

# Kern- und Teilchenphysik

SS2012

Do. 10.5.2012

Vorlesung-Website

Johannes Blümer

Vertretung: Ralf Ulrich

KIT-Centrum Elementarteilchen- und Astroteilchenphysik KCETA



## ■ Eigenschaften von Atomkernen

- Mott-Streuung (Erinnerung & Ausbau)
- Formfaktor
- Kernradien systematisch
- Masse, Bindungsenergie

## ■ Kernmodelle

- Tröpfchenmodell
- Schalenmodell

## ■ Stabilität und Zerfälle

- Alpha-Zerfall
- Beta-Zerfall
- Gamma-Zerfall

nächste Woche

# Mott-Streuung



Nevill F. Mott (1905–1996)

Grenzen der Rutherford-Streuung durch Ausdehnung des Projektils, starke WW bei kleinen Abständen ...

→ Besser mit punktförmigen Projektilen  $e^+$ - oder  $\mu^+$ -  
notwendige Energien:  $\lambda = 2\pi\hbar/p \sim \text{Kornradius} \Rightarrow 1\text{fm}^{-1} \hat{=} 200\text{MeV}/c$

→ Elektronen ( $\gamma \sim 400$ ) sind hochrelativistisch

→ Spin der Projektilen ( $1/2$ , Fermionen)

Rutherford Streuung auf e-Kern anwenden:

Impulsübertrag:  $\vec{q} = \vec{p} - \vec{p}'$

elastische Streuung:  $|\vec{p}| = |\vec{p}'| \rightarrow \vec{q}^2 = q^2 = \vec{p}^2 + \vec{p}'^2 - 2pp' \cos \theta = 2p^2(1 - \cos \theta)$   
 $q^2 = 4p^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$

nicht-relativistische  $e^-$ :  $T = \frac{p^2}{2m_e}$

$$\Rightarrow \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_R = \frac{Z^2 \alpha^2 16 p^4}{16 T^2 q^4} = \frac{Z^2 \alpha^2}{q^4} 4 m_e^2$$

relativistisch  $m_e \rightarrow$  totale Energie  $E = T + m_e$  und Spin:  $\times \cos^2 \frac{\theta}{2}$

QM Dirac-Gleichung  $\Rightarrow$  Spinprojektion auf  $\vec{p}$ -Richtung (Helizität)  
 kann sich nicht ändern  $A = \frac{\vec{p} \cdot \vec{S}}{|\vec{p}| |\vec{S}|} = \text{const}$

Rückwärtsstreuung ist verboten  $\cos^2 \frac{\theta}{2} \rightarrow 0$   
 $\theta \Rightarrow 180^\circ$

Daraus folgt die VQ für Mott Streuung

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{Mott}}^* = \frac{4 z^2 \alpha^2 E^2}{q^4} \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

- (\*) ohne Kernrückstoß
- punktförmiges Projektill
  - Spin  $1/2$
  - hochrelativistisch
  - kein punktförmig Spin 0
  - Kernladung "nicht zu groß"  
 $|az| \ll 1$

Mott-Formel mit Rückstoß

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{Mott}} = \frac{4 z^2 \alpha^2 E'^2}{Q^4} \frac{E'}{E} \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

Rückstoßfaktor:  $\frac{E'}{E} = 1 + \frac{2 E \sin^2 \theta/2}{M_{\text{Kern}}}$

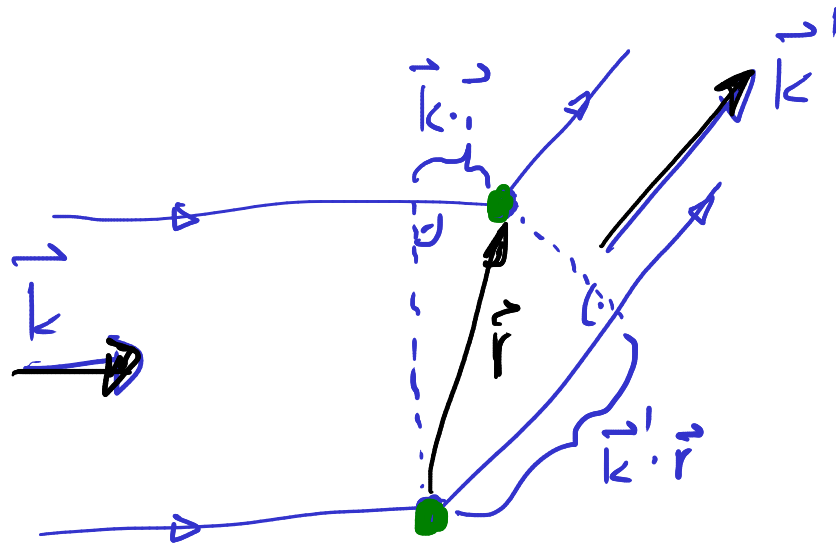
$\vec{q} \rightarrow$  4er-Impulsübertrag

$$q^2 = (E - E')^2 - (\vec{p} - \vec{p}')^2 \approx 4 E E' \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

