

### 4.3 Rutherford-WQ II (Forts.)

Der Formfaktor ist Fouriertransformierte der norm. Ladungsfunktion:

$$F(\vec{q}) = \int f(\vec{x}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}/\hbar} d^3x$$

Trivialster Ansatz für den Rutherford-WQ:  $f(\vec{x}) = \delta(\vec{x})$

Der Formfaktor ist dann gerade Eins:  $F(\vec{q}) = 1$

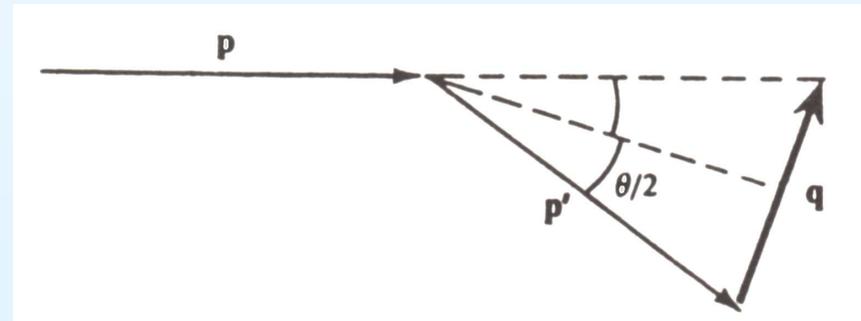
$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_R = \frac{4 Z^2 \alpha^2 (\hbar c)^2 E'^2}{\underbrace{|\vec{q} c|^4}_{\text{Photonpropagator} = \frac{1}{Q^2}}}$$

$$E = E', \quad |\vec{p}| = |\vec{p}'|$$

$$|\vec{q}| = 2 |\vec{p}| \sin \frac{\Theta}{2}$$

Relat. Rutherford-Gleichung

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_R = \frac{4 Z^2 \alpha^2 (\hbar c)^2}{4 E^2 \sin^4 \frac{\Theta}{2}}$$



[Klassisch:  $\vec{p} = m\vec{v}$ ,  $E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$ ,  $E' \simeq m c^2$ ]

## 4.3 Rutherford-WQ II (Forts.)

Feldtheoretisch:

$$\lambda = \frac{\hbar}{|\vec{q}|} = \frac{\hbar}{|\vec{p}| 2 \sin \frac{\Theta}{2}}$$

$\lambda \gg$  Kerngröße

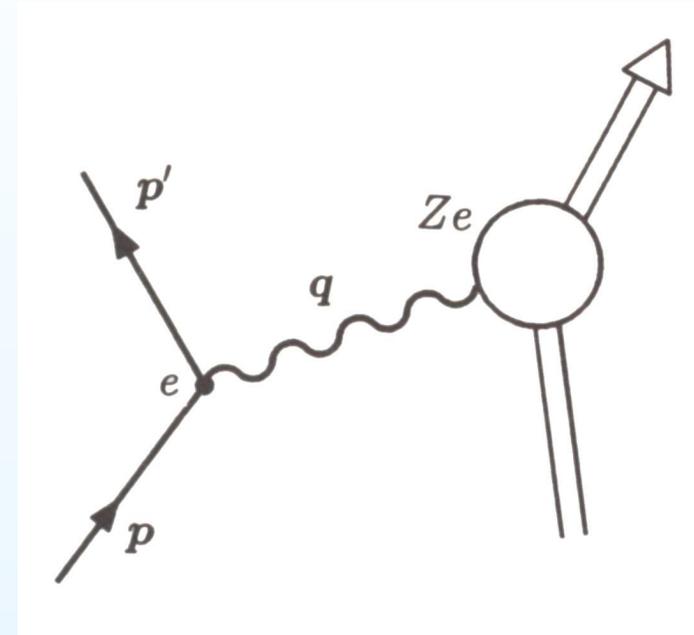
Rutherford-WQ

$\lambda \simeq$  Kerngröße

Streuung an ausgedehnter Ladung

$\lambda \ll$  Kerngröße

Kernbausteine werden sichtbar



Allerdings: Bisher alles ohne Spin gerechnet!

