen heizen die umgebende Materie auf –

↳ **optische Luminosität einer SNIa folgt der Lebensdauer τ von ^{56}Ni, ^{56}Co**



Aktivität einer Quelle: Einheiten

- **Aktivität A(t) = – dN/dt** beschreibt die Zahl dN der Zerfälle pro Zeiteinheit dt

$$A(t) = A(0) \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

mit wichtiger (s.o.) Relation **A(t) = λ · N(t)**
die Aktivität einer Quelle nimmt exponentiell ab

1 Bq = 1 Zerfall / s 1 Becquerel = $2.70 \cdot 10^{-11}$ Ci (nach Henri Becquerel)

1 Ci = $3.7 \cdot 10^{10}$ Zerfälle / s alte Einheit Curie, = Aktivität 1 g Radium (^{226}Ra) (nach Pierre Curie)

- abgeleitete Größen:
  - spezifische Aktivität [Bq/kg], Aktivitätskonzentration [Bq/m^3]
  - Beispiele: ^{3}H hat $3.6 \cdot 10^{14}$ Bq/g, ^{14}C hat $1.7 \cdot 10^{11}$ Bq/g
    ^{133}Xe hat $6.8 \cdot 10^{15}$ Bq/g, ^{nat}U hat $2.5 \cdot 10^{4}$ Bq/g

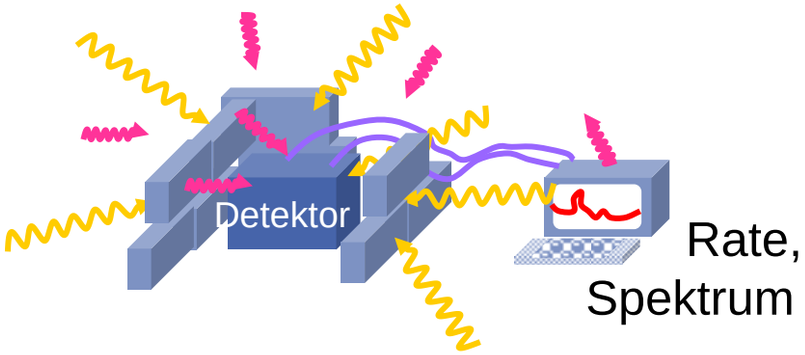
- **Energiedosis** einer Quelle, neue Einheit: 1 Gray
  = absorbierte Energie einer Quelle in einer Materialprobe mit dem Volumen V und der Dichte ρ (m = V · r)
  alte Einheit: 1 rad = 10^{-2} J/kg

1 Gy = 1 J / kg

Aktivität einer Quelle

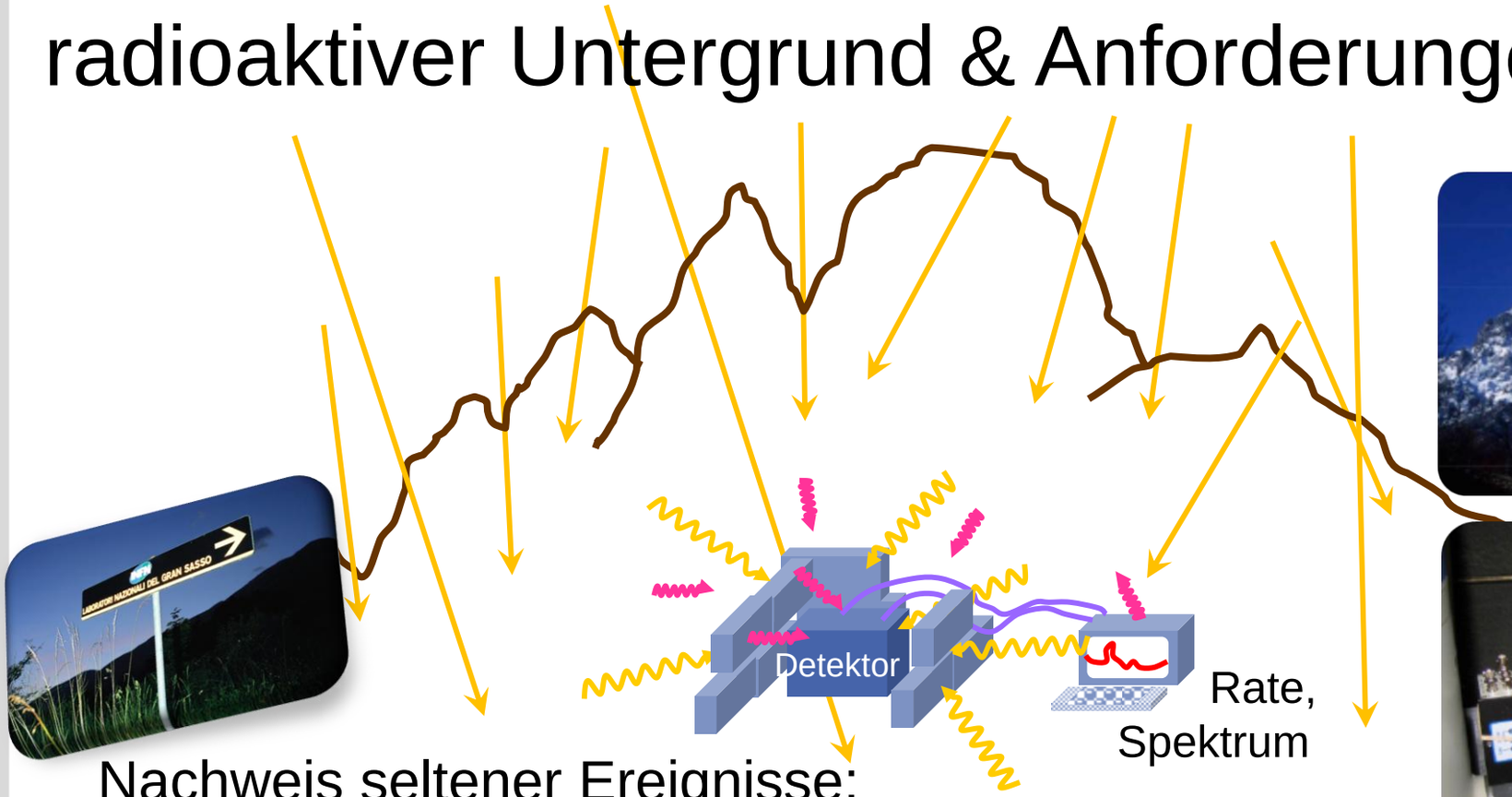
- Beispiele für Aktivitäten:
  - **extrem untergrundarme Materialien** für Astroteilchenphysik:
    ~100 nBq/kg für die Suche nach der dunklen Materie,
    0νßß-Zerfall (Neutrino-Physik)