Definiere:  $Q^2 = -q^2$

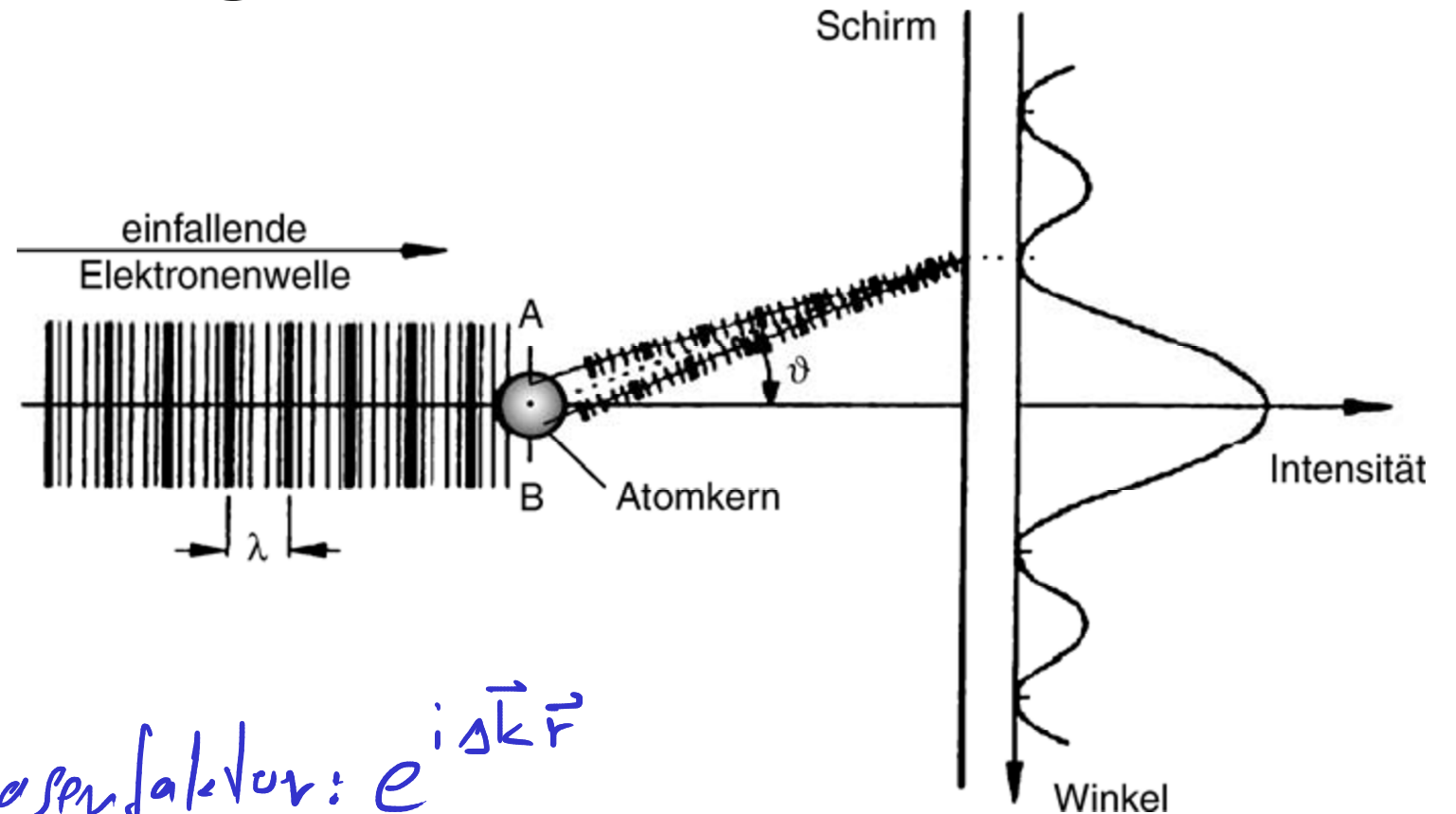


# Streuung und Auflösung



● : Streuzentren

$$\Delta l = -\vec{k} \cdot \vec{r} + \vec{k}' \cdot \vec{r} = \Delta \vec{k} \cdot \vec{r} \Rightarrow \text{Phasenfaktor: } e^{i \Delta \vec{k} \cdot \vec{r}}$$



[B-N]

Streuamplitude einer Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r})$ :

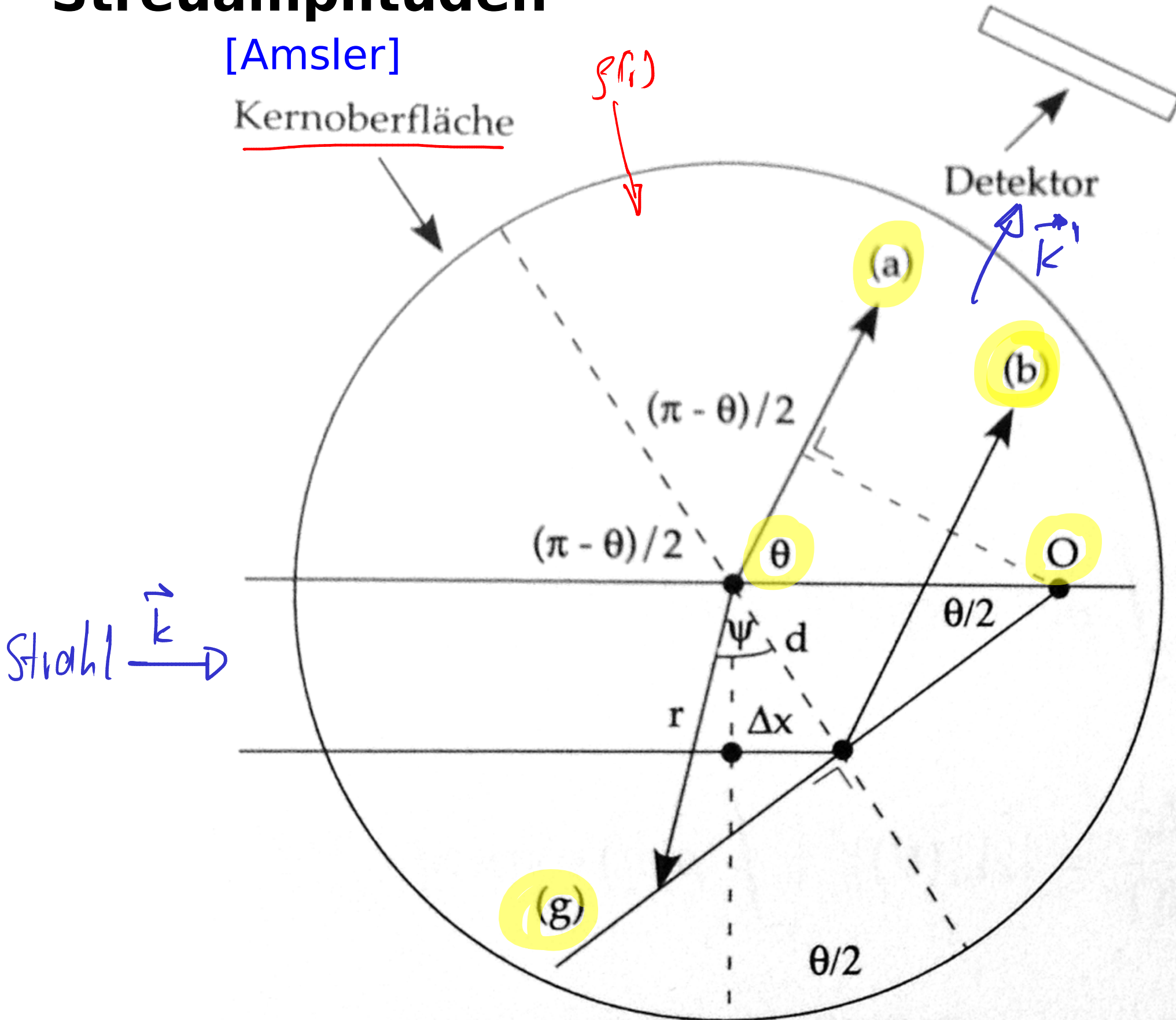
$$A_{\rho}(\Delta \vec{k}) = A_{\text{Punkt}}(\Delta \vec{k}) \cdot \underbrace{\int e^{i \Delta \vec{k} \cdot \vec{r}} \rho(\vec{r}) dV}_{F(\Delta \vec{k})}$$

Phasenfaktor über Volumen  $\rho(\vec{r})$  integrieren  
 $F(\Delta \vec{k})$  ist FT, Formfaktor

# Streuamplituden

[Amsler]