Mit e-Spin (und spinlosem Target):

„Mott-WQ“ führt zu Modifikation des  $\sigma_R \rightarrow \sigma_{Mott}$

## 4.3 Mott-Streuung (e-Spin)

Ohne Rückstoß

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott}^* = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ru.} \cdot \underbrace{\left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\Theta}{2}\right)}_{\cos^2 \frac{\Theta}{2} \text{ für } \beta \rightarrow 1}$$

demnach ergibt sich ein schnellerer Abfall für große Streuwinkel

Plausibilitätsbetrachtung für Extremfall  $\Theta = 180^\circ$ :

Aus Dirac Gleichung folgt

$$H = \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{|\vec{s}| \cdot |\vec{p}|} = \pm 1 \hat{=} \text{„Helizität“}$$

$H=+1$  Spin in Bewegungsrichtung, „rechtshändiges Teilchen“

$H=-1$  Spin entgegen Bewegungsrichtung, „linkshändiges Teilchen“

H-Erhaltung verlangt Umkehrung des Spins bei  $180^\circ$ -Streuung

bei Spinlosem Target nicht möglich

$\Rightarrow$  zusätzliche Unterdrückung gegenüber  $\sigma_{Ru.}$

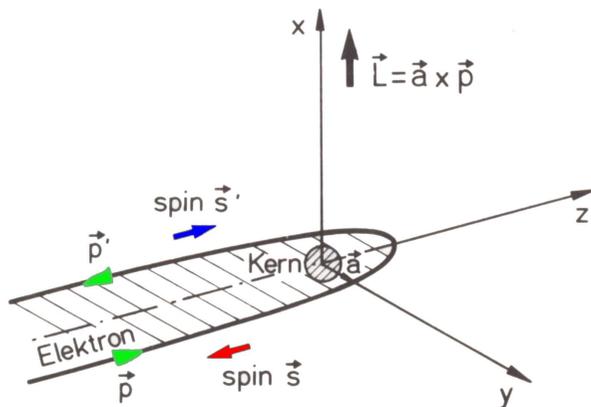
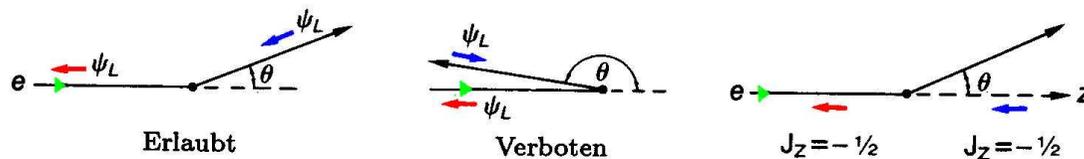


Abb. 5.3. Die Helizität  $h = \vec{s} \cdot \vec{p} / (|\vec{s}| \cdot |\vec{p}|)$  bleibt im Grenzfalle  $\beta \rightarrow 1$  erhalten. Das bedeutet, daß die Spinprojektion auf die z-Achse bei Streuung um  $180^\circ$  das Vorzeichen ändern müßte. Dies ist jedoch bei einem spinlosen Target aufgrund der Drehimpulserhaltung nicht möglich.



# 5. Formfaktoren

## Experimenteller Befund:

$\sigma_{exp} \simeq \sigma_{Mott}$  für  $|\vec{q}|$  klein

$\sigma_{exp} < \sigma_{Mott}$  für größere  $|\vec{q}|$

höhere Auflösung  $\Rightarrow e^-$  „sieht“ nur noch einen Teil von  $Ze$ , daher sinkt der WQ