Gestein:
10^{-6} g(Th) / g
Stahl:
10^{-9} g(Th) / g



- - menschlicher Körper: A ~ 3.7 kBq (^{40}K, ^{14}C)
  - Haus: Luft A ~ 1kBq durch Radon (^{222}Rn),
    100 m² Wände mit ~10^{-6} (^{232}Th)/g ⇨ 10^{10} γ´s/Jahr
  - Laborquellen/Praktikum: A ~ einige mCi
  - KATRIN ß-Zerfallsquelle: A ~ 10^{11} ß-Zerfälle/s (~ 4 Ci)
  - Eichquellen für solare Neutrinos: MCi, GCi

radioaktiver Untergrund & Anforderungen

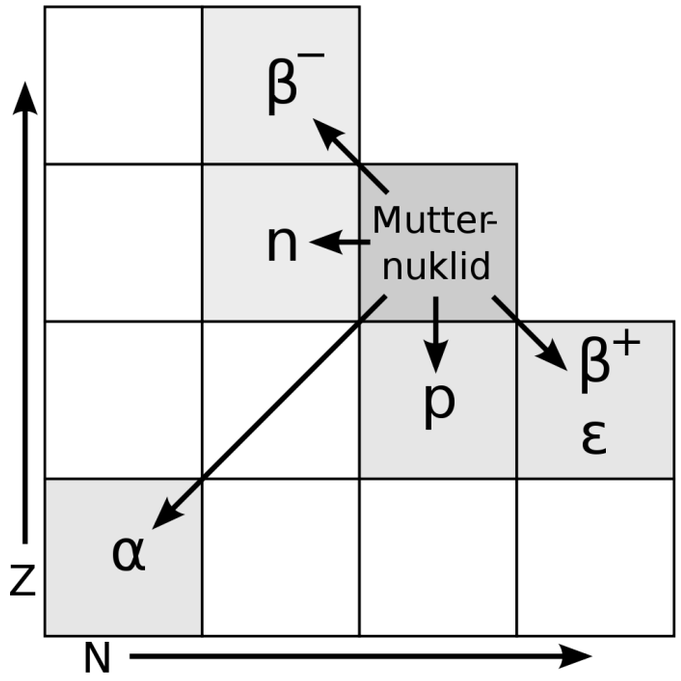


Nachweis seltener Ereignisse:
Untergrundlabor + Abschirmung

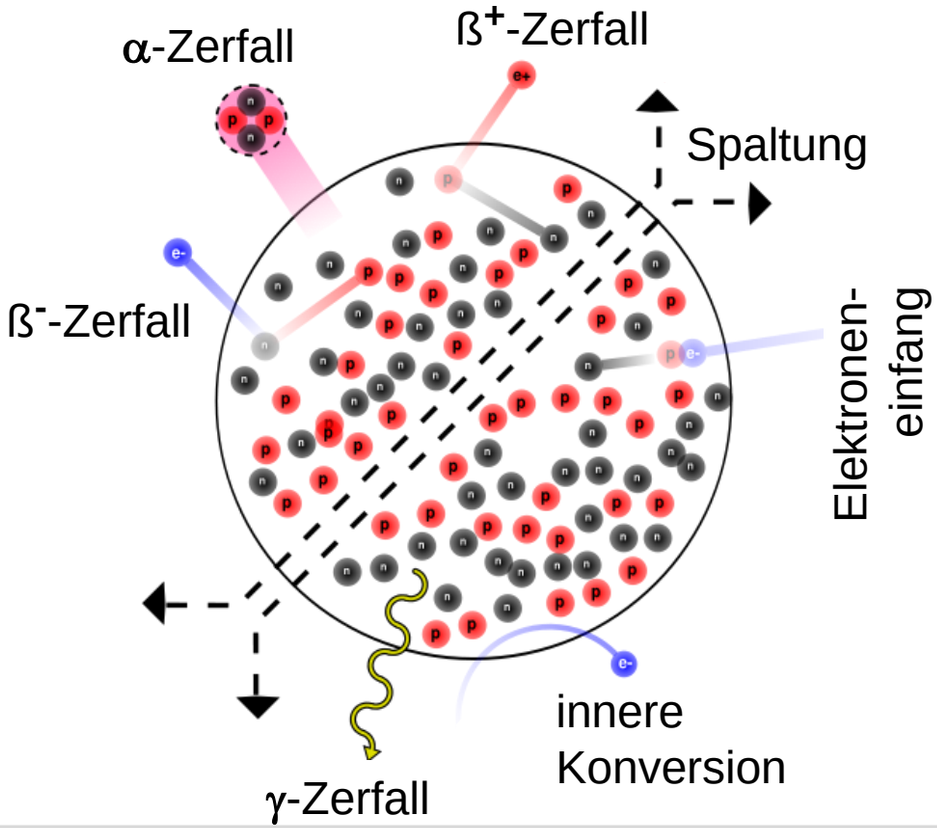
Quelle und Abschirmung	Ereignisse/kg/s	Ereignisse/kg/Tag
natürlicher Raumuntergrund	100	**10^7**
innerhalb einer Bleiabschirmung		**10^2**
kosmische Myonen an Erdoberfläche	0.1	**10^4**
Detektoren der Astroteilchenphysik		**10^{-2}**