## Kernoberfläche



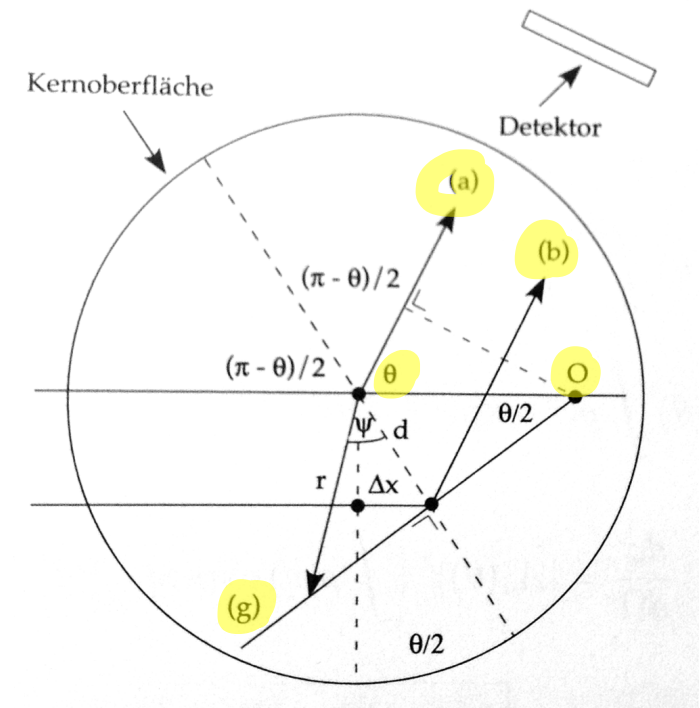
# Formfaktor

Endliche Ausdehnung der Kerne  
- einfallende ebene Welle an Scheibe gestreut

Strahl (a): Intensität  $\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{Mott}} = |A_a(\theta)|^2$

Strahl (b):  $A_b = A_a \cdot e^{i\delta}$  mit  $\delta$ : Phasenfaktor

$$\delta = 2 \frac{\Delta x}{\lambda} = 2 \Delta x k = 2 d \sin \frac{\theta}{2} \cdot p = q \cdot d ; \quad \hbar k = p$$



- Für alle Punkte auf (g) bleibt  $\delta$  identisch
- In 0 ist  $\frac{d}{\sin \frac{\theta}{2}} - \frac{d}{\sin \frac{\theta}{2}} \cos \theta = \frac{d}{\sin \frac{\theta}{2}} (1 - \cos \theta) = 2 d \sin \frac{\theta}{2} = 2 \Delta x$  wie a)

e-Streuung an Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r})$  mit  $\int \rho(\vec{r}) d\vec{r} = 1$

Beiträge entlang von g):  $dA = \rho(\vec{r}) d\vec{r} e^{iqd} A_a(\theta)$

# Formfaktor

3-Dim Integrator über  $\rho(\vec{r})$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |A_a(\theta)|^2 \left| \int \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q}\vec{r}} d\vec{r} \right|^2$$

$$= \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{Mot}} \cdot \underbrace{|F(q)|^2}_{\text{Formfaktor, FT der Ladungsverteilung}}$$

Formfaktor, FT der Ladungsverteilung

$$F(q) = \int \rho(\vec{r}) \exp(i\vec{q}\vec{r}) d\vec{r}$$

Beispiel: Punktförmiger Kern  $\rho(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \delta(\vec{r}) \Rightarrow F(q) = 1$

Kugelsymmetrie:  $\rho(\vec{r}) = \rho(r) \Rightarrow F(q) = 4\pi \int \rho(r) \frac{\sin \frac{|\vec{q}|r}{\hbar}}{|\vec{q}|r/\hbar} r^2 dr$

Theoretisch FT Umkehrbar  $\rho(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int F(q) e^{-i\vec{q}\vec{r}/\hbar} d^3q$

Praktisch nicht möglich da  $F(q)$  nicht über ausreichenden  $q$ -Intervall gemessen.

Messen von  $F(q)$ :

$$|F(q)|^2 = \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{Messung}} \cdot \left( \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{Mot}} \right)^{-1}$$



# Formfaktoren → Ladungsverteilung

Spezialfall der homogenen Kugel  $\rho(r) = \frac{3}{4\pi} R^{-3} \quad (r < R)$

$$\Rightarrow F(q) = \left( 3 \sin \frac{qR}{h} - \frac{qR}{h} \cos \frac{qR}{h} \right) \cdot \left( \frac{qR}{h} \right)^{-3}$$

oszillierende Funktion,

erstes Minimum bei:  $\frac{qR}{h} \approx 4,5 \Rightarrow$

$$R = \frac{4,5h}{12 \sin \frac{\theta}{2}}$$

z.B. Hofstadter 1957: 420 MeV  $e^-$  an  $^{12}\text{C}$ ,  $\theta_{\min} = 51^\circ \Rightarrow R = 2,45 \text{ fm}$

Allgemeiner: Kernradius aus WQ-Verlauf für  $q \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{|\vec{q}|R}{h} \ll 1$

Reihenentwicklung von  $F(q)$ :

$$F(q) = \int \rho(r) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{i |\vec{q}| |\vec{r}| \cos \vartheta}{h} \right) d\vec{r} = 4\pi \int_0^{\infty} \rho(r) r^2 dr - \frac{1}{6} \frac{q^2}{h} \underbrace{4\pi \int_0^{\infty} \rho(r) r^4 dr}_{\langle r^2 \rangle} + O(q^4)$$

$$= 1 - \frac{1}{6} \frac{q^2 \langle r^2 \rangle}{h}$$

$\langle r^2 \rangle$   
mittlere quadratischer  
Ladungsradius

Damit:

$$\langle r^2 \rangle = -6h^2 \left. \frac{dF(q)}{dq^2} \right|_{q^2=0}$$

# Ladungsverteilung $\iff$ Formfaktor

$\rho(r)$

$F(q)$

**punktförmig**

$$\rho(r) = \delta(r)/4\pi$$

**konstant**

$$F(q^2) = 1$$

**exponentiell**

$$\rho(r) \sim \exp(-r/a)$$

**Dipol**

$$F(q^2) = 1/(1 + a^2 q^2)^2$$

**gaußförmig**

$$\rho(r) \sim a^{-3} \exp(-r^2/2a^2)$$

**gaußförmig**

$$F(q^2) = \exp(-\frac{1}{2} \cdot a^2 q^2)$$

**homogene Kugel**

$$\rho(r) = \text{const. } r < R$$

$$\rho(r) = 0 \quad r \geq R$$

$\theta_{\text{min}}$

**oszillierend**

$$F(q^2) \sim [ \sin(Rq) - R \cdot q \cos(Rq) ]$$

**Kugel mit**

**diffusem Rand**

$$\rho(r) = r_0 / (1 + \exp((r-R)/d))$$

Saxon-Woods

**verwaschene Oszillation**

Radius  $r \rightarrow$

Impuls  $|q| \rightarrow$

[Drexlin]

# Saxon-Woods-Verteilung

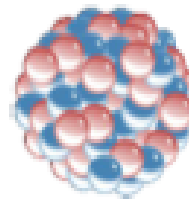
[Drexlin]

- Anpassung von  $\rho(r)$  an experimentelle Streudaten  $(d\sigma/d\Omega)_{\text{exp}}$  ergibt die **Saxon-Woods Verteilung** für ausgedehnte Kerne:

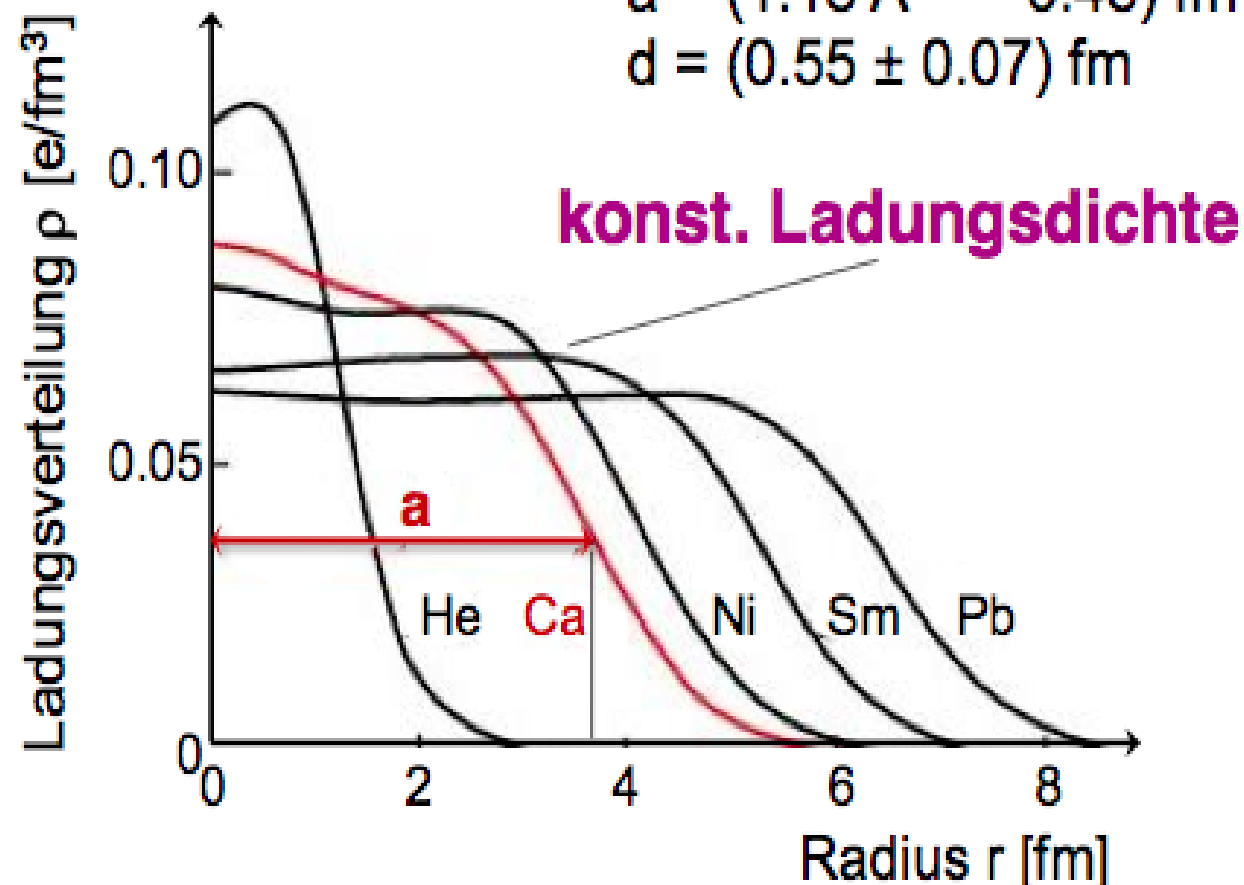
$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{(r-a)/d}}$$