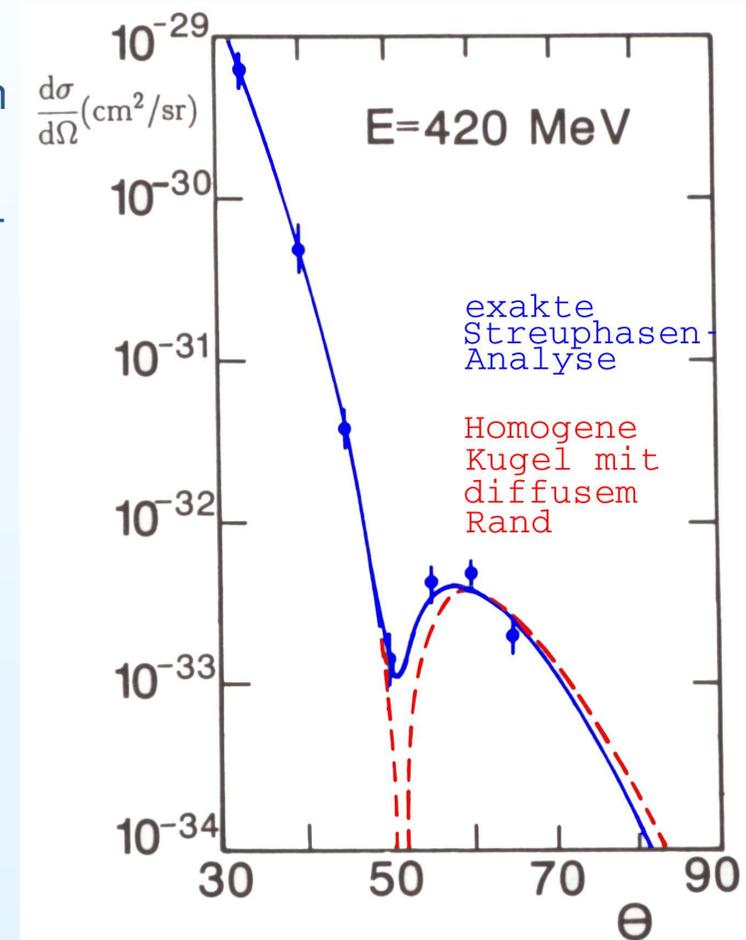
Die räumliche Ausdehnung der Kerne und Nukleonen werden relevant

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{exp} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott}^* \cdot |F(\vec{q}^2)|^2$$

$F(\vec{q}^2)$  = FT der Ladungsverteilung  $f(\vec{x})$

$$F(\vec{q}^2) = \int e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}/\hbar} f(\vec{x}) d^3x$$

Eine der ersten FF-Messungen:  
WQ-Messung von  $^{12}C$  (Hofstadter 1957)



Seit 1950, Beginn bei 500MeV, Stanford

## 5. Formfaktoren (Forts.)

Wir setzen Kugelsymmetrie voraus:  $f(\vec{x}) = f(|\vec{x}|) = \hat{f}(r)$

Nach **Integration** über den Raumwinkel ergibt sich

$$F(\vec{q}^2) = 4\pi \int f(r) \frac{\sin(|\vec{q}| r/\hbar)}{|\vec{q}| r/\hbar} r^2 dr$$

mit der **Normierung** (in Kugelkoordinaten auszuführen)

$$1 \equiv \int f(\vec{x}) d^3x = \int_{r=0}^{\infty} \int_{\cos \vartheta=-1}^{+1} \int_{\phi=0}^{2\pi} f(r) r^2 d\phi d(\cos \vartheta) dr = 4\pi \int_0^{\infty} f(r) r^2 dr$$

**Im Prinzip** ist die Rücktrafo möglich,

$$f(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int F(\vec{q}^2) e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}/\hbar} d^3q$$

aber da nur Teil des  $|\vec{q}|$ -Bereiches gemessen und der WQ sehr schnell mit  $q^2$  abfällt