Zerfallsarten – Übersicht

- ein instabiler Kern (Mutternuklid) kann sich über verschiedene Zerfallsarten in das Tochternuklid umwandeln:
  α-Zerfall: Änderung der Kernladung $\Delta Z = -2$, $\Delta A = 4$, schwere Kerne
  ß-Zerfall, Elektron-Einfang: Änderung $|\Delta Z| = 1$, $\Delta A = 0$
  γ-Zerfall: Änderung $\Delta Z = 0$, $\Delta A = 0$
  Spaltung: Änderung $\Delta Z \gg 1$, $\Delta A \gg 1$
  Teilchenzerfall: Emission p, n



Zerfallsarten von Kernen



Zerfälle mit Verzweigung

- radioaktive Zerfälle können in verschiedene Kanäle erfolgen

  Beispiele: $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ oder $\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu_e$ (Pionzerfall in Myon/Positron)

  $^{212}Bi \rightarrow {}^{212}Po + e^- + \nu_e$ (64%) oder $^{212}Bi \rightarrow {}^{208}Tl + \alpha$ (36%)

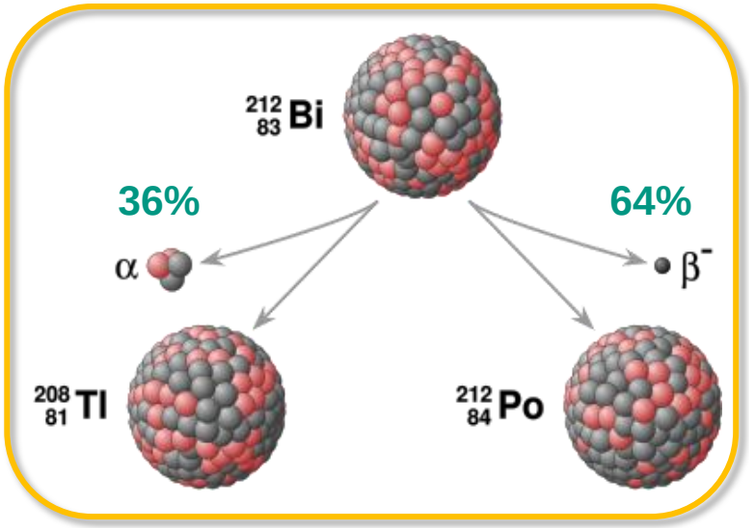
zeitliche Abnahme dN/dt des Mutterkerns/Ausgangsteilchens:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda_1 N - \lambda_2 N = N(0) \cdot e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$$

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

λ: totale Breite

λ_i: Partialbreite



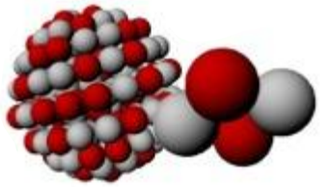
- Definition der Verzweigungsverhältnisse (**branching ratios**) f_1, f_2 :

$$f_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda} \qquad f_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda}$$