Kernradius  $a$

Skin-Dicke  $d$

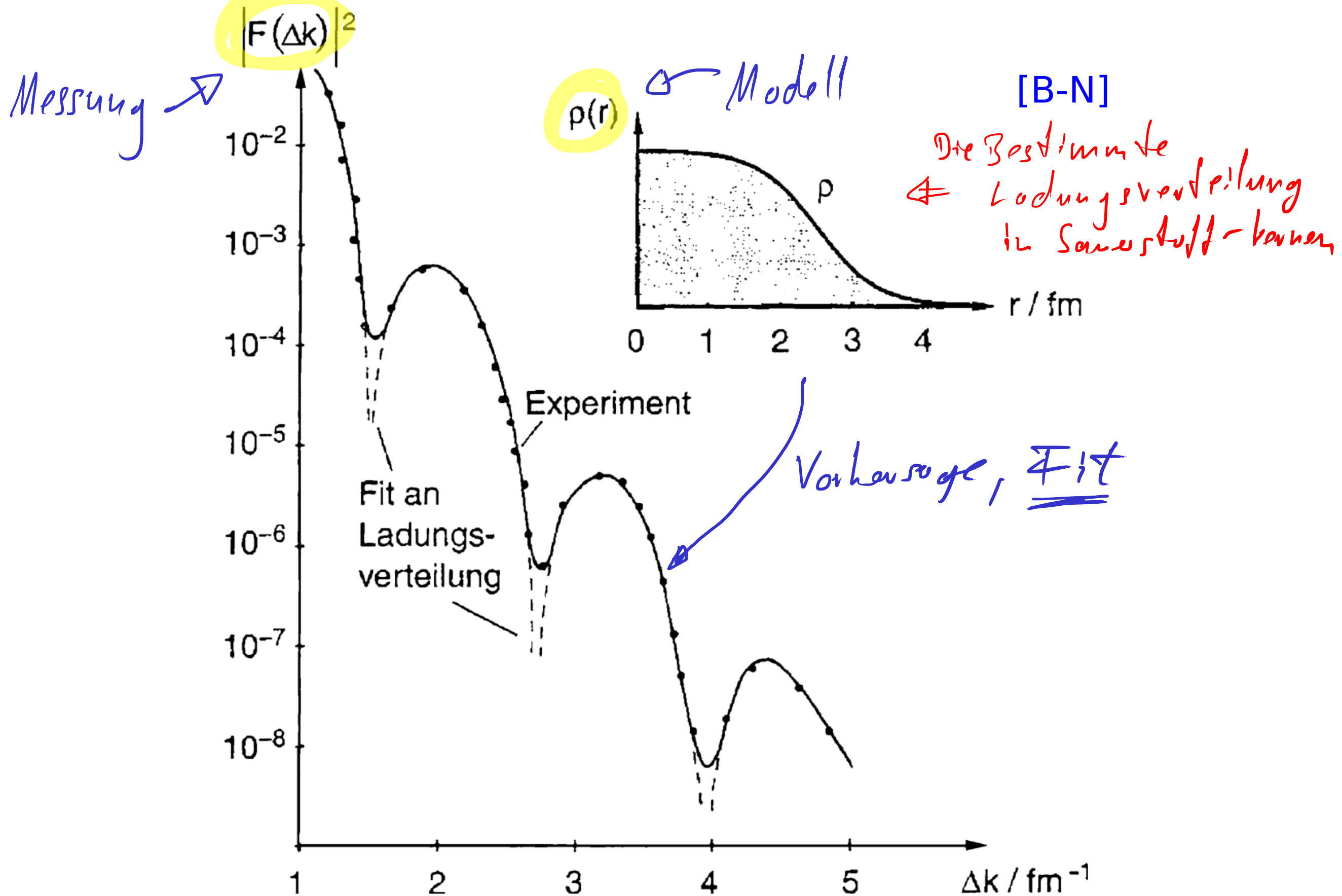


$$a = (1.18 A^{1/3} - 0.48) \text{ fm}$$
$$d = (0.55 \pm 0.07) \text{ fm}$$



Sehr gute parametrische  
Beschreibung schwerer  
Kerne

# Formfaktor von e-Streuung an Sauerstoffkernen bei 750 MeV



# Kernradien aus elastischer Elektronstreuung

Radius (Dichte auf 50% gesunken):  $1.07 \text{ fm } A^{1/3}$

Entspricht Homogener Kugel:  $1.21 \text{ fm } A^{1/3}$

Hautdicke (Dichte fällt von 90% auf 10%):  $2.40 \text{ fm}$

Nukleondichte:  $\rho_N \sim 0.17 / \text{fm}^3$

Leichte Kerne (wie  $^4\text{He}$ ,  $^9\text{Be}$  etc.) verhalten sich komplizierter