⇒ iteratives Verfahren mit geeigneten Modellparametern besser

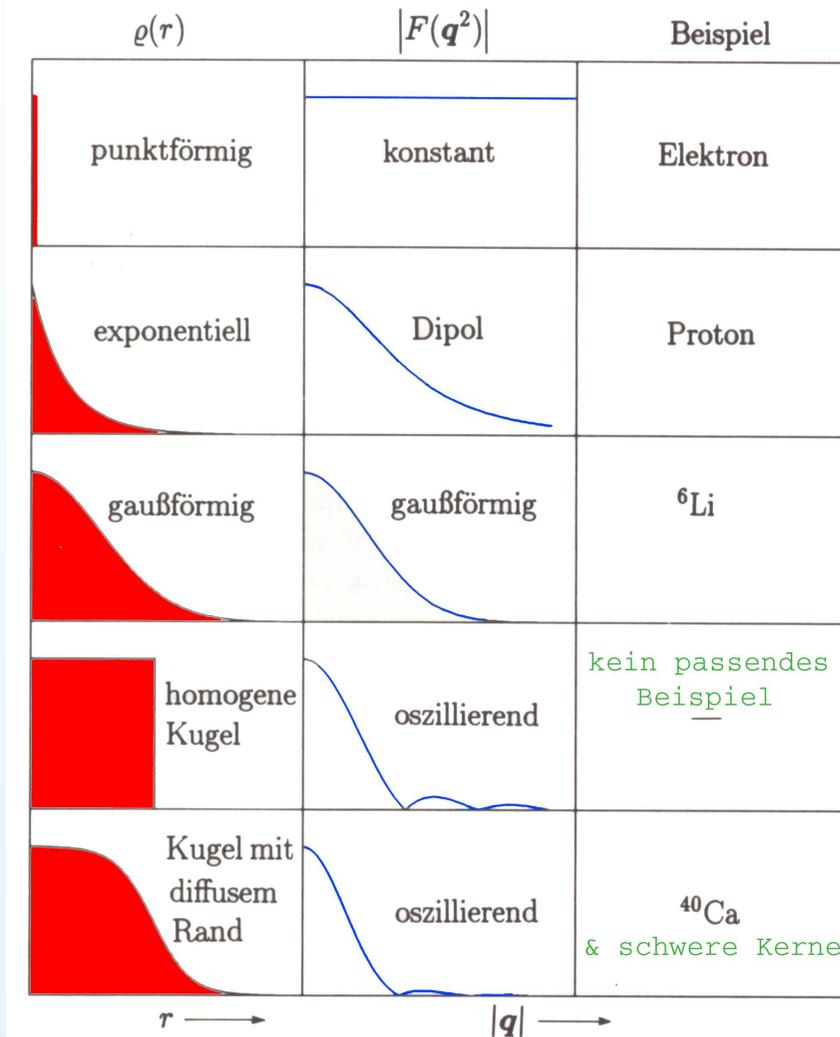
# 5. Formfaktoren (Forts.)

Analytische Berechnungen sind für einfache  $f(r)$  möglich

**Tabelle 5.1.** Zusammenhang zwischen Ladungsverteilung und Formfaktor für einige kugelsymmetrische Ladungsverteilungen in Bornscher Näherung

Ladungsverteilung $f(r)$	Formfaktor $F(q^2)$
Punkt $\delta(r)/4\pi$	1 konstant
exponentiell $(a^3/8\pi) \cdot \exp(-ar)$	$(1 + q^2/a^2\hbar^2)^{-2}$ Dipol
Gauß $(a^2/2\pi)^{3/2} \cdot \exp(-a^2r^2/2)$	$\exp(-q^2/2a^2\hbar^2)$ Gauß
homogene Kugel $\begin{cases} 3/4\pi R^3 & \text{für } r \leq R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases}$	$3\alpha^{-3}(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)$ mit $\alpha =  q R/\hbar$ oszillierend

- „weich“ abfallendes  $f(r)$   
 $\Rightarrow$  glatter Verlauf von  $F(\vec{q}^2)$
- Je ausgedehnter das Objekt  
 $\Rightarrow$  stärkerer Abfall von  $d\sigma/d\Omega$  mit  $\vec{q}^2$
- Target punktförmig  
 $\Rightarrow F = const = 1$



## 5. Formfaktoren (Forts.)

Streuung an scharf begr. Körpern

⇒ Beugungsminima Lage ⇔ Größe

Homogene Kugel als Beispiel:

$$f(0) = \frac{3}{4\pi R^3}$$

$$F(\vec{q}^2) = \frac{3(\sin a - a \cos a)}{a^3}$$

mit  $a = q R / \hbar$  ergibt sich das erste Minimum bei

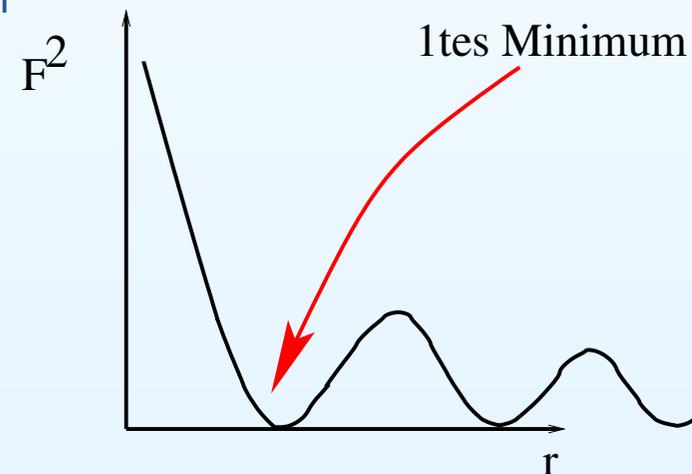
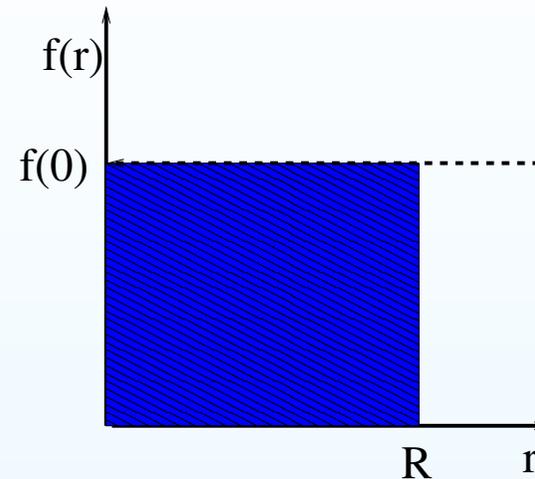
$$\frac{|\vec{q}| \cdot R}{\hbar} \simeq 4.5$$

$$R \simeq \frac{4.5 \hbar}{|\vec{q}|} = \frac{4.5 \hbar}{|\vec{p}| 2 \sin \frac{\Theta}{2}}$$