ß-Aktivität: $A_ß(t) = N \cdot \lambda \cdot f_1 = N \cdot \lambda_1$

α-Aktivität: $A_\alpha(t) = N \cdot \lambda \cdot f_2 = N \cdot \lambda_2$

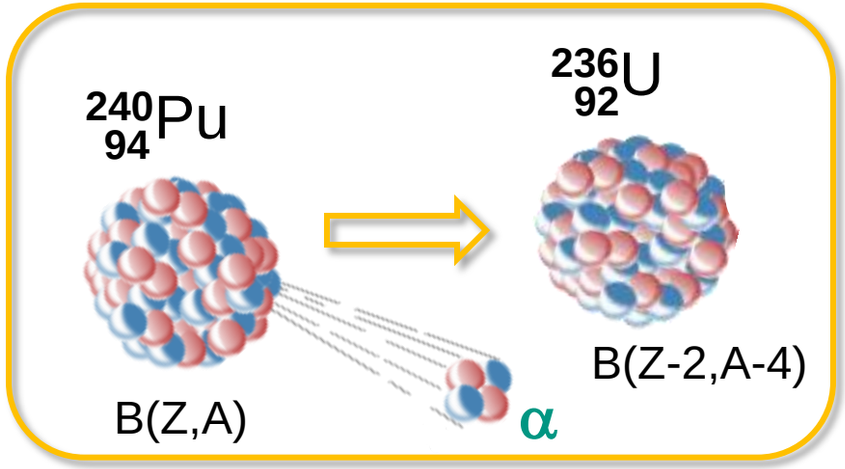
4.2 Alpha – Zerfall

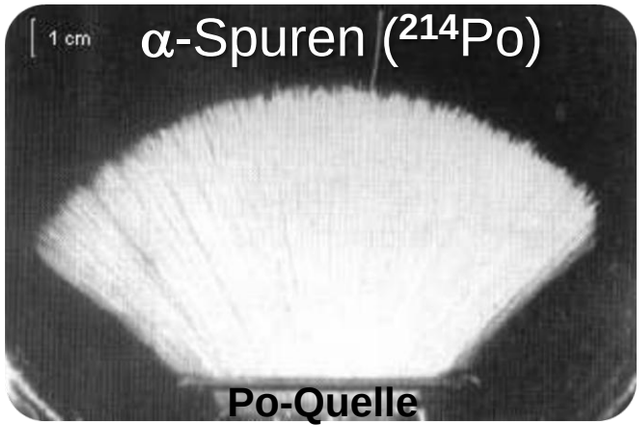


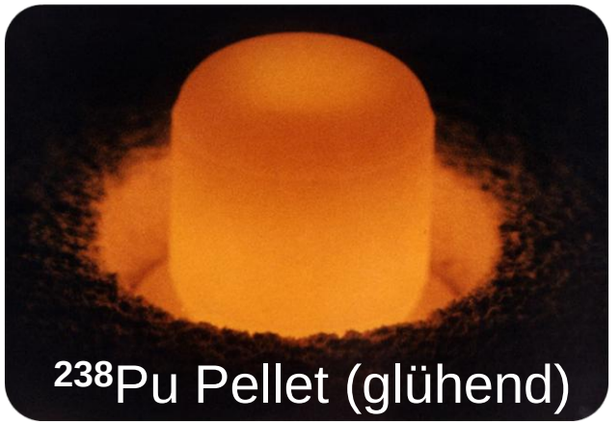
- schwere Kerne mit A > 150 (Sm) können durch **α-Emission** zerfallen – falls:
  $Q_\alpha = B(Z-2, A-4) - B(Z, A) + B_\alpha(28.3\ \text{MeV}) > 0$
  der Q-Wert Q_α ist entscheidend für die Halbwertszeit $t_{1/2}$ des Isotops:
  - langsamster α-Zerfall: $^{232}\text{Th} \rightarrow {}^{228}\text{Ra} + \alpha$ $\quad t_{1/2} = 1.4 \cdot 10^{10}$ a
  - schnellster α-Zerfall: $^{212}\text{Po} \rightarrow {}^{208}\text{Pb} + \alpha$ $\quad t_{1/2} = 3.5 \cdot 10^{-7}$ s

  10^{-24}

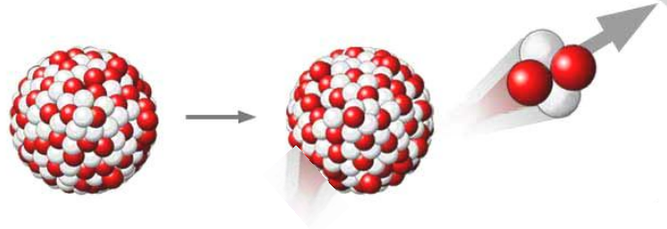
- **α-Teilchen sind mono-energetisch** (typischer Wert: E_{kin} ~ einige MeV)
  - Visualisierung in Nebelkammer-Aufnahmen: gleiche Reichweite
  - Alpha-Teilchen haben eine hohe Ionisationsrate & geringe Reichweite:
    ↳ radiologische Konsequenzen, Verwendung von Radionuklidbatterien





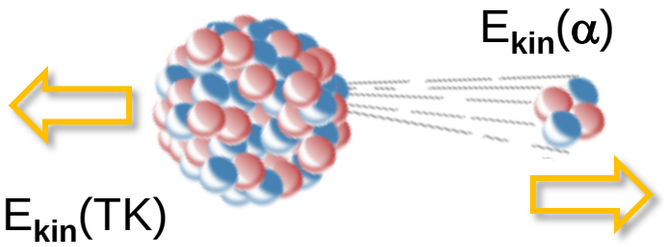


Alpha – Zerfall: kinetische Energien



- **Energiebetrachtung** beim α-Zerfall:
  - vor dem α-Zerfall: ruhender Mutterkern $E_{kin}(MK) = 0$
  - nach dem α-Zerfall: kinetische Energie α-Teilchen $E_{kin}(\alpha)$
    Rückstoß-Energie des Tochterkerns $E_{kin}(TK)$

mit Massenverhältnis $\boxed{\frac{M_\alpha}{M_{TK}} \cong \frac{4}{A-4}}$



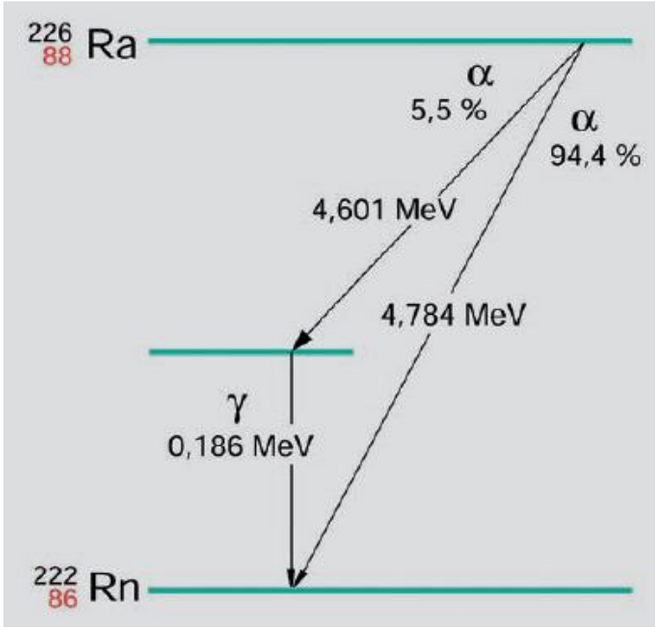
ergeben sich folgende kinetische Energien:

$$\boxed{E_{kin}(TK) \cong \frac{4}{A} \cdot Q_\alpha} \quad \boxed{E_{kin}(\alpha) \cong \frac{A-4}{A} \cdot Q_\alpha}$$

$$\boxed{E_{kin}(\alpha) >> E_{kin}(TK)}$$

- α-Zerfälle können auf angeregte Niveaus des Tochterkerns führen

^{226}Ra Zerfallsschema verschiedene α-Energien



α-Zerfallsketten

- es werden natürliche radioaktive Zerfalls-ketten (α– & ß- Zerfälle) der langlebigen **´primordialen´ Elemente ^{235}U, ^{238}U, ^{232}Th** aus SN-Explosionen beobachtet