Einige Kerne (z.B. Lanthaniden) haben eine ellipsoidische Gestalt



# Kernmassen und Bindungsenergien

$$m(A, Z) = Z m_p + (A - Z) m_n - \frac{E_B(A, Z)}{c^2}$$

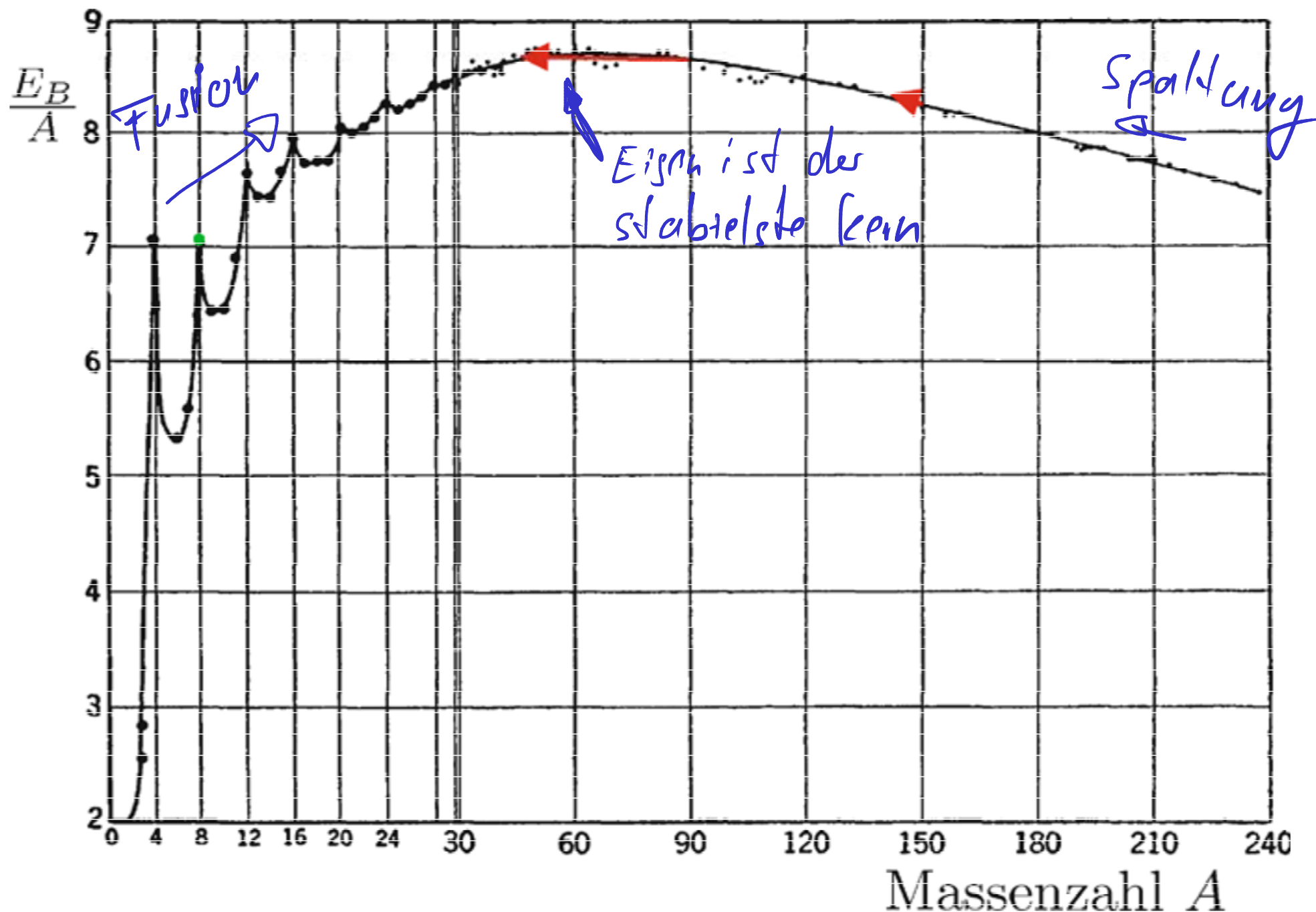
$$m_p = 938,27203(8) \text{ MeV}/c^2$$

$$m_n = 939,56536(8) \text{ MeV}/c^2$$

Massendefekt  $\Delta m = \frac{E_B}{c^2}$

$$0,5 - 1\% \text{ von } m(A, Z) \Rightarrow 5 - 10 \text{ MeV/Nukleon}$$

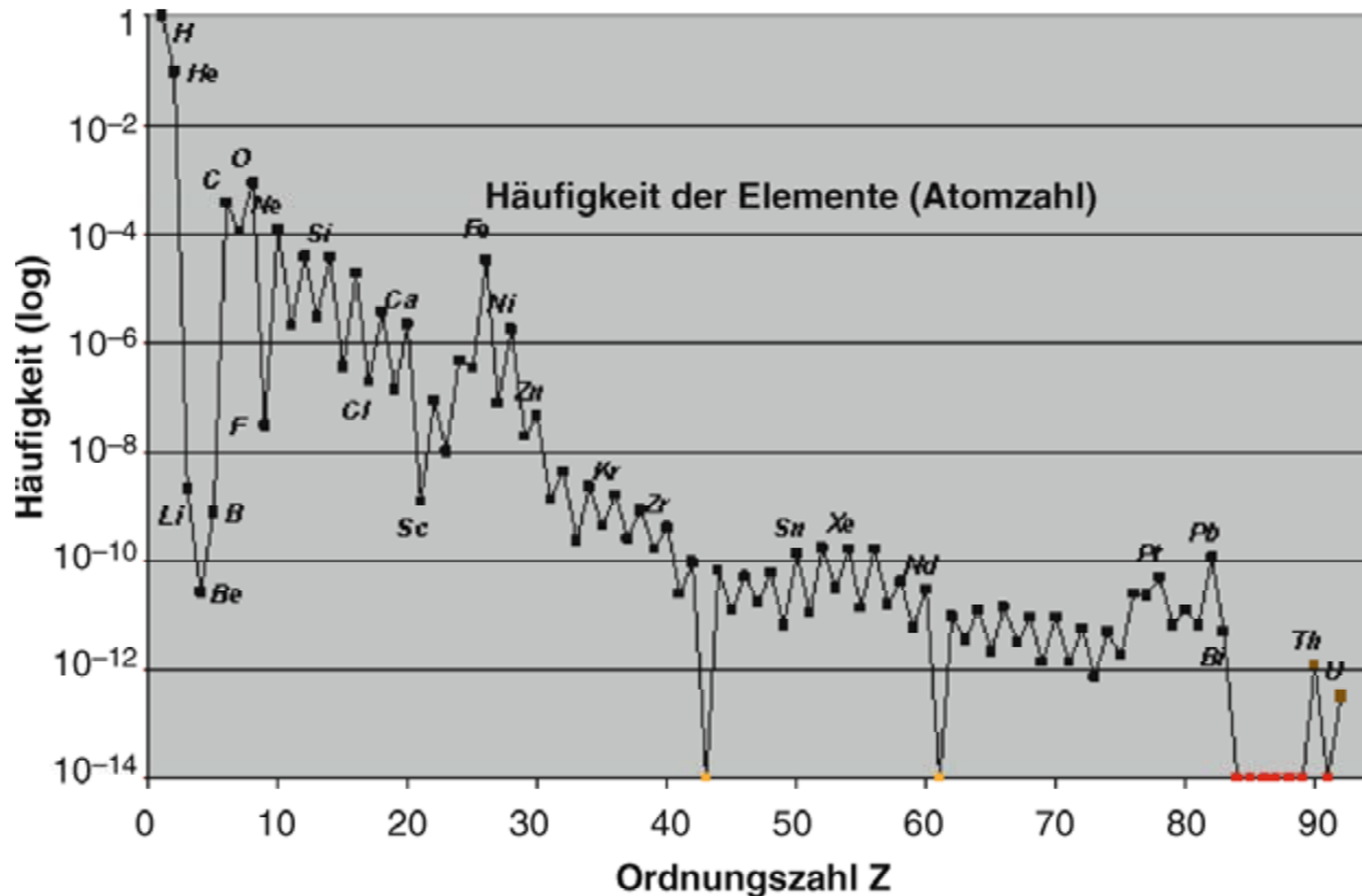
# Mittlere Bindungsenergie pro Nukleon



[B-N]

**Abb. 4.8** Bindungsenergie pro Nukleon  $E_B/A$  für die natürlich vorkommenden Kerne (und  ${}^8_4\text{Be}$ , grüner Punkt). Die Skala von  $A$  1 bis  $A$  30 ist 4-fach gespreizt. Die roten Pfeile deuten an, dass Prozesse *Spaltung* (bei  $A \approx 90$ ) und  $\alpha$ -*Emission* (bei  $A \approx 150$ ) energetisch möglich wären, weil Bindungsenergie frei würde. Tatsächlich wurden diese Umwandlungen zunächst erst bei viel höheren  $A$  beobachtet. (Abbildung nach [66])

# Häufigkeit im Sonnensystem



**Abb. 3.13** Häufigkeit der Elemente relativ zu Wasserstoff im Sonnensystem. *Schwarz*: stabile Elemente (als letztes wurde 1925 das Rhenium ( $Z = 75$ ) gefunden). *Farbig*: instabile Elemente. *Braun*: die beiden Mutterelemente der natürlichen Radioaktivität. *Rot*: deren Zerfallsreihen, und *Ocker*: die beiden künstlich hergestellten Elemente Technetium ( $Z = 43$ , nachgewiesen 1939) und Promethium ( $Z = 61$ , nachgewiesen 1945). Diese sind alle noch viel seltener als hier angedeutet. Nicht eingezeichnet die künstlich hergestellten Transurane  $93 \leq Z \leq 112$  (1940–2009)

# Tröpfchenmodell (semi-empirisch)

$$E_B(A, Z) = \underbrace{a_v A}_{\propto \text{Volumen}} - \underbrace{a_s A^{2/3}}_{\text{Oberfläche}} - \underbrace{a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}}}_{\text{Coulomb}} - \underbrace{a_{\mp} \frac{(Z-N)^2}{A}}_{\text{Asymmetrie}} + \underbrace{\delta a_p A^{-1/2}}_{\text{Paarung}}$$