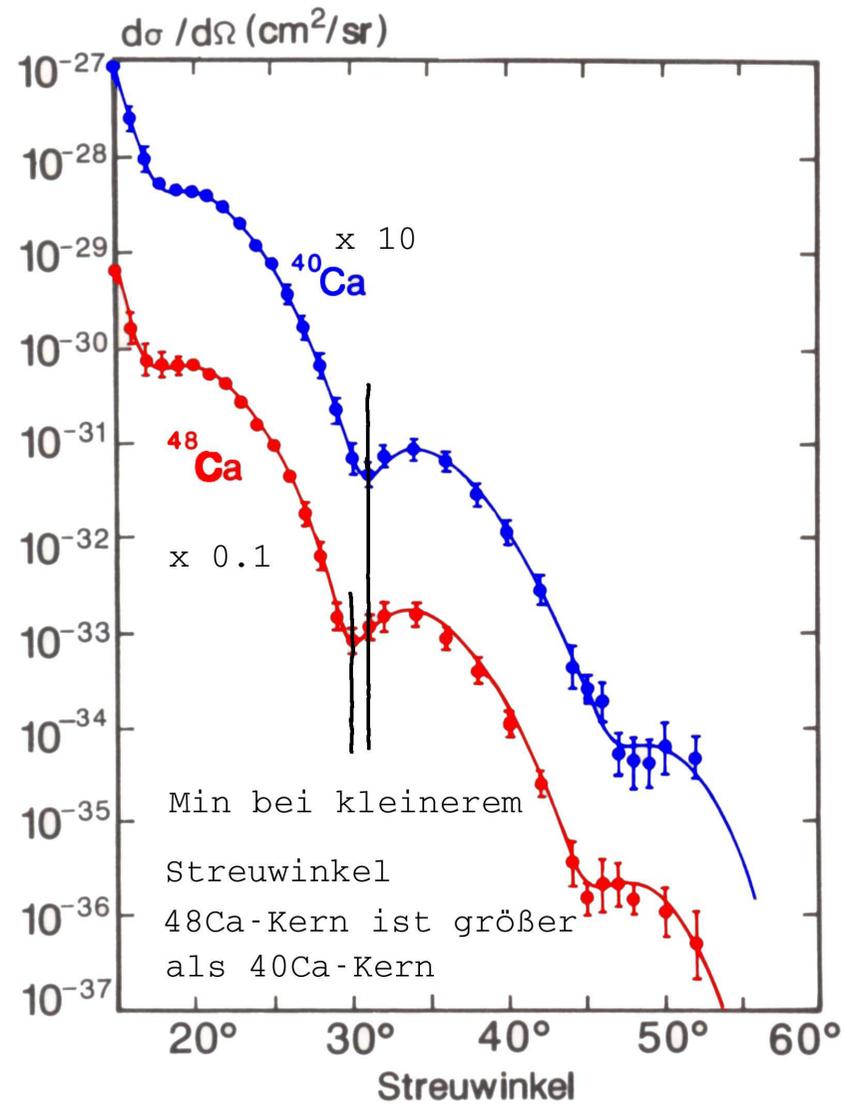
Bsp.: Hofstadter 1957

420 MeV  $e^-$  an  $^{12}\text{C}$ : WQ hat Min. bei  $\Theta = 51^\circ$

$$R(\Theta = 51^\circ) \simeq \frac{4.5 \cdot 197 \text{ MeV fm}}{420 \text{ MeV}/c \cdot c \cdot 2 \sin 25.5^\circ} = 2.45 \text{ fm}$$



## 5. Formfaktoren (Forts.)



## 5. Formfaktoren (Forts.)

Kernradius kann auch aus dem WQ-Verlauf für  $q^2 \rightarrow 0$  erhalten werden, dann

$\frac{|\vec{q}| \cdot R}{\hbar} \ll 1$  und  $F(\vec{q}^2)$  kann in Potenzen von  $|\vec{q}|$  entwickelt werden.

$$\begin{aligned}
 F(\vec{q}^2) &= \int f(\vec{x}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{i|\vec{q}| |\vec{x}| \cos \vartheta}{\hbar} \right)^n d^3x \quad \text{mit } \vartheta = \angle(\vec{x}, \vec{q}) \\
 &= \int_0^{\infty} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} f(r) \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{|\vec{q}| r}{\hbar} \right)^2 \cos^2 \vartheta + O(|\vec{q}|^4) \right] d\phi d\cos \vartheta r^2 dr \\
 &= 4\pi \int_0^{\infty} f(r) r^2 dr - \underbrace{\frac{1}{6} \frac{\vec{q}^2}{\hbar^2} 4\pi \int f(r) r^4 dr}_{=:\langle r^2 \rangle} + O(|\vec{q}|^4)
 \end{aligned}$$

Def. des **mittleren quadratischen Ladungsradius**:  $\langle r^2 \rangle := 4\pi \int_0^{\infty} r^2 f(r) r^2 dr$

$$F(q^2) = 1 - \frac{1}{6} \frac{q^2 \langle r^2 \rangle}{\hbar^2} + \dots$$

$$\langle r^2 \rangle = -6\hbar^2 \left. \frac{dF(q^2)}{dq^2} \right|_{q^2=0}$$

Messung bis zu sehr kl.  $q^2$  notwendig!

## 5. Formfaktoren (Forts.)

### Experimentelle Befunde:

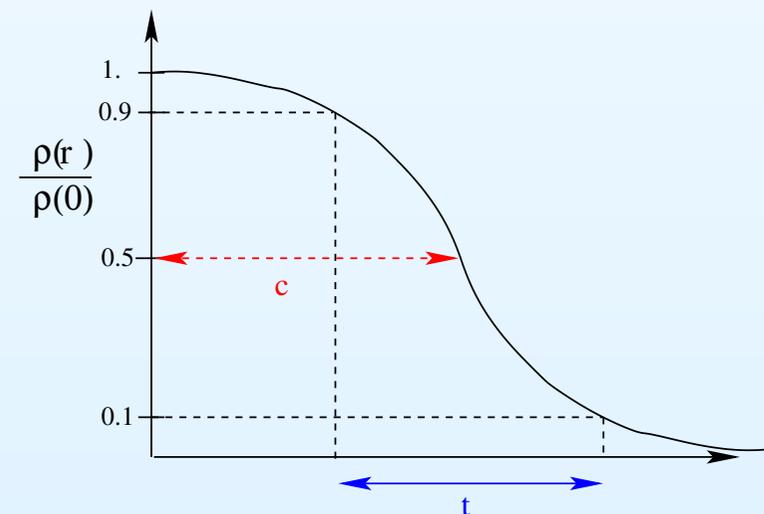
- Ladungsdichte  $\rho(r)$  im Kerninneren  $\simeq const$
- $\rho(r)$  fällt im Randbereich („Hautdicke“  $t$ ) auf Null ab
- $\rho(0)$  sinkt mit  $A$  leicht ab, jedoch bleibt  $\rho(0) \times \frac{A}{Z} \simeq const$ ,  
d.h. Nukleonendichte  $\rho_N \simeq 0.17 \text{ Nukl./fm}^3 \simeq const$
- Leichte Kerne ( ${}^6,7\text{Li}$ ,  ${}^9\text{Be}$ ,  ${}^4\text{He}$ ,  ${}^1\text{H}$ ):  $\rho(r) \simeq$  gaussförmig
- $\exists$  elliptische Kerne  $\Rightarrow$  Rand erscheint diffuser
- Empirische Beschreibung durch **Fermi-Verteilung**:

$$\rho(r) = \frac{\rho(0)}{1 + e^{(r-c)/a}}$$

$\simeq 1.07 \text{ fm} \cdot A^{1/3}$        $\simeq 0.54 \text{ fm}$

$$\Rightarrow \sqrt{\langle r^2 \rangle} = r_0 \cdot A^{1/3} \quad \text{mit } r_0 = 0.94 \text{ fm}$$

für schwere Kerne



## 5. Formfaktoren (Forts.)

Betrachtet man den Kern als „äquivalente“ homogen geladene Kugel mit Radius  $R$ :

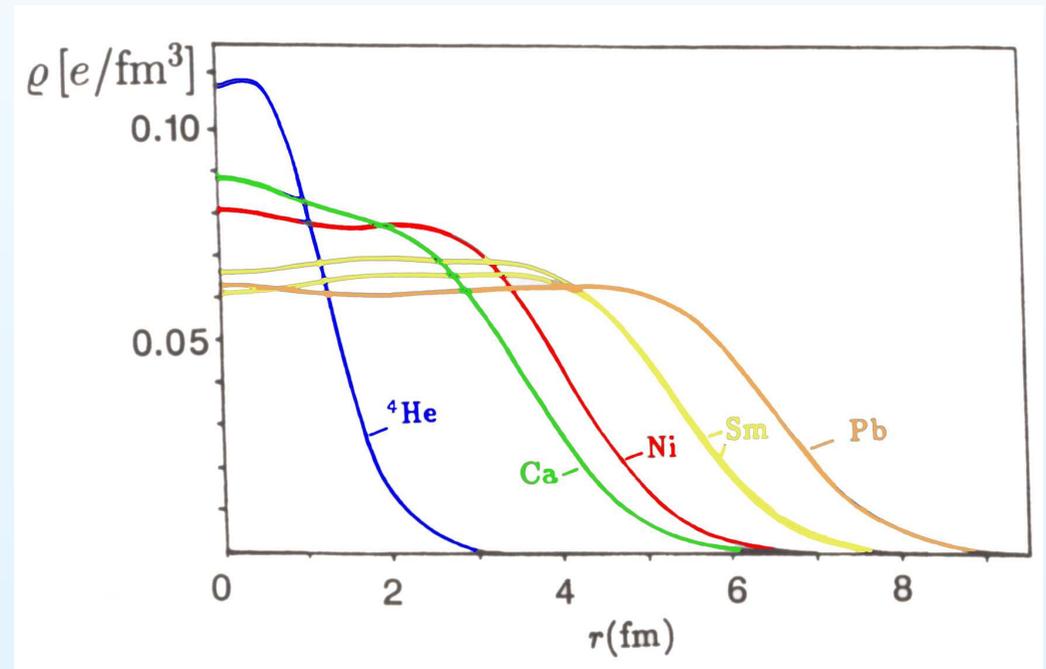
$$R^2 = \frac{5}{3} \langle r^2 \rangle$$

$$R = 1.21 \text{ fm} \cdot A^{1/3}$$

wird in BW-Massenformel verwendet

„Hautdicke“

$$\begin{aligned} t &= r(\rho = 0.1\rho_0) - r(\rho = 0.9\rho_0) \\ &= 2a \cdot \ln 9 \simeq 2.4 \text{ fm} \end{aligned}$$



# Impulsspektrum der unter $\Theta = 65^\circ$ gestreuten $e^-$