Uranserie ^{238}U $A = 4 \cdot j + 2$

$^{238}U \rightarrow {}^{206}Pb$, $t_{1/2} = 4.5 \cdot 10^9$ a

Neptuniumserie ^{237}Np $A = 4 \cdot j + 1$

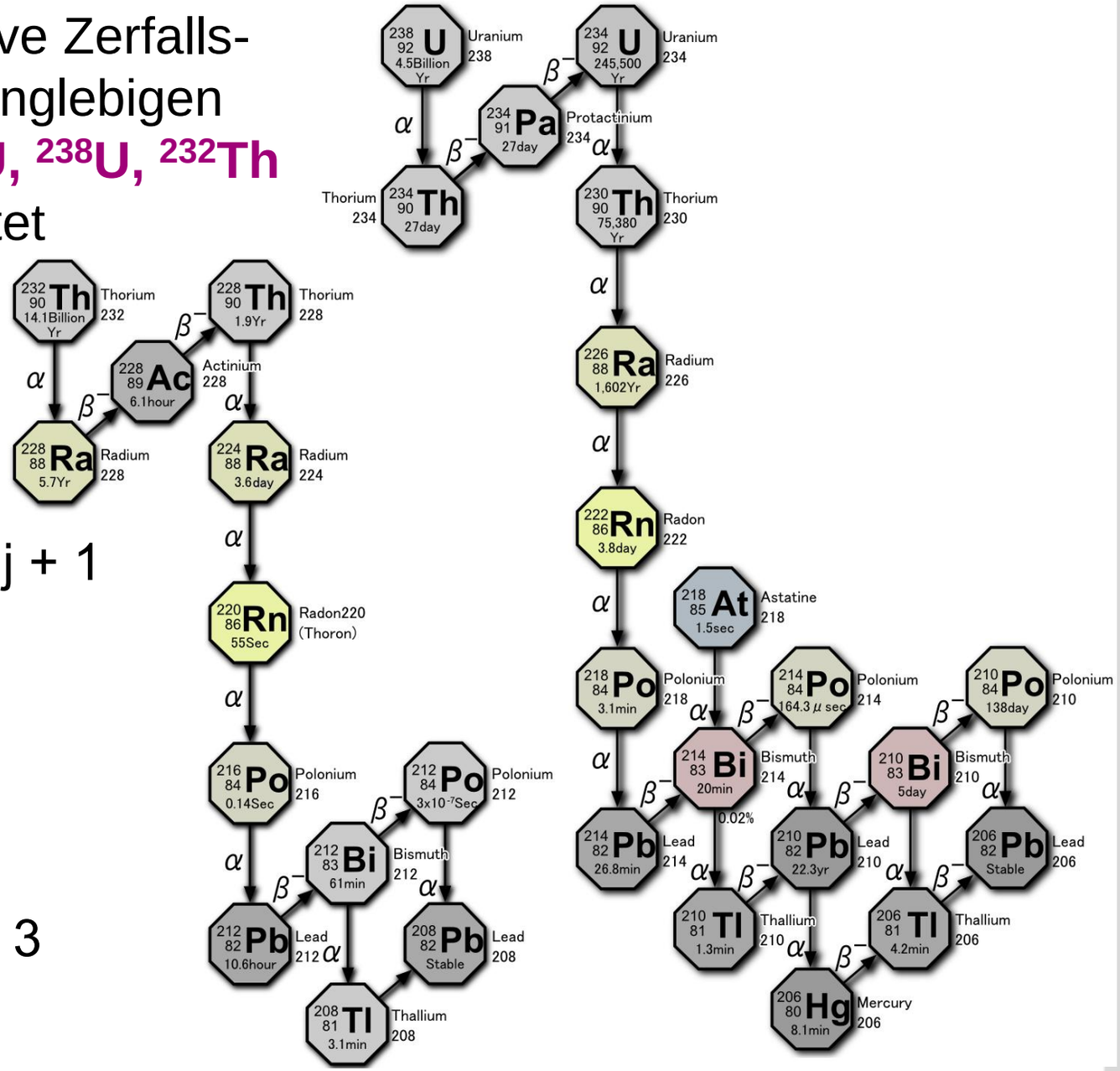
$^{237}Np \rightarrow {}^{209}Bi$, $t_{1/2} = 2.1 \cdot 10^6$ a

Thoriumserie ^{232}Th $A = 4 \cdot j$

$^{232}Th \rightarrow {}^{208}Pb$, $t_{1/2} = 1.4 \cdot 10^{10}$ a

Aktiniumserie ^{235}U $A = 4 \cdot j + 3$

$^{235}U \rightarrow {}^{207}Pb$, $t_{1/2} = 7.1 \cdot 10^8$ a



α-Zerfallsketten: radioaktives Gleichgewicht

- in **einer radioaktiven Zerfallskette** werden durch den Zerfall des Ausgangs-isotops (^{235}U) radioaktive Tochterkerne erzeugt, die ihrerseits wieder zerfallen:

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 \cdot N_1$$

Zerfall Mutterkern

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 \cdot N_1 - \lambda_2 \cdot N_2$$

$$\frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 \cdot N_2 - \lambda_3 \cdot N_3$$