gg:  $\delta = +1$

nn:  $\delta = -1$

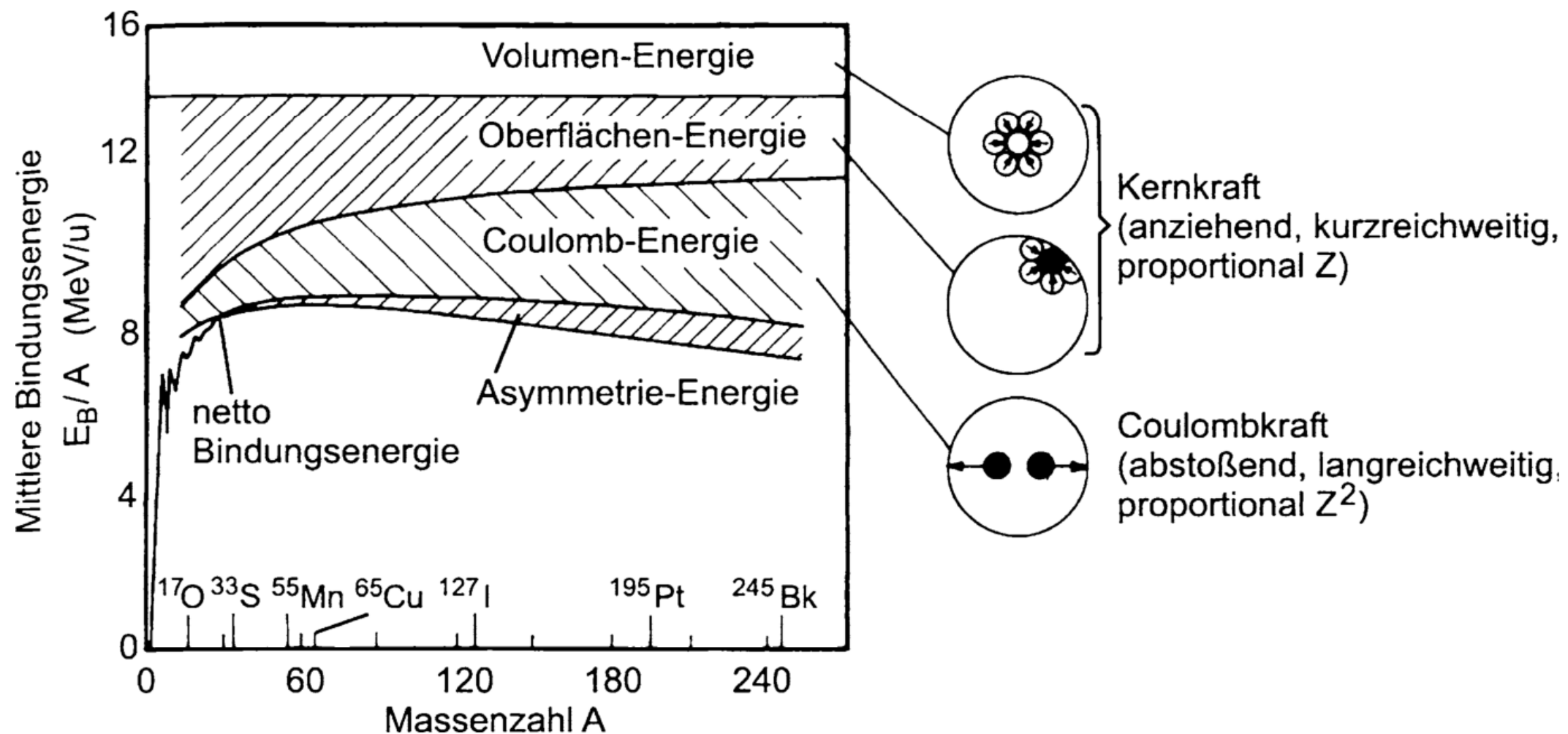
gu/ng:  $\delta = 0$

## Anpassen an Daten

$$a_v = 16 \text{ MeV} \quad a_s = 18 \text{ MeV} \quad a_c = 0.71 \text{ MeV} \quad a_{\mp} = 93 \text{ MeV} \quad a_p = 11 \text{ MeV}$$

$\Rightarrow E_B$  besser 1% für  $A > 30$  !

# Komponenten der Bindungsenergie



**Abb. 4.13** Die vier hauptsächlichen Komponenten der Bindungsenergie pro Nukleon nach dem Tröpfchen-Modell. (Abbildung aus [194])

# Isobaren - Regel

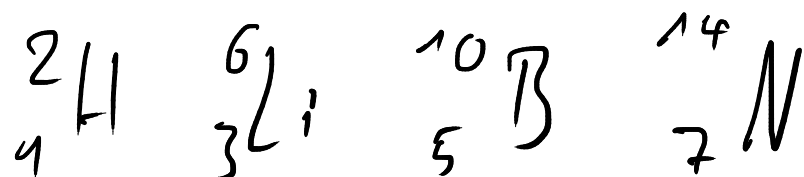
Parabelform durch  
Asymmetrieterm

=> "Tal der Stabilität"

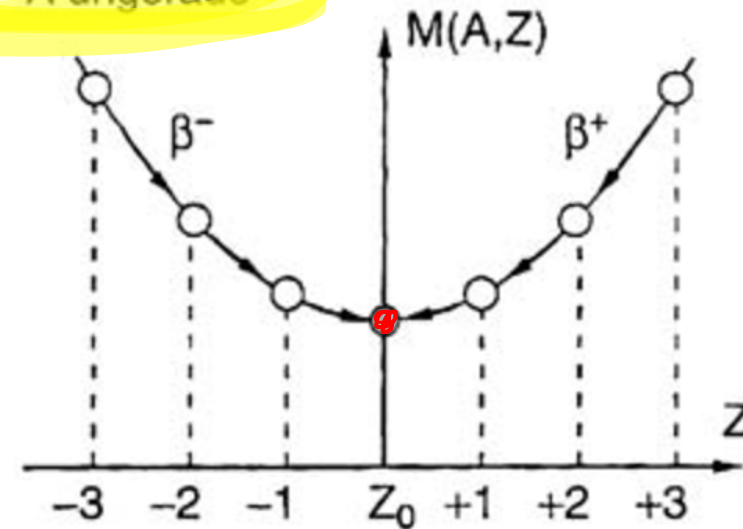
• : stabile Kerne

Konkret Beschreiben:

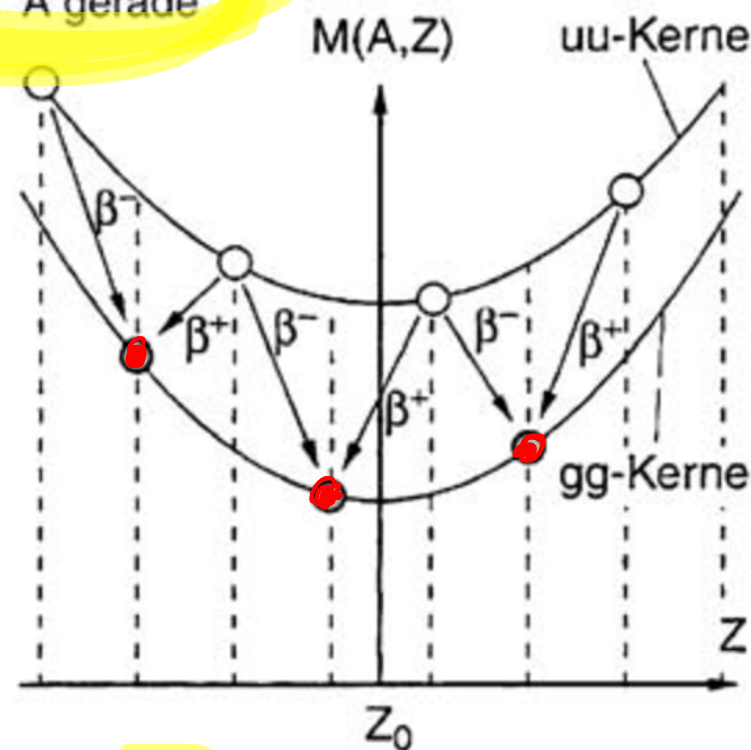
es gibt nur vier stabile uu Kerne:



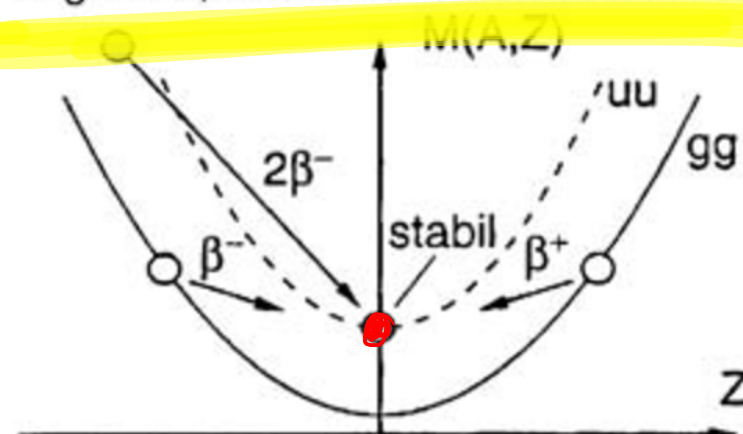
a A ungerade



b A gerade

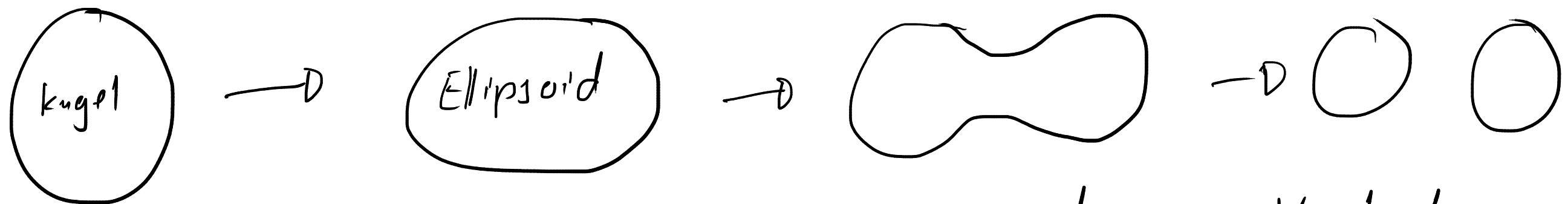


c A gerade, klein und nicht durch 4 teilbar





# Spontane Spaltung im Tröpfchenmodell



Prozess findet nur statt, wenn energetisch von Vorteil

Volumen, Ladung konstant, Oberfläche  $\uparrow$ ,  $\langle r^2 \rangle \uparrow$

$\Rightarrow \Delta \mathcal{B}_{\text{Oberfläche}} \uparrow$   
 $\Delta \mathcal{B}_{\text{Coulomb}} \downarrow$  } d.h.  $\Delta \mathcal{B}_{\text{Oberfläche}} < -\Delta \mathcal{B}_{\text{Coulomb}}$

Wegen  $\Delta \mathcal{B}_{\text{Oberfläche}} \propto R^2$  und  $\Delta \mathcal{B}_{\text{Coulomb}} \propto R^{-1}$  wird  $\frac{\Delta \mathcal{B}_{\text{Oberfläche}}}{\Delta \mathcal{B}_{\text{Coulomb}}} = \frac{2 \mathcal{B}_{\text{Oberfläche}}}{\mathcal{B}_{\text{Coulomb}}} = S$

$\Rightarrow$  Spaltparameter  $S > 1$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{Z^2}{A} > 50}$$

Also z.B. für  $^{238}\text{U}$   $\frac{Z^2}{A} = \frac{92^2}{238} \approx 36 \Rightarrow \text{stabil}$  ⚡

Und  $Z=139$   $N=244 \Rightarrow \frac{Z^2}{A} = 50$

# Ausblick

- Tröpfchenmodell sehr erfolgreich,  
hat aber seine Grenzen

→ Schalenmodell

# Schalenmodell

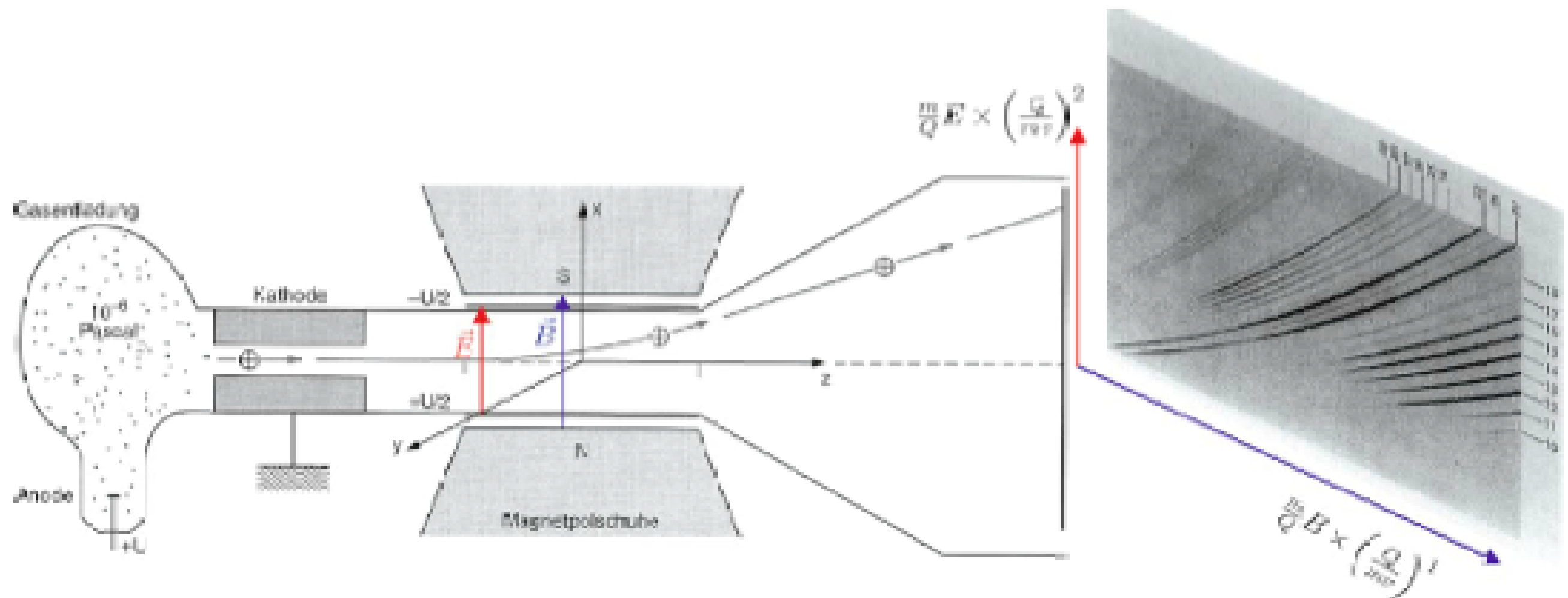


Abb. 4.1 Parabel-Massenspektrograph. *Linker Teil:* die Ionen treten mit sehr unterschiedlichen Geschwindigkeiten in die Ablenkfelder ein.  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  sind zueinander parallel und lenken die Ionen nach oben bzw. rechts vorne ab. *Rechter Teil (Fotoplatte):* Die Ablenkung nach oben ist proportional zu  $\frac{Q}{m} \left( \frac{Q}{m} \frac{1}{v} \right)^2$ , die nach rechts vorne proportional zu  $\left( \frac{Q}{m} \frac{1}{v} \right)^1$ . Auf dem Schirm treffen Teilchen verschiedener Geschwindigkeit  $v$  längs einer durch  $Q/m$  bestimmten Parabel auf – je langsamer und leichter, desto weiter außen. An jeder Parabel ist die Massenzahl  $A$  angegeben (Bereich  $A = 10-29$ ). Die beiden intensivsten Parabeln gehören zu den beiden Neon-Isotopen mit  $A = 20$  und  $A = 22$ . (Abbildung nach [57])