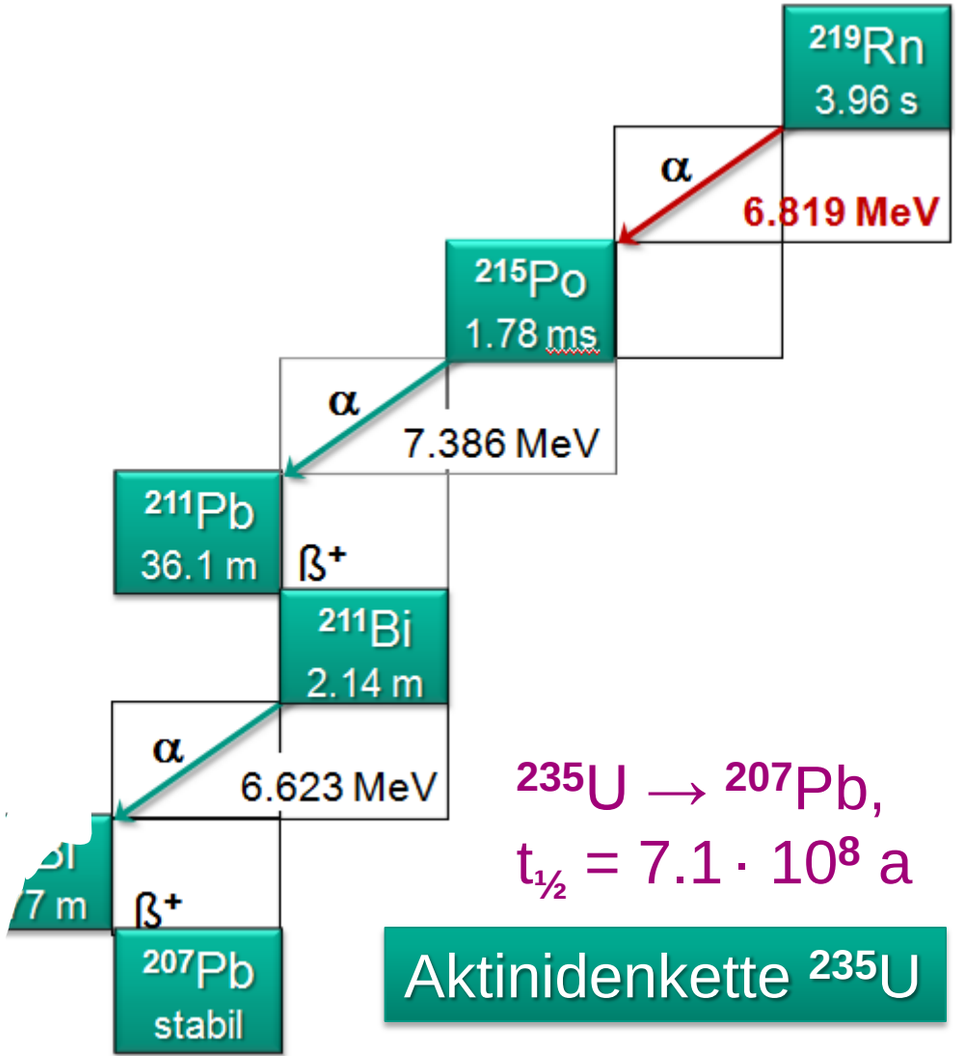
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Erzeugung Tochterkern & Zerfall Tochterkern

- in einem **säkularen Gleichgewicht** ist die Aktivität A_i aller Isotope der Kette identisch & die Häufigkeit N_i der Isotope konstant

$$\frac{dN_1}{dt} = \frac{dN_2}{dt} = \frac{dN_3}{dt} \quad d.h.\ A_1 = A_2 = A_3$$

$$\lambda_1 \cdot N_1 = \lambda_2 \cdot N_2 = \lambda_3 \cdot N_3$$



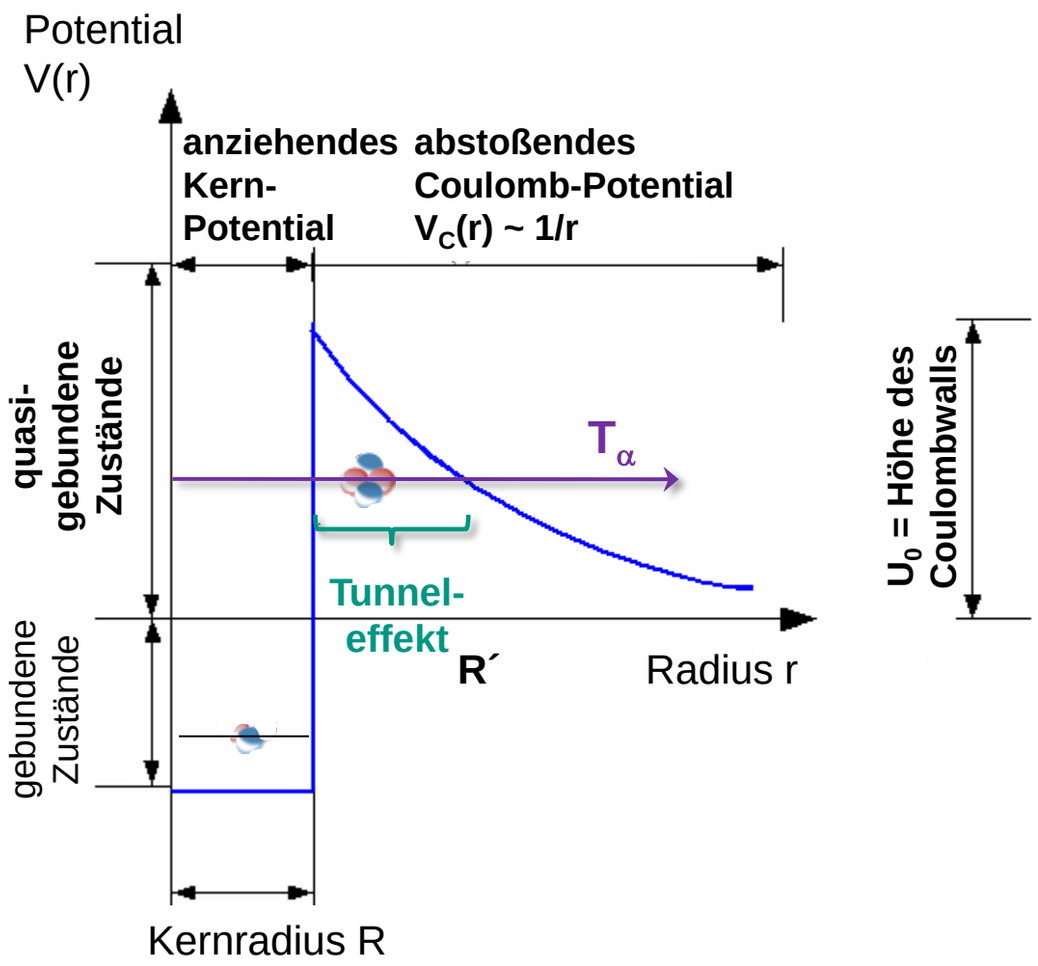
$^{235}U \rightarrow {}^{207}Pb$,

$t_{½} = 7.1 \cdot 10^8$ a

Aktinidenkette ^{235}U

der Tunneleffekt beim α-Zerfall

- die Emission eines α-Teilchens aus einem Kern beruht auf dem quantenmechanischen **Tunneleffekt** (1929: G. Gamov & E. Condon)
  - Beschränkung auf 1 dim. Schrödinger-Gleichung (effektive 1-dim. Potenziale)



numerisches Beispiel:

$^{232}Th \rightarrow {}^{228}Ra + {}^{4}He$

T_α = 4.05 MeV (kinet. Energie des α)

$\tau(^{232}Th) = 1.39 \cdot 10^{10}$ a

R = 7.4 fm

V_0 = 14 MeV (Z ~ 90, Coulombbarriere)

U_0 = 40 MeV [Tiefe des Kernpotenzials]

- Bestimmung der Transmissions-Wahrscheinlichkeit T durch die Coulombbarriere $V_C(r)$

der Tunneleffekt beim α-Zerfall

- Lösungen der 1-dim. Schrödinger-Gleichung: Wellenfunktionen Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3

$$\Psi_1 = \alpha_1 \cdot e^{ik_1 x} + \beta_1 \cdot e^{-ik_1 x}, \quad k_1 = \sqrt{2mT_\alpha}$$

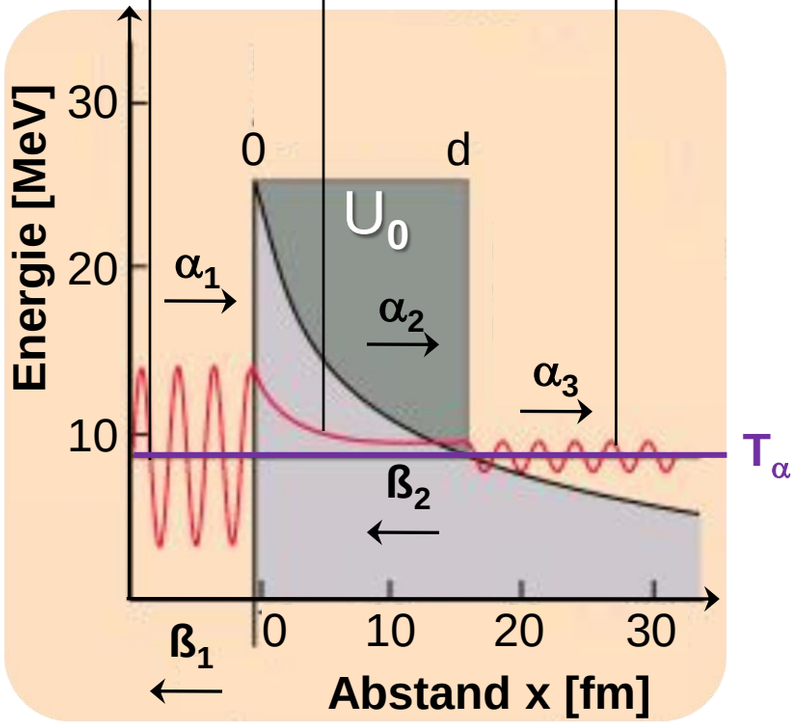
aus-/einlaufende Welle vor Barriere

$$\Psi_2 = \alpha_2 \cdot e^{-k_2 x} + \beta_2 \cdot e^{k_2 x}, \quad k_2 = \sqrt{2m \cdot (U_0 - T_\alpha)}$$

in Barriere

$$\Psi_3 = \alpha_3 \cdot e^{ik_3 x}, \quad k_3 = \sqrt{2mT_\alpha}$$

auslaufende Welle nach Barriere



Stetigkeitsbedingungen bei

$x = 0: \quad \Psi_1 = \Psi_2 \quad \Psi'_1 = \Psi'_2$

$x = d: \quad \Psi_2 = \Psi_3 \quad \Psi'_2 = \Psi'_3$

(für α-Zerfälle mit $\Delta\ell = 0$)

Transmissionskoeffizient T

$$T = \left|\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right|^2 = \left(1 + \frac{U_0^2}{U_0^2 - (2T_\alpha - U_0)^2 \cdot \sinh^2 k_2 d}\right)^{-1}$$

der Tunneleffekt beim α-Zerfall

- Lösungen der 3-dim. Schrödinger-Gleichung: Wellenfunktionen Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3
  Zerlegung der Coulomb-Schwellen $V_c(r)$ mit Breite dr

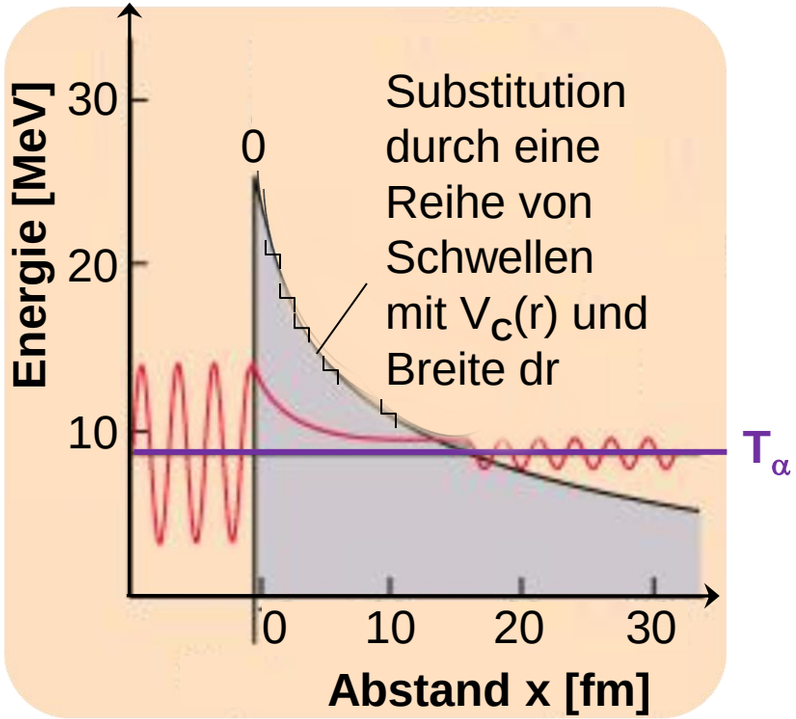
$$T \propto e^{-G}$$

mit

$$G = 2 \cdot \pi \cdot Z \cdot \alpha \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot m_\alpha}{T_\alpha}}$$

Transmissions-wahrscheinlichkeit

Gamov-Faktor für α-Teilchen mit z = 2 Masse m_α und kinetischer Energie T_α



- Berechnung der Zerfallskonstanten λ:

$$\lambda = \lambda_0 \cdot \frac{v}{2R} \cdot T$$

λ_0: Wahrscheinlichkeit der Bildung eines α

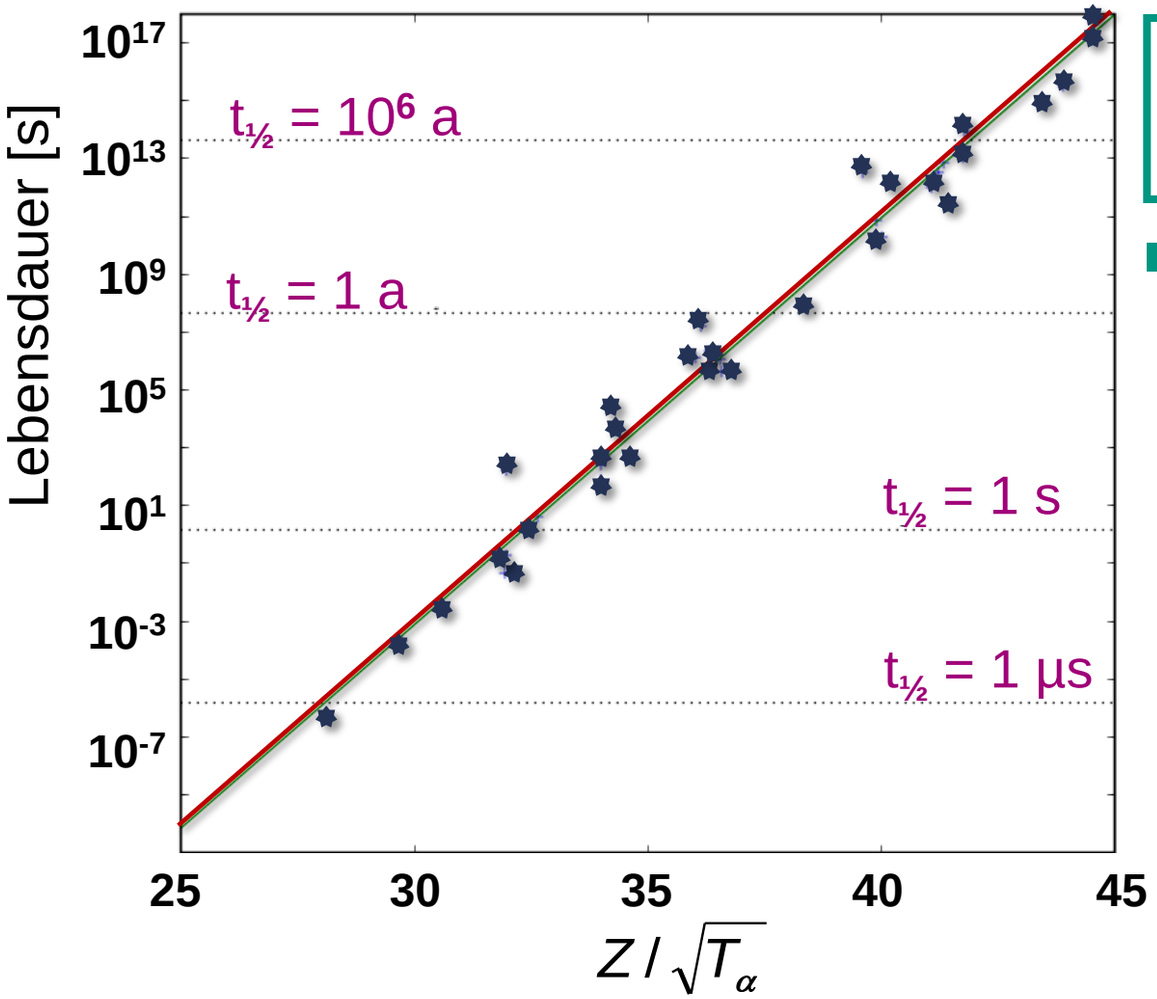
v/2R: Anzahl der Tunnelversuche / Zeiteinheit

T: Transmissionswahrscheinlichkeit

$$\lambda = C(T_\alpha, R) \cdot e^{-G}$$

Geiger – Nuttall Regel

- der Gamov-Faktor G wird mit ansteigender α-Energie T_α rasch kleiner, dadurch reduziert sich die Halbwertszeit $t_{1/2}$ für den Zerfall sehr stark
  Auftragung der Lebensdauer/Halbwertszeit über Faktor $Z / \sqrt{T_\alpha}$



$$\ln(\tau / \tau_0) = -C' + a \cdot \frac{Z}{\sqrt{T_\alpha}}$$

Geiger-Nuttall Regel

- bereits 1911 von Geiger & Nuttall empirisch gefundene Regel zwischen der Reichweite von α-Teilchen (T_α) & der gemessenen Halbwertszeit $t_{1/2}$ des Zerfalls

Kern	$t_{1/2}$	T_α
^{212}Po	0.3 µs	8.78 MeV
^{224}Ra	3.6 Tage	5.7 MeV
^{232}Th	$1.39 \cdot 10^{10}$a	4.05 MeV